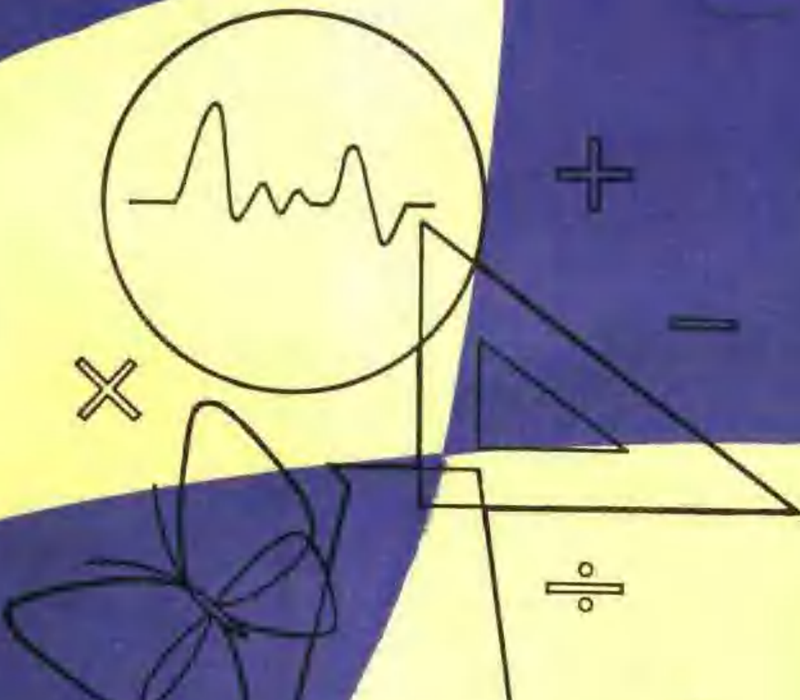
数理化生园地

上海科学技术出版社



4

1983

数理化生园地

1983 年
第 4 辑
(总 4 辑)

上海科学技术出版社出版
(上海市瑞金二路四五〇号)
新华书店上海发行所发行
上海商务印刷厂印刷

统一书号：13119·1156
定　　价：0.20 元

导

在使用数学归纳法时，应特别强调：在利用归纳假设进行归纳推理时，要注意这里的 n 的任意性，也就是说，证明中所用到的 n 的性质必须是与待证命题相应的非负整数的子集中所有元素都具有的性质．否则将容易导致错误的归纳谬误．

〔例 1〕 任意 n 个人都有同样的身高．

证明 对作为人数的正整数 n 归纳．

1° 归纳基础：$n=1$ 时命题显然成立．

2° 归纳过程：设 $n=k$ 时命题成立，欲证任意 $k+1$ 个人都有同样的身高．

将 $k+1$ 个人组成两个组，使每组有 k 个人．当然，至少有一个人同时在两个组内．据归纳假设，两个组内的人各自有相同的高度，但由于有人同时在两个组内，故两组成员之间也有相同的高度，即 $k+1$ 个人具有相同的高度．

证明的错误在哪里呢？错误就在于，证明中使用了一个并非一切正整数都有的性质：用 $k+1$ 个元素组成两个 k 元素的集合时，必有一个元素同时处于这两个集合之中．因为当 $k+1=2$ 时这个性质是不成立的．

〔例 2〕 任意 n 条直线必定重合于同一条直线．

本例可以象例 1 一样给出一个错误的归纳证明，读者不难

[illegible]所在．但这次我们用强数学归纳法

来"证明"这个命题.

证明 对作为直线条数的正整数 n 用强数学归纳法.

1° 归纳基础：$n=1$ 时命题显然成立.

2° 设 $n=1, 2, 3, \cdots, k-1$ 时命题成立，欲证对于 $n=k$ 时命题亦真.

现将 $n=k$ 条直线分为两组，使每组至少有一条直线. 当然两组中的直线条数均小于 k，因而由归纳假设，这两组中的直线分别重合于两条直线. 又据归纳假设：$n=2$ 时命题成立，因此这两条直线又重合于同一条直线. 总之，任意 k 条直线必定重合于同一条直线.

命题由归纳法得证.

这次的毛病又出在哪里呢？请注意，证明过程中我们使用了 $n=2$ 的归纳假设. 但是，前面已经指出，待证的 n 是任意的，当对 $n=2$ 进行证明时，根本就没有 $n=2$ 的归纳假设（只有 $n=1$ 的归纳假设），因此，上述证明对于 $n=2$ 时是无效的，从而也是错误的.

〔例 3〕 对任意非负整数 n，证明 $\frac{n}{2}=\frac{n}{3}$.

证明 对非负整数 n 归纳.

1° 归纳基础：$n=0$ 时，$\frac{0}{2}=0=\frac{0}{3}$.

2° 归纳过程：设 $n=0, 1, 2, \cdots, k-1$ 时上述等式成立，欲证 $n=k$ 时有 $\frac{k}{2}=\frac{k}{3}$.

由于 $\frac{k}{2}=\frac{(k-1)}{2}+\frac{1}{2}$，$\frac{k}{3}=\frac{(k-1)}{3}+\frac{1}{3}$，而由归纳假设 $\frac{(k-1)}{2}=\frac{(k-1)}{3}$，$\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$，因此 $\frac{k}{2}=\frac{k}{3}$.

命题由归纳法证得.

请读者指出上述证明的错误所在.

最后应当指出，有些正确命题的归纳证明过程中也会用到一些对某些特殊值并不成立的 n 的性质. 这时应当如何处理呢？当这种值只有少数的几个时，可以把 n 取这些值时满足待证性质的证明单独作出，作为归纳基础的一部分. 当这种值有很多甚至无限多个时，就应该考虑所用证明方法的合理性，或者对这些情况另行给出证明.

〔例 4〕 证明：对任意非负整数 n，有

$$2.5^n \geqslant n^2.$$

证明 对非负整数 n 归纳.

1° 归纳基础(暂不证).

2° 归纳过程：设 $n=k$ 时，$2.5^k \geqslant k^2$. 欲证 $n=k+1$ 时，有

$$2.5^{k+1} \geqslant (k+1)^2.$$

由于

$$\begin{aligned} 2.5^{k+1} &= 2.5 \times 2.5^k > 2 \times 2.5^k \\ &= 2.5^k + 2.5^k \geqslant k^2 + k^2. \end{aligned}$$

此时，若我们可证 $k^2 \geqslant 2k+1$，则证明便可完成. 但是

$$k^2-(2k+1)=(k^2-2k+1)-2=(k-1)^2-2,$$

它只有在 $k \geqslant 3$ 时才大于 0. 即 $k^2 \geqslant 2k+1$ 只有在 $k \geqslant 3$ 时才成立. 一般地，我们不能无条件地在证明中使用这一性质. 为了使用这一性质，就必须对 $n=0$，$n=1$，$n=2$，$n=3$ 的情况单独给出证明. 也就是说，要在归纳基础中分别证明

$$2.5^0 > 0^2,$$

$$2.5^1 > 1^2,$$

$$2.5^2 > 2^2 \quad \text{和} \quad 2.5^3 > 3^2.$$

但这些都是明显成立的，从而原命题得证.

理解数学归纳法的实质，提高灵活运用的能力(续)

徐继文　(复旦大学附属中学)

要善于变化

上期所讲的两个步骤，是数学归纳法的基本形式．它的本质只是说，数学归纳法既需要递推的基础，又需要递推的依据．至于两个步骤的具体形式，在各种问题中都可以有些变化．同学们在课本中已经认识，第一个步骤不一定是 $n=1$，有时是 $n=a$(a 是 n 的起始值)．大量的情况是第二个步骤的变化．特别要指出的是，当第二个步骤变化时，第一个步骤往往需要作相应的变化．下面举两个例子：

〔例 4〕　求证：对于不小于 2 的自然数，

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+4}+\cdots+\frac{1}{3n}<1.$$

证明　第一个步骤：这里，按题意，n 的起始值是 2．当 n 等于 2 时，

$$左边=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=\frac{11}{12}<1,$$

即 $n=2$ 时不等式成立．

第二个步骤：假定 $n=k$ (其中 k 是不小于 2 的自然数)时不等式成立，即假定：

$$\frac{1}{k}+\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+4}+\cdots+\frac{1}{3k}<1. \tag{1}$$

当 $n=k+1$ 时，不等式变为：

$$\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+3}+\frac{1}{k+5}+\cdots+\frac{1}{3k+3}<1.$$

要从(1)式来推出此式是较困难的．而当 $n=k+2$ 时，原不等式的形式变为：

$$\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+4}+\frac{1}{k+6}+\cdots+\frac{1}{3k+6}<1,$$

它的左边与(1)式左边相近．因此，我们将第二个步骤改为"去证明 $n=k+2$ 时不等式成立"．为此，可在(1)式两边同加 $\frac{1}{3k+2}+\frac{1}{3k+4}+\frac{1}{3k+6}-\frac{1}{k}$，得：

$$\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+4}+\cdots+\frac{1}{3k+6}$$

$$<1+\frac{1}{3k+2}+\frac{1}{3k+4}+\frac{1}{3k+6}-\frac{1}{k}.$$

$$\because\quad \frac{1}{3k+2}+\frac{1}{3k+4}+\frac{1}{3k+6}-\frac{1}{k}$$

$$<\frac{3}{3k+2}-\frac{1}{k}=\frac{-2}{k(3k+2)}<0,$$

$$\therefore\quad \frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+4}+\cdots+\frac{1}{3k+6}<1.$$

这就证明了"如果 $n=k$ (k 是不小于 2 的自然数) 时，不等式成立，则 $n=k+2$ 时不等式也成立．"这里需要注意的是：刚才在第一个步骤中，我们就 $n=2$ 验证了不等式．据此就可推出 $n=4$, $n=6$, …, 以至 n 等于任何偶数时不等式都成立．但是却推不出 n 为奇数时不等式也成立．因此，对步骤 1 也必须相应地作些变化．即除了证明 $n=2$ 时不等式成立外，还应再证明 $n=3$ 时不等式也成立（这是不难做到的）．这样，从 $n=3$ 开始，就可以推出 $n=5$, $n=7$, …, 以至 n 等于不小于 3 的任何奇数时

不等式都成立．从而命题得证．

将本例在运用数学归纳法时所作的变化再一般化些，即：

1．验证 $n=1, 2, 3, \cdots, l$ 时命题为真；

2．假定 $n=k$ 时命题为真，去证明 $n=k+l$ 时命题也真．

〔例 5〕 求证：对于任意自然数 n，$(3+\sqrt{5})^n+(3-\sqrt{5})^n$ 能被 2^n 整除．

证明 1° 当 $n=1$ 时，$(3+\sqrt{5})+(3-\sqrt{5})=6$ 能被 2 整除，即 $n=1$ 时命题为真．

2° 假设 $n=k$ 时命题为真，即假设 $(3+\sqrt{5})^k+(3-\sqrt{5})^k$ 能被 2^k 整除．

当 $n=k+1$ 时，原式变为：$(3+\sqrt{5})^{k+1}+(3-\sqrt{5})^{k+1}$．为了能运用归纳假设，可作以下变形：

$$
\begin{aligned}
&(3+\sqrt{5})^{k+1}+(3-\sqrt{5})^{k+1}\\
&=[(3+\sqrt{5})^k+(3-\sqrt{5})^k][(3+\sqrt{5})+(3-\sqrt{5})]\\
&\quad-(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})^k-(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})^k\\
&=6[(3+\sqrt{5})^k+(3-\sqrt{5})^k]\\
&\quad-(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})[(3+\sqrt{5})^{k-1}+(3-\sqrt{5})^{k-1}].
\end{aligned}
\tag{2}
$$

由归纳假设，$(3+\sqrt{5})^k+(3-\sqrt{5})^k$ 能被 2^k 整除，所以 $6[(3+\sqrt{5})^k+(3-\sqrt{5})^k]$ 能被 2^{k+1} 整除．

如果 $(3+\sqrt{5})^{k-1}+(3-\sqrt{5})^{k-1}$ 能被 2^{k-1} 整除，则 $4[(3+\sqrt{5})^{k-1}+(3-\sqrt{5})^{k-1}]$ 就能被 2^{k+1} 整除，从而就能证明 $n=k+1$ 时命题也真．

由此想到：如果我们把第二个步骤改为："假设 $n\leqslant k$ 时命题成立，则 $n=k+1$ 时命题也成立．"问题就可以迎刃而解了．

但是，从(2)式看出，为了真正能从 $n\leqslant k$ 命题成立推出 $n=k+1$ 命题成立，我们至少需要 $n=k$，$n=k-1$ 时命题成立，即

$k\geqslant 2$. 这样一来，$k=1$ 时的情况就未被包含在上述第二个步骤中，因为我们虽然验证了 $n=1$，但并没有(题目也不允许)验证 $n=0$. 也就是说，我们只是在 $k\geqslant 2$ 的情况下证明了第二步骤. $k=1$ 即 $n=2$ 实际上也是属于第一步骤中应该加以验证的. 而在第二步骤中则应加入"k 是$\geqslant 2$ 的自然数". 当然，在有些题目中，如果能够证明"当 k 是任意自然数时从 $n\leqslant k$ 可过渡到 $n=k+1$"，那么 $n=2$ 就是不需验证的了.

以上两例是数学归纳法常见的变化，除此以外，还可以有其他形式的变化，限于篇幅，这里从略.

练习题

1. 已知 $a>0$，求证：对于任意的自然数 n，

$$a^n+a^{n-2}+\cdots+a^{-(n-2)}+a^{-n}\geqslant n+1.$$

2. 求证：对于不小于 3 的任意自然数 n，

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n+3}+\frac{1}{n+6}+\cdots+\frac{1}{4n}<\frac{3}{4}.$$

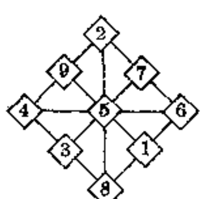
3. 数列 $\{a_n\}$ 中，已知 $a_1=3$，$a_2=5$，且

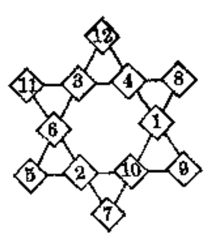
$$a_{k+1}=3a_k-2a_{k-1},\quad (k>1)$$

求证：$a_n=2^n+1$，其中 n 是自然数.

4. 求证：对于任意的自然数 n，方程 $2x+y=n$ 有 $\dfrac{2n-3+(-1)^{n+1}}{4}$ 组正整数解.

上辑"巧填空格"答案





二次方程的根与系数的关系

章淳立 （上海市育才中学）

我们知道，如果一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$（其中 $a\neq 0$）的两个根是 x_1、x_2，那么这两个根 x_1、x_2 与方程系数 a、b、c 之间有如下关系

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a},\qquad x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}.$$

据此，即可解决如下两类问题：

1. 直接由方程的系数出发，不必通过解方程，讨论根的一些性质．例如，讨论实根的符号，求两根的一个对称式的值，等等．

〔例 1〕 设 x_1、x_2 是方程 $2x^2-5x+1=0$ 的两个根，不解方程，求下列各式的值：

(1) $x_1^3+x_2^3$；　　　(2) $\dfrac{x_1^2}{x_2}+\dfrac{x_2^2}{x_1}$.

解 由一元二次方程的根与系数关系，得：

$$x_1+x_2=\frac{5}{2},\qquad x_1\cdot x_2=\frac{1}{2}.$$

(1)
$$\begin{aligned}x_1^3+x_2^3&=(x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2)\\&=\left(\frac{5}{2}\right)^3-3\times\frac{1}{2}\times\frac{5}{2}=11\frac{7}{8};\end{aligned}$$

(2)
$$\frac{x_1^2}{x_2}+\frac{x_2^2}{x_1}=\frac{x_1^3+x_2^3}{x_1x_2}=\frac{95}{8}\div\frac{1}{2}=23\frac{3}{4}.$$

更一般地，对于所求两根的一个对称式，总设法化成可用

x_1+x_2 和 x_1x_2 来表示的形式，问题从而得解.

〔例 2〕 已知一直角三角形的两直角边长分别为 a 和 b，斜边的长为 c，求作以这一三角形的内切圆半径 r 和斜边上的旁切圆半径 t 为两根的一元二次方程.

解 根据一元二次方程的根与系数关系，只须确定 $r+t$ 和 $r\cdot t$ 的值，这一方程便可作成了. 利用切线长定理，可得

$$r=\frac{a+b-c}{2},\quad t=\frac{a+b+c}{2}.$$

从而 $t+r=a+b$、$t\cdot r=\frac{(a+b)^2-c^2}{4}=\frac{ab}{2}$. 于是，以 r 和 t 为两根的一元二次方程即是 $x^2-(a+b)x+\frac{ab}{2}=0$，即

$$2x^2-2(a+b)x+ab=0.$$

当然，还可把上两类问题结合起来. 例如，先由一已知方程的系数出发，计算两根的一些对称式的值，再据此构作新的方程.

〔例 3〕 已知方程 $2x^2-3x+1=0$，不解这个方程，求作一个一元二次方程，使它的根是原方程各根的倒数.

解 对于一元二次方程 $2x^2-3x+1=0$，设其两根分别为 x_1、x_2，则有 $x_1+x_2=\frac{3}{2}$，$x_1\cdot x_2=\frac{1}{2}$. 从而

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=\frac{3}{2}\div\frac{1}{2}=3,$$

$$\frac{1}{x_1}\cdot\frac{1}{x_2}=\frac{1}{x_1x_2}=1\div\frac{1}{2}=2.$$

于是，以 $\frac{1}{x_1}$、$\frac{1}{x_2}$ 为两根的一元二次方程即是 $x^2-3x+2=0$.

此外，在实数范围内讨论一元二次方程的根与系数关系以及方程的实根的话，还应注意方程的判别式应满足的条件.

〔例 4〕 当 θ 为何值时$\left(这里限于 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$，方程

$$x^2-(1+\sin\theta)x+\frac{3+2\sqrt{2}}{8}=0$$

的两实根的和为最小.

解 要使原方程有两实根，其判别式应不小于零，即

$$[-(1+\sin\theta)]^2-4\times1\times\frac{3+2\sqrt{2}}{8}\geqslant0.$$

从上式中可解得 $\sin\theta\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$.

设原方程的两根为 x_1、x_2，根据一元二次方程的根与系数关系，有 $x_1+x_2=1+\sin\theta$. 从而得

$$x_1+x_2\geqslant1+\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

所以，当 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 时，原方程的两实根的和为最小，最小值为

$$(x_1+x_2)_{\min}=1+\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

〔例 5〕 当 m 为何实数时，方程 $x^2+(m+2)x+(m+5)=0$ 的两根满足：(1) 都是正根；(2) 只有一个正根.

解 已知方程是实系数一元二次方程，这里所谈的"正根"，当然都是指实数根. 于是，这里 m 应首先满足 $\Delta\geqslant0$，即 $(m+2)^2-4(m+5)\geqslant0$. 从上式可解得

$$m\leqslant-4,\ 或\quad m\geqslant4. \tag{A}$$

(1) 如要使两根 x_1、x_2 都是正根，相当于 $x_1+x_2>0$、$x_1\cdot x_2>0$. 由一元二次方程的根与系数关系，得

$$\begin{cases}x_1+x_2=-(m+2)>0,\\ x_1\cdot x_2=(m+5)>0.\end{cases}$$

解上述不等式组，得

$$-5<m<-2. \tag{B}$$

令 m 必须同时满足(A)、(B)两条件，从而 $-5<m\leqslant-4$.

(2) 如要使 $x_1>0$，而 x_2 或等于 0，或小于 0，则分别讨论如下：

若 $x_2=0$，则由 $x_1\cdot x_2=m+5=0$ 得

$$m=-5. \tag{C}$$

若 $x_2<0$，则由 $x_1\cdot x_2=m+5<0$ 得

$$m<-5. \tag{D}$$

令 m 必须同时满足(A)、(C)、(D)三条件，从而 $m\leqslant-5$.

用幂函数单调性比较幂的大小

曹振焕 （上海市第六十一中学）

我们知道，幂函数 x^α 在 $(0, +\infty)$ 内是单调函数，当 $\alpha>0$ 时，函数 $y=x^\alpha$ 单调递增；当 $\alpha<0$ 时，函数 $y=x^\alpha$ 单调递减. 据此，常可用以比较幂的大小.

例如，比较 $\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}$ 与 $\left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{1}{2}}$ 的大小. 注意到这两个幂的指数相同，都等于 $-\frac{1}{2}$，而底数不同，这就可以把这两个幂分别看成是幂函数 $f(x)=x^{-\frac{1}{2}}$ 当 $x_1=\frac{1}{2}$ 和 $x_2=\frac{1}{3}$ 时的函数值. 利用幂函数 $y=f(x)=x^{-\frac{1}{2}}$ 在 $(0, +\infty)$ 上的单调递减的性质，由 $x_1>x_2$，所以 $f(x_1)<f(x_2)$，即有 $\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}<\left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{1}{2}}$.

有时，在运用这一方法时还有些技巧.特别是对比底数不同，指数也不同的两个幂的大小的情形，常用的有如下两种方法：

一、通过一些变形

例如，比较 3^{200} 与 2^{300} 的大小．这两个幂的底数不相同，指数也不相同，但两个整数幂指数有最大公因数 100，于是通过变形可望转化成指数相等的情形．即 $3^{200}=(3^2)^{100}=9^{100}$，$2^{300}=(2^3)^{100}=8^{100}$．这时，只要利用幂函数 $y=x^{100}$ 在 $(0,+\infty)$ 上的单调递增性，由于 $9>8$，所以 $9^{100}>8^{100}$，即 $3^{200}>2^{300}$．

二、寻找过渡的幂

这里，要利用不等量的一条公理：第一量大于第二量，第二量大于第三量，则第一量大于第三量．还要利用幂函数、指数函数的单调性．

例如，比较 $\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}$ 与 $\left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{1}{3}}$ 的大小．这两个幂的底数不相同，指数也不相同．显然通过变形可望转化为指数相等的情形．即 $\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}=\left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{1}{6}}$，$\left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{1}{3}}=\left(\frac{1}{9}\right)^{-\frac{1}{6}}$，利用幂函数 $y=x^{-\frac{1}{6}}$ 的单调递减性，可得 $\left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{1}{6}}<\left(\frac{1}{9}\right)^{-\frac{1}{6}}$，即得 $\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}<\left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{1}{3}}$．

另外，也可引进一个过渡的幂，例如取 $\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{3}}$．于是，根据指数函数 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x}$ 的单调递减性，可有 $\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}<\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{3}}$；又，根据幂函数 $y=x^{-\frac{1}{3}}$ 的单调递减性，可有 $\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{3}}<\left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{1}{3}}$，即 $\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}<\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{3}}<\left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{1}{3}}$．

运动的相对性

周碧琦　（上海市真如中学）

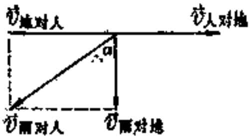
我们学过参照物以后，就明白了物体的运动和静止不是绝对的，是相对于一定的参照物而言的，对于不同的参照物，同一物体的运动可以不相同，这个现象就叫运动的相对性。

有时，我们会听到、见到一些有关运动或静止的非常有趣和奇特的事，要是用运动的相对性去认识和解释它们，就会发现，它们包含的道理却是很简单的。第一次世界大战时，有一个飞行员在飞行中，看见窗外有一个黑糊糊的东西总跟在旁边，就伸手去抓了过来，一看，竟然是一颗在天空中飞行的子弹。飞行的子弹怎么能被手抓住呢？原来，这子弹相对于地面是以和飞机差不多的速度在运动，而以飞机为参照物，子弹就几乎是静止不动的东西。要抓住一个静止的东西还不容易吗？象这样的静止我们称它为相对静止。

运动的子弹可以看成静止，与此相反，静止的物体也可以看成运动。譬如工程师要设计、制造新飞机，先造个飞机模型，把它放在一种叫"风洞"的装置中，用鼓风机将空气以很大的速度对着模型吹。这时，虽然模型没有飞起来，但以空气作参照物研究飞机运动，就和飞机以同样大小速度真的在飞行是一样的。工程师将各种仪器放在模型飞机上进行测试，就可以获得和真飞机试飞相同的实验数据。象这样的运动，我们称它为相对运动。

两个物体作相对运动时，甲对乙的运动速度（即以乙为参照物甲的运动速度）和甲感觉到乙的运动速度（即以甲为参照物乙的运动速度）是正好大小相等、方向相反的．也就是：$v_{甲对乙}=-v_{乙对甲}$．在“风洞”试验中，飞机相对于空气的速度和空气相对于飞机的速度是大小相等、方向相反的．平时我们说太阳从东方升起，西方落下，是地球上的人以地球作参照物观察太阳的运动，如果以太阳作参照物观察地球的运动，那就恰好相反，从这一点可以证明地球自转的方向是由西向东转的．

那么，如果甲、乙两个物体都相对于地球运动，怎样研究它们之间的相对运动呢？这时，我们可以用下面的式子进行计算：$v_{甲对乙}=v_{甲对地}+v_{地对乙}$．式中 $v_{地对乙}=-v_{乙对地}$，并且还要注意，上面的计算要按矢量加法进行．举一个例子来看，在无风的情况下，一个人骑车以 4 米/秒的速度（$v_{人对地}$）自西向东行驶，雨滴以 3 米/秒的速度（$v_{雨对地}$）落下，这时雨滴将怎样打落在人的身上呢？



分析题意，不难看出要求雨滴对于人的相对速度即 $v_{雨对人}$，按下面的计算式：

$$\begin{aligned} v_{雨对人} &= v_{雨对地}+v_{地对人} \\ &= v_{雨对地}+(-v_{人对地}) \end{aligned}$$

画出矢量图（如图）．根据矢量图就可以求出 $v_{雨对人}$．

$v_{雨对人}$ 的大小：

$$\begin{aligned} |v_{雨对人}| &= \sqrt{v_{雨对地}^2+v_{地对人}^2} \\ &= \sqrt{3^2+4^2}=5 \text{ 米/秒}; \end{aligned}$$

$v_{雨对人}$ 的方向是竖直向下偏西，偏向西的角度 α 可以从 $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{|v_{地对人}|}{|v_{雨对地}|}=\dfrac{4}{3}$ 求得，$\alpha=53°$．

简单电路的结构分析

汪昭义 （徽州师范专科学校）

电路结构分析，通常是根据电流的分支和汇合情况来判断各元件的串、并联关系．欲迅速准确地作出判断，可采用以下两种方法：（一）通路电流到底法；（二）节点电势跨接法．现分别简介如下：

（一）

所谓通路到底，是指电流在外电路上，从最高电势点（如电源正极）流出，在不重复经过同一元件的原则下，一竿子到底流达最低电势点（如电源负极）为止，看其中有几条路可走通，则有几条独立通路．一条独立通路，简单的可以只是几个电阻元件串联而成，在此支路中电流强度到处相同；而较复杂的可以是经过几段不同的支路上元件构成，在此通路中电流强度并不相同．

例如图1(1)所示电路中，从A点一竿子流到B点，在不重复流过同一电阻的原则下，既可以有两条独立通路的选择方案，如图1(2)所示；也可以只有一条独立通路的选择方案，如图1(3)所示．前者R_1为第一条独立通路，恰好是含有一个元件的支路；而R_4、(C)、R_3是第二条独立通路，含有两个处在两条不同支路中的元件．显然，R_4段的电流强度大于R_3段的电流强度．因而，再把剩余电阻R_2添补在B、C两点之间，它即与R_3并联了．后一选择方案中，R_1、R_2、(C)、R_3是唯一的独立通路，再处理剩余电阻R_4和剩下一根既不包含电阻又与剩余电