北京电视大学

概率論与数理统計自学参考資料—

数学系60级(甲)班用

〔内部发行〕

北京电视大学数学系編

1964.2.11

总的说明

一、概率论与数理统计研究对象。

在客观世界中普遍的存在着偶然（随机）现象。例如在研究气体的物理特性时，容器内的气体是由大量的个别分子所组成的，这些分子在连续地运动着，由于它们彼此之间的相互作用是非常复杂的，因而不能断言个别分子在某时刻必然向东跑或必然向西跑，这种现象就是偶然（随机）现象。对于这种现象我们无法利用“因果关系”加以严格控制或准确予测，我们也无法利用像“微分方程”这样的数学工具来研究其规律。但是在某一确定的条件下大量的随机现象却存在着集体的规律性。例如上面所述，个别分子的运动带有偶然性，但容器内的分子的全体所构成的现象却有一定的规律，如对器壁的压力就是稳定的。又如我们掷一个均匀的铜钱；每掷一次可能出现“正面”也可能出现“反面”，但是掷了许多次以后，就会发现大约有一半的机会出现“正面”，而约有一半的机会则出现“反面”。也就是说对掷一次铜钱，我们无法予言究竟出现“正面”还是“反面”，但是掷许多次铜钱时，比如掷10000次，则我们可以予言约有5000次出现“正面”。这就是大量随机现象的整体的规律性。我们从量的方面来研究大量随机现象的规律性，这就是概率论的任务。数理统计的任务则是应用概率论的知识，对随机现象进行大量的观察，对实验数据进行整理分析，得出规律，从而指导实践。（当然数理统计也必须研究理论问题，以上仅为粗略的说明）。

随机现象普遍存在：如天气的变化，某电话站来到的电话呼唤次数，电讯系统的随机噪声，生产过程的质量情况等都是[redacted]象。由此概率论与数理统计的应用范围是非常广泛的。

不仅用到物理学和其他自然科学（如生物遗传学）方面，而且在国防、工程，各种技术和生产企业中都有重大作用。譬如：在大规模的生产企业中利用概率论与数理统计的方法对产品进行质量控制，在某些单位已经取得显著效果。

二、学习本课程的目的。

概率论与数理统计与生产实际有着广泛的联系，因此近一百年来发展非常迅速，现在已经形成许多独立的数学分支，如随机过程（马氏过程和平稳过程），信息论、实验设计、过程统计等。由于师生的水平和时间限制我们不可能讲这许多内容，同时，对每个人来说也不需要这么多。我们的目的仅仅是将概率论与数理统计的最基本的知识介绍给大家。其目的是：

(1) 作为一个学习高等数学的同志，必须对研究随机现象的数学方法有所了解与掌握。

(2) 同学们学习了一定基础知识，便于联系生产实际中的问题进行研究。

(3) 为同学们学习一些更专门的知识打下基础。

本着这样的目的，我们以讲基本概念，基础理论为主，同时注意基本技能，技巧的训练，并适当地联系生产实际问题。

本课程的主要内容是：在概率论方面包括概率的概念，随机变数与分佈函数，随机变数的数字特征，大数定律，特征函数及古典极限定理。在数理统计方面包括统计理论的基本概念，点估计、统计推断，方差分析与相关分析等知识。

三、学习中需注意的几个问题；

1. 目前有关概率统计方面的书不算少，但我们还没选择出理想的教材。格涅坚科的“概率论教程”是比较老的一本教科书，对学习概率论来说还是一本比较好的书。因为是翻译的教材，有些地方不十分好懂，特别是第一章牵涉到一些哲学问

题，我们不可深究。我们只讲书中的一，四，五，六各章及七八章的概要。对于这些部分我们尽可能的写一些自学指导资料，帮助同学们学习。关于统计部分，以后选好材料再印发。

2、学习概率统计与学习其它数学有些不同，其内容本身并不困难，但因为它研究的是随机现象这样一个特殊范畴，大家过去很少碰到过，所以一开始有些不习惯，感到思维方法特殊。只要注意深入理解基本概念，多联系具体模型来思考问题，逐渐就会克服这一难关。

3、和其它课程一样，学习时要多动脑筋思考问题，多动手作练习，特别是可互相讨论，互相启发，要及时复习，经常总结，随时记忆，这样就可以获得巩固的知识，并且为总复习打下基础。

四、参考书：

林少宫编 “基础概率与数理统计”

傅 钦著 “概率论初阶”

复旦大学数学系主编 “概率论与数理统计”

〔波兰〕M弗史著 “概率论及数理统计”

第一章　概率的概念

这一章是学习概率论的基础，主要讲随机事件体，概率的定义，及概率的运算，基本上是属于古典概率的内容，在计算概率时用到一些排列组合知识，可能大家已经不熟悉了，所以我们将它作为补充知识附在后面。这一章基本概念多，计算多，学习中要注意深入理解概念，多作练习，考虑问题时需要全面细致。还需要说明在讲课时或作习题时经常用到掷骰子、摸球等模型。因为这些模型是最简单、最典型的随机模型，利用这些形象化的简单模型便于我们认识规律，掌握理论。但并不说明概率论是数学的游戏，希望大家能正确认识这点。

一、主要内容：

I、随机事件体

1、必然事件：在某一组条件下，必然发生的事件，称为必然事件，记为 U。

2、不可能事件：在某一组条件下，必然不发生的事件，称为不可能事件，记为 V。

3、随机事件：在某一组条件下，可能发生也可能不发生的事件，称为随机事件，通常用大写字母 $A, B, C, \cdots\cdots$ 表示。

4、包含关系：若在某一组条件下，A 发生，则 B 也发生，称为 B 包含 A（或 A 蕴涵 B），亦可称为 A 被 B 包含。记为 $B \supset A$ 或 $A \subset B$。

5、等价关系：若 $A \subset B$ 且 $B \subset A$，则称 A, B 等价，记为 $A = B$。

6、事件的和：若事件 A，B 至少发生其一（在某一组条件下，A 发生或 B 发生）构成事件 C，称为 A 与 B 之和。记为：$C = A + B$。

若事件$A_1, A_2, \cdots\cdots, A_n$中至少发生其一（$A_1$发生或$A_2$发生，……或$A_n$发生）构成事件C，称为n个事件$A_1, A_2, \cdots$，$A_n$之和。记为 $C = A_1 + A_2 + \cdots + A_n$，

7. 事件的积（交）：若事件A，B同时发生（在某一组条件下，A发生B亦发生）构成事件D，称为A，B的积（交）。记为$D = AB$。

若事件$A_1, A_2, \cdots A_n$，同时发生构成事件D，称为n个事件$A_1, A_2, \cdots\cdots, A_n$的积，记为$D = A_1, A_2 \cdots\cdots A_n$。

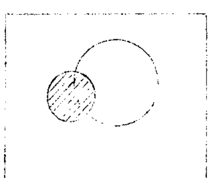
8. 事件的差：若事件A发生，但事件B不发生，构成事件E，称为A与B之差。记为$E = A - B$。

9. 互不相容事件：若A，B不能同时发生，即$AB = V$，则称A，B为互不相容事件。

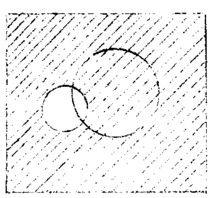
10、对立事件：若事件$\bar{A}$表示A不发生的事件，即A，$\bar{A}$满足：

$A + \bar{A} = U \quad A\bar{A} = V$，则称A，$\bar{A}$互为对立事件。

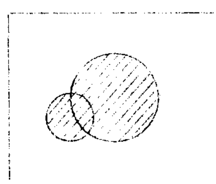
为了便于记忆，直观地用图形表示事件之间的关系。设某一组条件是这样的：在图中的正方形内随机取一点，不在图中任何一个圆周上。以A表示“所取的点落在小圆内”这一事件。B表示“所取的点落在大圆内”这一事件。于是事件A，$\bar{A}$，$A+B$，AB，$A-B$就是所取的点落在图中以阴影表示的部分。最后两图则表示B包含A，及A，B互不相容。



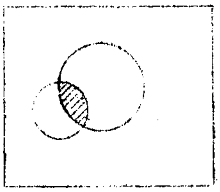
A



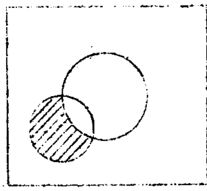
$\bar{A}$



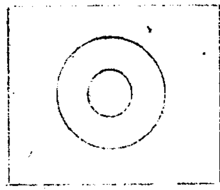
A + B



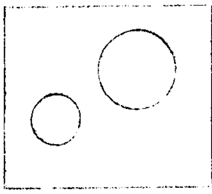
AB



$A-B$



$A\subset B$



$AB=V$

11、随机事件体：设 $\mathscr{F}$ 是与某一随机现象相联系的事件系（随机事件所组成的集合）。设 $\mathscr{F}$ 满足以下条件：

1) $\mathscr{F}$ 包含必然事件 U 和不可能事件 V。

2) 若 $A、B\in\mathscr{F}$，则 $A+B\in\mathscr{F}$，$A-B\in\mathscr{F}$，$AB\in\mathscr{F}$，则称 $\mathscr{F}$ 为一个事件体。

若 $\mathscr{F}$ 还满足

3) $A_n\in\mathscr{F}$，$n=1,2,3,\cdots\cdots$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathscr{F}$，则称 $\mathscr{F}$ 为 Borel（波雷尔）体

II、概率的概念：

1、概率的古典定义：设在某一随机现象，有且仅有 n 个两两互不相容的事件可能发生，并且每个事件都是等可能的（这样的事件称为基本事件）若组成事件 A 的基本事件个数是 m，那么 $\frac{m}{n}$ 便定义为事件 A 的概率。记为 $P(A)=\frac{m}{n}$。

2、概率的统计定义：若在某一组条件下，重复地进行大量试验，则出现某一特定事件 A 的频率（A 出现的次数与试验总数之比），随着试验次数的增加，在绝大多数情况下，都愈来愈接近某一常数，我们用这个常数来表示 A 出现的可能性的大小，并且称之为事件 A 的概率。记为 $P(A)$。

3、概率的几何定义：设在平面上有某一区域 G，并且其中包含有另一可求积的区域 g，在区域 G 中任意掷一球，而

落在区域g里的概率定义为：

$$\frac{g\text{的面积}}{G\text{的面积}}。$$

4、概率的公理化定义：定义在$\mathscr{F}$（波雷尔体）上的一个集合函数 $P(A)$满足：

公理1：　$P(A)\geqslant 0$

公理2：　$P(U)=1$

公理3：　若A，$B\in\mathscr{F}$，且$AB=V$，则$P(A+B)=$
$=P(A)+P(B)$

公理4：　若$A_n\in\mathscr{F}$，$n=1,2,\cdots\cdots$，且$A_iA_j=V$
$(i\neq j)$ 则$P\{\sum_{i=1}^{\infty}A_i\}=\sum_{i=1}^{\infty}P\{A_i\}$

称$P(A)$为事件A出现的概率。

5、条件概率：若A、$B\in\mathscr{F}$，$P(A)$，$P(B)$都不等于零。

称$\frac{P(AB)}{P(B)}$为B出现条件下，A的条件概率。记为$P(A/B)$。特别，若$P(A/B)=P(A)$，则称事件A对事件B独立。

Ⅲ、概率的基本运算公式：

1. 事件 A.B 在各种情况下，加，减，乘的运算公式

A.B间关系	加　法	乘　法	减　法
A.B任意	$\underline{P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)}$ $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A)P\{B/A\}$ $=P(A)+P(B)-P(B)P(A/B)$ $P(A+B)=1-P(\bar{A}\bar{B})$	$P(AB)=P(A)\cdot P(B/A)$ $\underline{=P(B)\cdot P(A/B)}$ $P(AB)=P(A)+P(B)-P(A+B)$ $P(AB)=1-P(\bar{A}+\bar{B})$	$P(A-B)=P(A)-P(AB)$ $P(A-B)=P(A\bar{B})$ $=P(A)\cdot P(\bar{B}/A)$
A.B独立	$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A)\cdot P(B)$ $P(A+B)=1-P(\bar{A}\bar{B})$ $\underline{=1-P(\bar{A})\cdot P(\bar{B})}$	$\underline{P(AB)=P(A)\cdot P(B)}$	$P(A-B)=P(A)-P(A)\cdot P(B)$
A.B互不相容	$\underline{P(A+B)=P(A)+P(B)}$	$P(AB)=0$	$P(A-B)=P(A)$
A.B对立	$\underline{P(A+B)=P(A)+P(B)=1}$	$P(AB)=0$	$P(A-B)=P(A)=1-P(B)$
A包含B	$P(A+B)=P(A)$	$P(AB)=P(B)$	$P(A-B)=P(A)-P(AB)$ $\underline{=P(A)-P(B)}$
A B等价	$P(A+B)=P(A)=P(B)$	$P(AB)=P(A)=P(B)$	$P(A-B)=0$

注：在公式下面画横道者，表示在该种情况下，计算中最常用的公式。

2、 全概公式及贝叶斯公式，

若事件 B 能且仅能与 n 个两两互不相容的事件 A_1，A_2，……，A_n 之一同时发生。即 $A_i A_j = V$（$i \neq j$），且 $B=\sum_{i=1}^{n} BA_i$ 则可得到：

① 全概公式：$P(B)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i)\cdot P(B/A_i)$

② 贝叶斯公式：$P(A_i/B)=\dfrac{P(A_i)\cdot P(B/A_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A_j)\cdot P(B/A_j)}$ $i=1,\cdots,n$

3、 二项式公式：

进行 n 次独立试验，每次试验结果为 A，或 $\bar{A}$，$P(A)=p$，$P(\bar{A})=1-p=q$，则在 n 次独立试验中 A 出现 K 次的概率，$P_n(K)=C_n^K\, p^K \cdot q^{n-K}$。此公式称为二项式公式。

二、复习思考题：

1、 偶然现象有没有规律？概率论与数理统计研究的对象是什么？

2、 什么叫必然事件，不可能事件，随机事件？如何表示们？

3、 任意事件间有那些关系？怎样定义？

(1) 是否任何事件都有对立事件？必然事件的对立事件是什么？

(2) 对立是否互不相容？反之呢？

(3) 互不相容是否相互独立？反之呢？

结论： 对立 $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ 不相容（相容 $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ 不对立）

独立 $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ 相容（不相容 $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ 不独立）

（“$\Rightarrow$”表示一定成立，“$\not\Leftarrow$”表示不一定成立。）

4、事件的运算有几种？怎样定义？

(1) 几个事件的和是什么意思？怎样表示？

(2) 几个事件的积是什么意思？怎样表示？

(3) "A与B之差"是否与"B与A之差"相等？

5、概率的定义有那几种？它们之间有何异同？

(1) 怎样理解概率的实际意义？某工厂的废品率是2%是否每抽100个产品准有2个废品？

(2) 能不能说当试验次数n趋于无穷大时，频率$\frac{m}{n}$趋于概率p？试以掷铜钱为例说明这个问题。

6、试利用公理推证下列各式：

(1) $P(V)=0$

(2) $P(A)=1-P(\bar{A})$

(3) $0\leq P(A)\leq 1$

(4) $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$ $(A.B\in \mathscr{F}_e)$

(5) 若 $A_1, A_2, \cdots\cdots, A_n\in \mathscr{F}_e$ 且 $A_iA_j=V$ $(i\neq j)$

则 $P(A_1+A_2+\cdots\cdots+A_n)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)$

一般地有：$P(A_1+A_2+\cdots\cdots+A_n)\leq \sum_{i=1}^{n}P(A_i)$

(6) 若 $A.B\in \mathscr{F}_e$，且 $B\supset A$，

则 $P(B)\geq P(A)$

三、注意事项：

第一章牵涉一些哲学问题，所以看书时困难比较大，需要加以说明。关于第一章的§2对于概率定义的种々见解可只看最后的小字，§6可不看。

这一部分可参考欣钦著"概率论初阶"该书通俗易懂，可以帮助理解。其它有关概率论与数理统计书的第一章都可参考。

四、补充知识——排列与组合：

I、引理：

引理1，若给了两个向量 $(a_1,\cdots\cdots,a_m)$，$(b_1,b_2,\cdots,b_n)$

则形如 (a_{i_1},a_{i_2})

（其中 $1\leqslant i_1\leqslant m$，$1\leqslant i_2\leqslant n$）的数对共有 $m\times n$ 个。

证明：不防将所有可能的数对列表如下：

$$\begin{vmatrix} a_1b_1, & a_2b_1\cdots\cdots & a_mb_1 \\ a_1b_2, & a_2b_2\cdots\cdots & a_mb_2 \\ \vdots & \vdots & \\ a_1b_n & a_2b_n\cdots\cdots & a_mb_n \end{vmatrix}$$

显然不同的数对共有 $m\times n$ 个，故引理得证。

引理2，若给了 S 个矢量 $(a_1,\cdots\cdots a_m)$，$(b_1,b_2,\cdots b_{m_2})\cdots\cdots$ $(y_1,y_2,\cdots\cdots y_{m_{S-1}})$，$(z_1,z_2,\cdots\cdots z_{m_S})$ 则形如 $(a_{i_1},b_{i_2},\cdots\cdots,y_{i_{S-1}},z_{i_S})$（其中：$1\leqslant i_1\leqslant m_1$，$1\leqslant i_2\leqslant m_2$，$1\leqslant i_{S-1}\leqslant m_{S-1}$，$1\leqslant i_S\leqslant m_S$）的向量个数是 $m_1\times m_2\times\cdots\cdots\times m_S$ 个

证：用数学归纳法证明：

当 $S=2$ 时，由引理1知结论成立。

设当 $S=K-1$ 时，结论成立。

现证当 $S=K$ 时，结论亦成立。

由假设当 $S=K-1$ 时，形如 $(a_{i_1},b_{i_2},\cdots\cdots y_{i_{K-1}})$ 的向量个数是 $m_1\times m_2\times\cdots\cdots\times m_{K-1}$ 个，

当 $S=K$ 时，可将形如 $(a_{i_1},b_{i_2},\cdots\cdots y_{i_{K-1}})$ 的 $K-1$ 维向量（共有 $m_1\times m_2\times\cdots\cdots\times m_{K-1}$ 个）看成是一个新向量元素，即这个新向量的元素本身就是 $K-1$ 维向量，它包含了 $m_1\times m_2\times\cdots\cdots\times m_{K-1}$ 个元素，也就是说它是 $m_1\times m_2\times\cdots\cdots m_{K-1}$ 维的向量。则由引理1，它和 $(z_1,z_2,\cdots\cdots,z_{m_K})$ 共能组成的形如 $((a_{i_1},b_{i_2},$

$\cdots\cdots y_{i_{K-1}}), z_{i_K}) = (a_{i_1}, b_{i_2}, \cdots\cdots, y_{i_{K-1}}, z_{i_K})$ 的K维向量共有 $m_1 \times m_2 \times \cdots\cdots m_{K-1} \times m_K$ 个，故引理2得证。

利用引理能解决一些实际问题，并很容易证明排列组合公式。

例1：在贯彻农业八字宪法中，研究水、土、肥、种、这四种因素对农作物产量的影响，要进行各种组合实验。若对水、土、肥、种、四种因素各取 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ 种不同措施，问在丰产田中不同的实验共需多少块实验田？

解：不防以字母 A、B、C、D 分别代表水、土、肥、种。

实际上每种因素的不同方案，可以看为引理2中的一个向量设为 $(A_1, A_2, \cdots\cdots, A_{\gamma_1})$，$(B_1, B_2, \cdots\cdots, B_{\gamma_2})$，$(C_1, C_2, \cdots\cdots, C_{\gamma_3})$，$(D_1, D_2, \cdots\cdots, D_{\gamma_4})$，故所需试验田数为 $\gamma_1 \times \gamma_2 \times \gamma_3 \times \gamma_4$ 块。

例2：设从甲公社运一批种子到乙公社，必须经过丙社。从甲社到丙社有 m 条路，从丙社到乙社有 n 条路，求从甲社运到乙社有多少不同的走法？

解：共有 $m \times n$ 种走法。

II、排列：

定义：从 n 个元素 $a_1, a_2, \cdots\cdots a_n$ 中任意取出 γ 个元素，表示为：$a_{i_1}, a_{i_2}, \cdots\cdots a_{i_\gamma}$ 其中 $1 \leq i_\gamma \leq n$，称为从 n 个元素中取出 γ 个元素的一个排列。

定理：从 n 个元素中取 γ 个元素，

1) 若取出一个元素后放回去，再取出一个，又放回去……，这样取出的 γ 个元素，所组成的不同排列数为 n^γ 种。

2) 若取出元素后不许放回去，这样任取 γ 个元素的不同排列数为 $n(n-1), \cdots\cdots (n-\gamma+1)$ 种。

证明：1) 在第一种情形（称为带放回的情形），可将第一个元素 a_{i_1} 看为由 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 中任意取出的元素，同理第二个……第 r 个元素都具有同样的性质，由引理已知不同排列数为 n^r 个。

2) 在第二种情形下（称为不带放回的情形），可将第一个位置的元素 a_{i_1} 看成由 n 维向量 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 中任意取出的，设 $a_{i_1}=a_i$ $(1\leq i\leq n)$ 当 a_{i_1} 确定后第二个位置的元素 a_{i_2} 可看成是由 $n-1$ 维向量 $(a_1, a_2, \cdots a_{i-1}, a_{i+1}, \cdots a_n)$ 中任意取出的。依此类推，第 r 个位置的元素 a_{i_r} 则可看为由取出 $r-1$ 个元素后所剩下的 $n-r+1$ 个元素组成的向量中任意取出的。这样一来，根据引理2得不同的排列数是 $n(n-1)\cdots\cdots(n-r+1)$ 种。

通常称第二种情况：即从 n 个元素中不带放回的任取 r 个元素依次排列为 $a_{i_1}, a_{i_2}, \cdots a_{i_r}$ 的不同排列数记为 A_n^r，称为选排列。

特别当 $r=n$ 时，令 $A_n^n=P_n=n!=n(n-1)\cdots2\cdot1$，

（其中符号"$n!$"读着 n 的阶乘，并规定 $0!=1$）称为全排列。显见 $A_n^r=\dfrac{P_n}{P_{n-r}}=\dfrac{n!}{(n-r)!}=n(n-1)\cdots(n-r+1)$

例3：本市电话号码由六位数字组成，不考虑前2位代表局的号码。问每个局共能安装多少部电话总机？又求由不同数字组成的号码有多少？

解：实际是考虑仅有四位数字组成的数有多少个？因为个位、十位、百位、千位，都可以取 $0, 1, \cdots\cdots 9$ 这10个数码的任一个，由定理知：共能安装 10^4 部电话机（为简单计称其中将 0000 也称作一个号码）

求由不同数字组成的号码有多少？可看为从10个元

素中取4个元素，而且是不带放回的取法，由定理1知共有 $10\times9\times8\times7$ 个。

由上可知每个电话局可安装一万个电话总机，而由不同数字组成的电话号码是5040个。

例4：求 r 个人的所有可能的生日情况有多少种？又其有不重复生日（即二人，或三人……不在同一天过生日）的情况有多少种？

解：类似上题，r 个人中每个人的生日可有365种情况，故 r 个人的所有可能的生日情况和在365天中带放回的取出 r 天的排列数一样，故 r 人的生日情况共有 $(365)^r$ 种，其中不重复的生日数为 $365\times364\times\cdots\cdots\times(365-r+1)$ 种。

Ⅲ、组合：

1、定义：从 n 个元素 $a_1,a_2,\cdots\cdots,a_n$ 中任取 r 个元素组成一组（不论秩序）称为组合。

2、定理：n 个不同元素中任取 r 个元素的不同组合方法是 $\dfrac{n(n-1)\cdots\cdots(n-r+1)}{r!}$ 种。

证：设组合数为 x。因对排列而言，每取出 r 个元素可有 $r!$ 种不同排法，而对组合而言，对于这 r 个元素不论秩序均看成同属一组，故有

$$x\times r!=A_n^r$$

$$\therefore\quad x=\frac{A_n^r}{r!}=\frac{n(n-1)\cdots\cdots(n-r+1)}{r!}$$

通常用符号 C_n^r 或 $\binom{n}{r}$ 记组合数

3、组合公式的简单性质：

(1) $C_n^r=\dfrac{n!}{r!(n-r)!}$，只须将原式分子分母同乘 $(n-r)!$ 即得

(2) $C_n^r = C_n^{n-r}$

证：∵ $C_n^r = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n!}{(n-r)!r!} = C_n^{n-r}$

由此可得 $C_n^0 = C_n^{n-0} = C_n^n = 1$

(3) $C_n^m + C_n^{m-1} = C_{n+1}^m$

证：∵ $C_n^m + C_n^{m-1} = \frac{n!}{m!(n-m)!} + \frac{n!}{(m-1)!(n-m+1)!}$

$$= \frac{n![(n-m+1)+m]}{m!(n-m)!(n-m+1)} = \frac{(n+1)!}{m!(n+1-m)} = C_{n+1}^m$$

(4) $\sum_{r=0}^{n} C_n^r = 2^n$

证：∵ $(1+x)^n = \sum_{r=0}^{n} C_n^r x^r$

令 $x=1 \Longrightarrow$： $2^n = \sum_{r=0}^{n} C_n^r$

例5：若北京到上海大小共 n 站，问该线路总共需备不同的车票若干种？又其中有多少种不同票价？

解：对于车票甲→乙与乙→甲是二种不同的车票，故共有车票种类应为：

$$A_n^2 = n(n-1);$$

对于票价而言甲→乙与乙→甲是一个价钱，故是一个组合问题，共有不同票价是

$$C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2!} \text{ 种。}$$

习　题

V 1、设A、B、C是任意三个事件，求下列各事件，并用A、B、C表示：

(1) 仅仅A发生；

(2) A与B都发生，但C不发生；

(3) 所有三个事件都发生；

(4) 至少有一个发生；

(5) 至少有二个发生；

(6) 恰有一个发生；

(7) 恰有二个发生；

(8) 没有一个发生；

(9) 不多于二个发生。

V 2、一个匣子包含有90个好的与10个坏的螺丝钉，今从匣中任取出10个来使用，求没有一个是坏的的概率。

* 3、若把n个球随机的放入n个匣中，试求恰有一个空匣的概率？

V 4、一个容器内含有16个球，其中7个白球；6个黑球；3个红球：

1) 若从中任取一球，该球分别为白球，红球，黑球的概率各是多少？

2) 若从中任取二球，2球全为黑球的概率是多少？如一红一白的概率是多少？

3) 从中任取3球，3球全为红球的概率是多少？全非红球之概率是多少？如一白、一黑，一红的概率是多少？

4) 若从中任取四球，其中一白，三非白的概率是多少？其中二白二非白的概率是多少？