广播师大教材

初等代数

上册

新疆广播师范大学

一九七八年七月

编　者　的　话

这部《初等代数》是作为广播师大和函授的教材而编写的。目的是为中小学新任数学课的教师作为教学参考和进修之用。本书前几章的内容是根据现行中学数学教材的编排顺序编排的，侧重点是基础知识和基本理论。由于广播和函授都是以自学为主，所以力求叙述简明，推理详尽，突出重点难点，以便对教师教学上有所邦助，后几章的侧重点是知识的深度广度。在一元二次方程、二元二次方程组、对数和不等式等章，都增加了内容。又根据新大纲的要求增加了复数、数列、数学归纳法、排列组合、二项式定理等章节。由于编者的水平有限还远远没有达到编写的目的要求。

这部教材是用短短几个月的时间突击完成的。由于教育形势的迅速发展，参加广播学习的广大教师同志急需教材；初稿写成未能进一步加以修改便付印了，所以缺点和不完善的地方一定很多。此外在编排的格式上也有很不合规格的地方。因此要求读者在使用这本教材之前，先根据勘误表将错误更正，并对表上指出的排版不合规格之处予以注意。

对本书中的练习题，另附有答案，供同志们对正。

本书的编写和出版多蒙新大数学系代数教研组的同志们提供意见和教师进修部数学教研组的同志，邦助绘制制版的图形、负责校对、对正习题答案，在此表示衷心地感谢。

对本书的缺点错误希望读者同志批评指正，

刘博特

一九七八年三月

目　　录

第一章　有　理　数

在算术里学过整数和分数的运算。随着生产实践的发展不断提出新的问题，促使数的概念也逐步地扩充。已学过的数不能表示相反意义的量，如：上升，下降；温度的零上零下，产量的增减等。在减法的运算中也有小数不能减大数的矛盾。引入了正负数的概念，不仅能表示量的大小，也能表示量的方向；减法中的矛盾也可得到解决。在这一章里就是要研究扩充了的数的概念和它的运算规律。

I　相反意义的量

自然现象和生产生活实践中有许多意义相反的量，如零度以上的5°C和零度以下的5°C，向东走5里和向西走5里，……。这样的两个数量数字相同而意义相反。为了区分相反意义的量，我们把其中的一个规定为正。而把和它意义相反的规定为负。正的量就用这个数字表示，负的量在数字前加一个“-”号，带有“-”号的数叫**负数**。

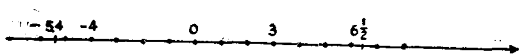
列宁在说明矛盾的普遍性时曾指出正和负是数学中的一对矛盾。正负数和以前的数的区别在于有正负号，因此在学习时要抓住正和负这对主要矛盾。

II 有理数和它的图示法

引进负数之后，数的概念就扩充了。由原来的正整数、

正分数、零扩充到正负整数正负分数和零。正数负数和零统称为**有理数**。

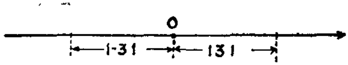
有理数可以直观地用一条直线上的点来表示。在一条成水平方向的直线上确定一个点为零点(或原点)表示数“0”，取定一个长度作为单位长度1，规定从“0”点起向右的方向为正，向左的方向为负，而0是唯一非正非负的中性数，是正数和负数的界限。这个规定了零点、单位和方向的直线称为**数轴**。一切有理数都可用数轴上的一个点来表示。

如 

有了数轴这个图形我们可以很容易地理解以下几个概念和它们的数量关系。

1. 相反数：在原点的两边而和原点距离等远的点所表示的数是互为相反数。如 -1.5，$+1.5$；$-7\frac{1}{2}$，$+7\frac{1}{2}$；各数对之间仅仅是符号不同。

2. 数的绝对值：在实际应用中，对相反意义的量有时只关心它数字的大小，而不管它的正负号，这个抛开正负号的数字叫做数的绝对值。在数轴上它表示数轴上的点到原点的距离。绝对值用记号“| |”表示。数 a 的绝对值记作 $|a|$。



$|-3| = |3|$

我们可以看出：正数和零的绝对值是这数的本身，负数的绝对值是和它相反的数。

也就是 $|a|=a$， $|0|=0$， $|a|=-a$

绝对值是个重要的概念，一个有理数必须具有两个部分，一是它的符号，二是它的绝对值。有理数的四则运算籍着它可以转化为算术里的四则运算。

3.有理数的大小：正数大于零，正数和零都大于负数。从数轴上看，在右边的数都大于左边的数。归结来说：在正数中绝对值大的，数也大。在负数中绝对值大的，数反而小。只有绝对值相等符号相同的数，才能相等。

如$8\frac{1}{2}>5\frac{3}{4}$， $-5<-3$， $-0.01>-0.1$.

练　习

1. 在数轴上标出代表以下各数的点：

2， $-2\frac{1}{2}$， -1， 3， $1\frac{1}{2}$， $-3\frac{1}{2}$.

2. 把下列各数按照从小到大的顺序排列出来：

6，-27，-4，$3\frac{1}{2}$，$-1\frac{3}{4}$，-2，0，

-0.01， -0.015

3. 写出下列各数的相反数：

-3.6，8，0.25，-0.037

4. 0有没有相反数？0有没有绝对值？

5. 绝对值等于5的数有几个？都是什么？

6. $|-a|=a$，这个写法是否一定正确？

Ⅲ 有理数的运算

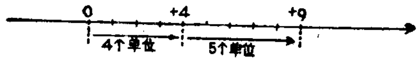
学习有理数四则运算，由于有理数本身带有正负号，所以运算规则就有了新的特点。学习好有理数运算的关键是掌握好符号规则。

1.有理数的加法

正负数的加法可以用数轴上点的移动来表示：

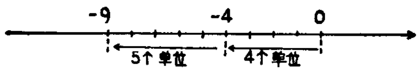
（1）两正数相加：如（+ 4）+（+ 5）.由 0 起先向右移动 4 个单位，再继续向右移动 5 个单位，一共向右移动了 9 个单位。

$\therefore \quad (+4)+(+5)=+9$



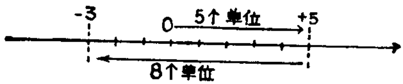
（2）两负数相加：如（－ 4）＋（－ 5）.由 0 起先向左移动 4 个单位，再继续向左移动 5 个单位，一共向左移动了 9 个单位.

$\therefore \quad (-4)+(-5)=-9$



（3）正负不同的数相加：如（+ 5）+（－ 8），由 0 起先向右移动 5 个单位，再向左移 8 个单位，结果点的位置在 0 的左边 3 个单位的地方。

$\therefore (+5)+(-8)=-3$



总结以上各情况，说明了有理数加法法则：

同号两数相加，绝对值相加，符号不变。

异号两数相加，绝对值相减，取绝对值较大数的符号。

特殊情况：两相反数相加，和是0．任何数与0相加，仍得这个数。

2.有理数的减法

减法是加法的逆运算，加和减是运算中的一对矛盾。在一定条件下，它们可以互相转化。减法也可以转化为加法。

如　$8-3=5 \longrightarrow 5+3=8$

求　$(-1)-(+4)=? \longrightarrow (?)+(+4)=-1$

我们知道$(-5)+(+4)=-1$

$\therefore (-1)-(+4)=-5$

但　$(-1)+(-4)=-5$　即$(-1)-(+4)=(-1)+(-4)$

也就是说(-1)减$(+4)$等于(-1)加上$(+4)$的相反数。

又如　$(+5)-(-3)=? \longrightarrow (?)+(-3)=+5$

显然$8+(-3)=+5$

$\therefore (+5)-(-3)=8$

但　$(+5)+(+3)=8$

即　$(+5)-(-3)=(+5)+(+3)$

也就是说$(+5)$减(-3)等于$(+5)$加$(+3)$

由上可见，减可转化为加，转化的条件是把减数变为它的相反数。这个规律可简单的记为：

减负等于加正
减正等于加负　也就是把要减去的数“变号相加”。

在有理数的加减运算中“+”“-”号有着双重意义，既是“加”“减”的运算符号，又是表示正负的性质符号。为了书写方便，我们可以先把减式都变为加，然后把加号省

略并撤去括号。

如　$(-10)-(-3)+(+5)-(+7)$

$=(-10)+(+3)+(+5)+(-7)$

$=-10+3+5-7$

$=-17+8$

$=-9$

这里只有正负数加法运算的算式称为代数和。$-10+3+5-7$ 读为：负10、正3、正5、负7的代数和。

算术里的加法交换律、结合律和括号律对有理数同样适合。*

3.有理数的乘除法

有理数乘除法的关键仍是符号的处理，规则是：

同号两数相乘、除：绝对值相乘、除符号是正。

异号两数相乘、除：绝对值相乘、除，符号是负。

我们可以用一个实际例子，说明这个法则的正确性。

例如：火车以每小时50公里的速度沿东西方向行驶，如果中午正过甲站。要计算距中午两小时的时候火车在何处？

---

* 加法交换律：$a+b=b+a$　　例：$-10+5-7$

$=5-10-7$

加法结合律：$a+(b+c)=(a+b)+c$

例：$(-7+5)-4+8=(5+8)-7-4.$

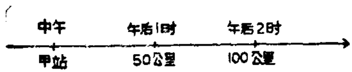
括号律：括号前有“+”号，去括号并去掉前面的“+”号，原括号内各数符号不变。

括号前有“-”号，去括号并去掉前面的“-”号，原括号内各数都变成相反数。

这个问题不能准确的回答，因为火车行驶的方向，时间是午前还是午后都没有说明。我们约定以往东的方向为正，以午后的时间为正，那么就有以下的几种情况：

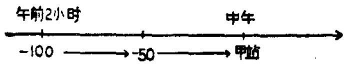
（1）火车向东行驶，在午后两小时则

$(+50)\times(+2)=+100$ 公里　即火车在甲站东100公里。



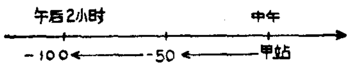
（2）火车向东行驶在午前两小时，则

$(+50)\times(-2)=-100$ 公里　即火车在甲站西100公里，还差100公里达到甲站。



（3）火车向西行驶在午后两小时，则

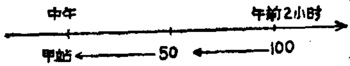
$(-50)\times(+2)=-100$ 公里　即火车在甲站西100公里。



（4）火车向西行驶，在午前两小时，则

$(-50)\times(-2)=100$ 公里　即火车由东往西行，午前两小时在甲站东

还差 100 公里到甲站。



这几种情况验证了乘法的“同号相乘得正，异号相乘得负”的规律。

除法是乘法的逆运算，所以符号规律是一致的。

不难验证乘法的基本运算律对有理数也适合：

例如：乘法交换律：$(-5)\times256\times(-2)$

$=(-2)\times(-5)\times256$

$=2560$

乘法结合律：$[(-15)\times(-8)]\times(-2)$

$=(-8)[(-15)\times(-2)]$

$=(-8)\times30=-240$

乘法分配律：$[(-18)-1.6+9-0.4]\times(-\frac{1}{2})$

$=9+0.8-4.5+0.2=5.5$

问题：一个数用 1 乘，用 -1 乘，用 0 乘各得什么数?

4.有理数四则混合运算

有理数运算顺序的基本规则是：“由高级到低级，先括号内，后括号外”。（注：加减为一级运算，乘除为二级运算，乘方开方为三级运算。）算式只含有乘除运算时从左到右依次进行。

例一：计算$(3\frac{1}{3})^2-(-6\frac{1}{2})\times\frac{4}{13}+(-4)^2\div[(-2)^3+2]$

依照基本规则，先计算乘方，再计算括号内，再计算乘

除，最后计算加减。但在这些步骤互不影响时可同时进行，以使运算简单。

解：原式 $=\frac{100}{9}+2+16\div(-6)$

（乘方）（乘法）（乘方）（乘方括号内）

$=11\frac{1}{9}+2-2\frac{2}{3}$

$=10\frac{10}{9}-\frac{6}{9}$

$=10\frac{4}{9}$

例二：计算 $(-81)\div2\frac{1}{4}\times\frac{4}{9}\div(-16)$

此式只含乘除运算，应按顺序从左到右进行。

解：原式 $=(-81)\div\frac{9}{4}\times\frac{4}{9}\div(-16)$ 此时不能将 $\frac{9}{4}\times\frac{4}{9}$ 约分

$=(-81)\times\frac{4}{9}\times\frac{4}{9}\times\frac{-1}{16}$ 都变为乘的运算再约分。

$=1$　进行这一步运算时，先确定符号是正，然后约分相乘，以免发生忘记符号的错误。

练　习　题

1．把下列二式写成省略加号的代数和。

（1）$(-1.5)+(-2.7)+(+0.5)+(-3.3)$

（2）$(+9)+(+10)+(-2)+(-8)$

2．先去括号，再计算：

（1）$(-\frac{7}{8})-(2\frac{1}{3}+1\frac{1}{8}+4\frac{2}{3})$

（2）$-\frac{1}{8}-[\frac{1}{8}+\frac{1}{4}+(-\frac{1}{2})]$

3. 求下列三式的结果：

（1）$10-\{12-[(-9)+(-1)]\}$

（2）$(-24)\div[(-5)+(-3)]\div(-\frac{3}{7})$

（3）$3\frac{1}{7}\times(3\frac{1}{7}-7\frac{1}{3})\times\frac{7}{22}\div1\frac{1}{21}$

4. 算式　$1-3^2\times2$和$(1-3)^2\times2$以及$(1-3^2)\times2$这几个式子是否相等？若不等，各等于什么数？

5. 下列各式，a在什么情况时才能成立？

（1）$|a|=a$　　（2）$|a|=-a$

（3）$|a|=|-a|$　　（4）$a=-a$

第二章　整　　式

实际问题中的数量关系，常用字母组成的代数式表示，代数式的运算里面整式运算是最常见和最基本的运算。前章研究的有理数运算规律对整式也适用的，但是这章里研究的不是数字，而是字母组成的整式，因而运算的表现形式又有了新的特点。

I　代　数　式

数字的运算只能个别地解决特定问题中的数量关系，而使用字母却能表达和研究数量关系的一般规律。例如：$A=3.14\times5^2$ 只能计算出半径为5的圆的面积，而 $A=\pi R^2$ 可表示任意半径 R 的圆的面积。用字母代表数就把数的运算由特殊上升到一般，这是数学发展的一个大进步。

研究代数式要先弄清楚几个名词的意义。

1. 代数式：含有数字和字母的算式叫做代数式。

如：ab，$3x+2y$，$\frac{a}{5}$，$m-(n+p)$，a^2+b^2，…都是代数式，单独一个字母或一个数如 a，5，$\frac{2}{3}$……等也认作是代数式。

2. 代数式的值：将代数式中的字母换成数字，经计算得的值，叫代数式的值。

如：当 $a=3$　$b=-4$ 时　代数式 $3a+5b$ 的值为

$$3\times3+5\times(-4)=-11.$$

3. 因式和系数：一个代数式是数字与字母的乘积，这个数字和每个字母都是这代数式的因式，其中数字因数叫做字母因式的系数。如 $3a^2b$；3，a^2，b 都是因式，而 3 是 a^2b 的系数。在代数式的字母中，有的表示常量，有的表示变量，如 ax^2，a 表常量，x 表变量，那么 a 也叫 x^2 的系数。

当系数是 1 的时候，常略去不写，如 xy，即是 $1xy$ 的意思。$-xy$ 的系数是 -1。

4. 代数式的运算符号：加减运算符号、括号、等号都和以前相同，乘号"×"或"·"在数字和数字之间必须用到，在字母间可以省掉。例如：$(-5)\times2xy$，$3a\cdot4b$；但是 abx^2y 各字母间就不需用乘的符号。除号在代数式中不常用，一般都用分式表示。

例如　$a\div b$，写成 $\frac{a}{b}$；$(a-b)\div(a+b)$ 写成 $\frac{a-b}{a+b}$.

注意：分数线不仅表示除号，还兼有括号的作用。

例如　$-\frac{a-b}{3}$ 在去分母时必须把分子各项变号，和撤去括号的法则一样。

5. 单项式与多项式：不含加减运算的整式叫**单项式**，几个单项式的代数和叫做**多项式**。

$2a^2$，$-abx^2y$ 都是单项式，$2+3a$，$3x^2-5x+2$ 是多项式。

6. 单项式和多项式的次数：一个单项式中，所有变数字母指数的和叫做单项式的次数，如 $2x^2$，$3xy$，都是二次

的，$-3x^2y^3$ 是5次的。

代数式的分类。

（一）代数式按它所含运算的种类来分：

有理式：只含加、减、乘（包含乘方）和除这几种运算的代数式叫做**有理式**，有理式又分两类：

①整式：不含除法运算，或含有除法运算但除式里不含变数字母的代数式叫做**整式**。

②分式：除式里含有变量字母的代数式叫做**分式**。

无理式：含有开方运算的代数式叫做**无理式**。

（二）按代数式所含的元数和次数来分：

如	$2x+3$	是一元一次式
	$3x-5y$	是二元一次式
	x^2+5x-6	是一元二次式
	x^2+5y^2+x-3y	是二元二次式

还有一种特殊形式，如$3x^3-2x^2y+5xy^2-y^3$这个代数式是二元的，每项的次数都是三次，每个元的次数都按一定顺序排列，这样的代数式我们称它为**二元三次齐次式**。

Ⅱ　整式的运算

整式中字母代表有理数，所以有理数的运算规则一般地都适用于整式。

1．整式的加减

先研究单项式的加减运算。作单项式的加减运算，首先要明确什么是同类项。两个单项式的字母部分完全相同的，叫做**同类项**。只有同类项才可以进行加减合并。

例如：$3x^2$，$\frac{1}{2}x^2$ 是同类项，$\frac{1}{2}x^2y^3$，$-3x^2y^3$ 也是同