

专题技术译丛

加劲圆筒壳轴压稳定性

长沙工学院资料室

内 容 简 介

近代的宇航结构承受越来越大的轴向载荷，普遍采用加劲结构。几十年来，各国对加劲圆筒壳轴压稳定问题作了大量研究。我们结合科研任务，翻译了部分文献资料。现选出七篇，汇编成册。主要介绍了正交异性壳轴压稳定的线性理论和实验结果。对于壳体试件的制作及实验技术也有所说明。可供从事航空、导弹结构强度设计人员参考，也可供高等工业院校有关专业师生教学参考。由于我们水平有限，不当之处在所难免。欢迎批评指正。

目 录

壳体屈曲研究的某些近代进展·····	(1)
附：关于“壳体屈曲研究的某些近代进展”评论 作者给 L.J.Hart-Smith 的回答	
正交异性壳体的弹性稳定性·····	(17)
偏心加劲正交异性圆筒之屈曲·····	(33)
正交各向异性圆筒承受轴压时的稳定性分析·····	(53)
关于具有纵向桁条偏心加劲圆筒壳的压缩试验的初步结果·····	(75)
关于桁条加劲圆筒壳屈曲的近代实验研究·····	(87)
离散桁条加劲圆筒壳的稳定性·····	(120)

壳体屈曲研究的某些近代进展

M.Stein

提 要 本篇概述了包括对初缺陷敏感受力壳体的屈曲问题。这方面的结果表明,实验和理论的改进导致了前所未有的一致性。文章还证明:对边界条件作出正确的(和协调一致的)理论规定很有必要。并考查了加劲筒壳的一些最新成果,由此揭示:内外加劲,轴向偏心加载,和经向曲率的微量增加等,对屈曲强度都有着巨大的影响。

符 号 规 定

- a 球壳底面半径(图2)
 d 肋条沿壳体中面的间距
 p 压力
 s 敏感角, $s = 4\theta/\pi$, $-3 \leq s < 1$
 t 壳体厚度
 $\bar{i}$ 沿壳体中面每单位周长的横截面积
 u, v, w 依次在 x, y 和径向的位移
 x, y 经向(子午线)和周向
 D 板的刚度, $Et^3/12(1-\mu^2)$
 E 材料的杨氏模量
 H 经向(子午线)的升高
 L 壳体轴向长度
 N_x, N_y, N_{xy} 内力
 P 作用的轴向压力
 R 在壳体中面处的圆筒壳半径或球壳的半径
 Z 曲率参数
 θ 屈曲初期载荷一位移特征曲线的倾斜角
 μ 波桑比
 τ 作用的剪应力
 $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ 应变
 $\Delta^4 = (\partial^4/\partial x^4) + 2(\partial^4/\partial x^2\partial y^2) + (\partial^4/\partial y^4)$

下标:

A 屈曲前值

B 屈曲值

cl 由普通理论给出的值

cr 在屈曲时的值

$,x, ,y$ 主要符号对于 x 和 y 的偏微分

$()'$ 对 x 的微分

$(-)$ 固定的作用值 (仅是位移或力)

序 言

差不多在每一个宇航工具的结构里都有加劲的和未加劲的壳体。屈曲常常是这些壳体设计中的首要考虑。近几年来,在壳体屈曲的知识方面有了较大的进展。进展的来由主要是结合精确实验制造了接近完美无缺的试件以及结合较完整的理论引用了现代的计算机。本文的目的是识别最重要的近代进展,评述它们和它们对改善设计的贡献。

最近 Hoff¹ 写了篇关于壳体结构的调查报告。Budiansky 和 Hutchinson² 写了一篇壳体屈曲问题摘要,涉及到对缺陷的敏感性。文献 1 提供了应用薄壳的历史,还讨论了在壳体结构中分析和设计之间的相互影响以及今后的趋向。本文集中报导了近代努力的两个方面,这些在文献 1 和 2 中没有详细考虑过。首先,讨论了包括壳体屈曲前非线性特性的改进了的理论。其次,指出了包含近乎理想壳体试体的近代实验的重要性。用这些理论和实验结果的启示来鉴别若干课题。作者相信,它们是在壳体屈曲研究方面的一些最重要的近代进展。这些课题是相互关连的,这里作为二大类现象来讨论:1) 缺陷敏感;2) 边界条件和非对称壳壁几何。这二类课题对于壳体屈曲性能的予测性都有重要的影响。

各向同性薄壁圆筒确切的屈曲方程式的推导

壳体屈曲理论的许多近代改进都可以联系到引用一组协调一致的包括非线性屈曲前特性的方程式。为了说明“非线性壳体屈曲前特性”的意义以及它如何影响屈曲方程式的形式,给出了现在的推导。为简单起见,选择了一种各向同性的薄壁圆筒壳,但是它的特性也足以说明更加普遍的情形。在大挠度 Donnell 理论中,圆筒的基本平衡微分方程式是

$$\begin{aligned} N_{x,x} + N_{xy,y} &= 0 & N_{y,y} + N_{xy,x} &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$
$$D \nabla^4 w + (N_y/R) - (N_x w_{,xx} + N_y w_{,yy} + 2N_{xy} w_{,xy}) = p$$

方程式 (1) 分别表示力在轴向,周向和径向的总和。按照虎克定律,

$$\begin{aligned} N_x &= [Et/(1-\mu^2)](\epsilon_x + \mu\epsilon_y) \\ N_y &= [Et/(1-\mu^2)](\epsilon_y + \mu\epsilon_x) \\ N_{xy} &= [Et/2(1+\mu)]\gamma_{xy} \end{aligned} \quad (2)$$

非线性应变一位移关系式是

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= u_{,x} + \frac{1}{2} w_{,x}^2 & \varepsilon_y &= v_{,y} + (w/R) + \frac{1}{2} w_{,y}^2 \\ \gamma_{xy} &= u_{,y} + v_{,x} + w_{,x} w_{,y}\end{aligned}\quad (3)$$

方程式 (1-3) 提供了一组由九个未知内力, 应变和位移所组成的九个完全方程式。它们与边界条件一起, 确定了问题。

对于载荷是轴对称的问题, 例如一个圆筒受到压力, 扭转或承受轴向压缩 (不管载荷是通过壳壁中面或偏心加载), 屈曲前的变形总是轴对称的。如果要求屈曲前的变形是轴对称的, 即它们仅是 x 的函数, 它们的关系式可以直接从方程式 (1-3) 得到:

$$\begin{aligned}N_{xA}' &= 0 & N_{xyA}' &= 0 \\ Dw_A'''' + (N_{yA}/R) - N_{xA}w_A'' &= p \\ N_{xA} &= [Et/(1-\mu^2)](\varepsilon_{xA} + \mu\varepsilon_{yA}) \\ N_{yA} &= [Et/(1-\mu^2)](\varepsilon_{yA} + \mu\varepsilon_{xA}) \\ N_{xyA} &= [Et/2(1+\mu)]\gamma_{xyA}\end{aligned}\quad (4)$$

$$\varepsilon_{xA} = u_A' + \frac{1}{2} w_A'^2 \quad \varepsilon_{yA} = w_A/R \quad \gamma_{xyA} = v_A'$$

下标 A 表示屈曲前的值, 字母右上角的一撇 ($'$) 表示对 x 的微分。

将屈曲时发生的无限小的变化加到屈曲前的内力、应变和位移上:

$$\begin{aligned}u &= u_A(x) + u_B(x, y) \\ &\dots \\ \varepsilon_x &= \varepsilon_{xA}(x) + \varepsilon_{xB}(x, y) \\ &\dots \\ N_x &= N_{xA}(x) + N_{xB}(x, y) \\ &\dots\end{aligned}\quad (5)$$

下标 B 表示在屈曲时发生的变化, 就像写出的那样, 这些屈曲变形可以非轴对称。于是, 由于考虑在屈曲时所产生的变化是无限小的, 屈曲或表示为一个极值, 或表示为载荷一位移特征图上的分叉点。把方程式 (5) 代进方程式 (1-3), 减去涉及下标 A 的变形的恒等式 (4), 然后略去关于无限小的下标 B 变形的非线性各项, 就可以得到 (如下的) 屈曲方程式:

$$\begin{aligned}N_{xB,x} + N_{xyB,y} &= 0 & N_{yB,y} + N_{xyB,x} &= 0 \\ D\nabla^4 w_B + (N_{yB}/R) - (N_{xA}w_{B,xx} + N_{xB}w_A'' + N_{yA}w_{B,yy} + 2N_{xyA}w_{B,xy}) &= 0 \\ N_{xB} &= [Et/(1-\mu^2)](\varepsilon_{xB} + \mu\varepsilon_{yB}) \\ N_{yB} &= [Et/(1-\mu^2)](\varepsilon_{yB} + \mu\varepsilon_{xB}) \\ N_{xyB} &= [Et/2(1+\mu)]\gamma_{xyB} \\ \varepsilon_{xB} &= u_{B,x} + w_A' w_{B,x} \\ \varepsilon_{yB} &= v_{B,y} + (w_B/R) \\ \gamma_{xyB} &= u_{B,y} + v_{B,x} + w_A' w_{B,y}\end{aligned}\quad (6)$$

方程式对下标 B 的变形是齐次的。规定在屈曲时作用载荷 (或作用位移) 不改变, 导致齐次的边界条件。这就为一个本征值问题给出了所需要的齐次系统; 屈曲载荷 (或

作用位移)就是本征值。

为了解题首先需要从方程式(4)解出屈曲前的位移和内力。方程式(4)有些非线性项:在第三平衡方程式中的 $N_{\alpha\alpha}w''$ 和在定义 $\epsilon_{\alpha\alpha}$ 应变中的 $\frac{1}{2}w''^2$ 。这个屈曲前解的边界条件可以与屈曲解的边界条件相一致。在本评论中,基于这种屈曲前状态的分析将称为“确切的”。然而,大多数屈曲分析是以下列假设为基础的:认为线性薄膜理论适用于屈曲前范围,或者与此相当,认为屈曲前 w_A 等一常量。对于圆筒壳,随便那个假设都略去了式(4)的第三平衡式中的 Dw'''' 和一些非线性项。由于这些假设,所有 w_A 项都从方程式(6)中消失。在本文中,以这一类假设为基础的解将被称为“普通的”。可以提出一种解乎二者之间的假设,即屈曲前的变形和应力可以由线性弯曲理论给出。虽然这条途径有优点,在本调查报告中将不再加以考虑,因为可以引用的结果还很少。

对缺陷敏感的各向同性薄壳的实验和理论

对于某些壳体结构和载荷组合,诸如圆筒在轴压下和球或环段在外压下,实验对许多名义尺寸相同的壳体,得到的屈曲载荷差异极大。通常实验屈曲载荷都要比理论值低很多。许多年来,人们曾经推测:这些差异可能主要归咎于壳体几何中很小的初缺陷。另一方面,进行了切实可靠的研究来建立以考虑屈曲前后的能量为基础的经验屈曲准则。在本节中对显著澄清了这种情况的近代研究进行了阐述。

轴压下的圆筒

在所有壳体稳定实验中,轴压下未加劲圆筒壳的实验结果显示出最反常的性质。一般地说,实验屈曲载荷比根据“普通理论”得到的经典载荷相当于 $0.6Et/R$ 的平均应力要低许多。图1概括地表示了有关圆筒壳在轴压下的现有实验和理论结果。

实验

1961年以前,各种半径一厚度比的实验屈曲载荷都落在阴影区内。一些近代的实验结果由各种记号表示在图1中。这些近代实验十分仔细地制造了近乎理想的壳体试件,使初缺陷的影响减少到最低程度。本文中提供的实验结果仅仅是从实验人员在试验前选定为“精良的”或近乎理想的那些试件上测得的。

Tennyson^{3,4}描述了五个直径从8到10吋的精确制成的圆筒壳的构造和轴压下的试验。在图1中用小圆圈表示了它的四个近乎理想壳体的结果。这些壳体是从光弹性塑料中($E=3.7 \times 10^5$ 磅/平方吋)旋转浇铸出来的。它的端部嵌在熟石膏中,从而做到了均匀受载。每一个弹性屈曲的圆筒,测定的结果都是可重复的。屈曲载荷与壳体厚度的百分比变化成反比。从一些近乎理想的试件上,重复得到十分接近于理论值的实验结果。

Horton和Durham⁵用电模法制造了三个镍圆筒壳($E=24 \times 10^6$ 磅/平方吋)。0.004吋厚的薄镍层电镀在一个铝的圆形心轴(表面)上。通过对铝形心轴的急剧冷却使涂层脱出,留下了8吋长的直径为2.906吋的壳体。用另一个圆形心轴放在筒内。在筒壁和心轴之间保留0.004吋的空隙,使试验时保持弹性的屈曲变形。圆筒的两端用环氧树脂结合到端极上。试验结果(略去一个质量低的壳体)用小三角表示在图1中。这些试验与

其他试验一起,表明载荷以及壳体上发生屈曲的位置是几何缺陷的函数,而任意分布在筒上的缺陷则是使测定的结果显著分散的主要原因。

Almroth, Holmes 和 Brush⁶ 用电模法在一个铝的圆形心轴上制造了一些镍的圆筒壳。有九个名义上相同的圆筒壳(0.0055 吋厚, 10 吋长, 直径为 5.95 吋)的屈曲载荷可供引用。其中只有一组试验被标明为“优异”, 相应的屈曲载荷用小方形表示在图 1 中。试验时, 在壳内放进一个钢的圆形心轴, 两端用陶 112 材料嵌进端极槽中。

Bačcock 和 Sechler⁷ 把铜 ($E=13 \times 10^6$ 磅/平方吋) 的圆筒壳镀在一个精确加工过的蜡的圆形心轴上, 然后从壳体中融化出圆形心轴。这些圆筒的直径是 8 吋, 10 吋长, 0.0045 吋厚。筒的两端用一种低熔点的合金浇铸固定: 一端接牢在一个端环的槽中; 另一端则连接到一个载荷测量筒上。再把端环胶结在试验机的端极上。对那些基本上是理想圆筒的试验结果, 用菱形记号表示, (在图 1 上)。他们同样发现, 任何对初平直的微小偏离立即降低屈曲应力, 而且这种影响, 对内向位移比外向位移更大。

把初始的不规则性仔细地降低到最小程度, 就得到十分高的屈曲载荷。这一事实, 证实了(几何)不规则性是降低临界载荷的主要原因。人们还发现, 试验一些很精緻的壳体时, 一点干扰, 比如吹一阵风, 就能够显著地降低实验的屈曲载荷。

理 论

圆筒壳在轴压下屈曲的理论进展, 同样也是沿着改进理论和实验间的一致性的方向。这些进展, 体现在: 为屈曲前的位移和应力而引用非线性弯曲理论以及引用屈曲前后连贯一致的边界条件。在图 1 上用水平线表示的结果是针对简支和固持边界条件, 连同面内边界位移 $u=\bar{u}$, $v=0$ 而确定的(有关这些或其他边界条件的结果, 参看文献(8-11))。可以认为, 这些边界条件概括了所示试验结果的那些边界条件。从图 1 可以看到, 理想圆筒的确切理论和接近理想的壳体的近代实验之间, 在半径-厚度比值小于 300 左右时, 几乎完全一致; 而在 300 以上, 一致性还是相当好。因此, 以往经典理论和实验间宽广的鸿沟已经由于较好的实验和理论的结合而大大地变窄了。

外压下的浅球壳

就像轴压下的圆筒那样, 浅球壳在外压下的早期实验给出了不规律的结果, 与理论不相一致。这里把现有的理论和实验结果作为拱高参数 ($a/\sqrt{Rt}$) 的函数综合表示在图 2 中。

实 验

1961 年前, 已有的实验屈曲载荷画在阴影区域内。近代的结果^{12, 13}, 就像记号所表示的那样, 提供了比以前高得多的屈曲载荷。

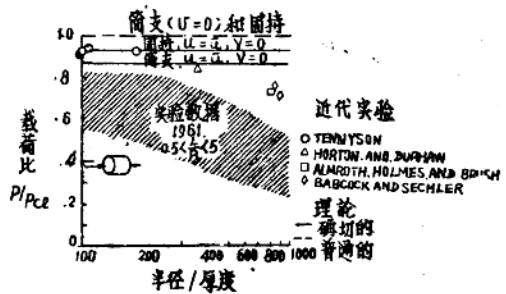


图 1. 圆筒壳体在轴压作用下实验和理论屈曲载荷的比较

在图2中,用小圆表示的结果是 Krenzke 和 Kiernan¹² 从 7075-T6 铝棒料 ($E=10.8 \times 10^6$ 磅/平方吋) 精确制造出来的壳体得到的。曲率半径是 2 或 3 吋,各种壁厚在 0.01 和 0.04 吋之间。各种弦半径在 0.4 和 1 吋之间。通过对棒材的加工,壳体两端由 $\frac{1}{2}$ 吋厚的环形板整体地支承着。与以前的试验不一样,这些结果遵循一定的式样,很像确切理论所表明的那样。

Parmeter¹³ 得到由三角记号表示的结果。他们用铜 ($E=16 \times 10^6$ 磅/平方吋) 电镀在加工过的蜡模上制造出精确的壳体。壳体的边界嵌在环氧树脂里,由铝环固定位置。用油压在壳上加载。壳体的直径为 8 吋,曲率半径是 20 或 40 吋。特别在拱高参数较高时,得到非常高的载荷值。

理 论

让浅球壳在屈曲前均匀受压(普通理论)将导致屈曲时 $0.6Et/R$ 的应力。就像分析圆筒在轴压下的情况,这种假设与支承壳段边界条件的满足相矛盾。Budiansky, Weinitschke, 和 Thurston¹⁴⁻¹⁶ 为具有固持边界和 $u=v=0$ 的壳段,得出了对称屈曲的确切的非线性理论结果。在文献 17 中, Huang 为具有固持边界和 $u=v=0$ 的壳段得到了非对称屈曲的结果。在文献 18 中^①, Weinitschke 为简支或固持边界和 $u=v=0$ 的壳段,得出了对称和非对称屈曲型结果。每一根曲线左边的第一段代表对称屈曲。这样,近代的一些很仔细指导的关于浅球帽承受外压的实验,给出了显然是比较高的屈曲载荷值,其中大多数落在固持边和简支边二条稳定曲线之间。这种改进了的一致性,多半还应归功于仔细地控制了试件的初缺陷,进一步证实了缺陷敏感性在支配壳体特性方面的重要地位。

缺陷敏感性

实际壳体结构在几何方面并不近乎理想。必须找到一些技术来确定初缺陷给屈曲强度造成的降低量。人为的屈曲准则,诸如屈曲后的最小载荷以及等能量状态下的载荷等并没有考虑到缺陷,因而并不显得需要或可取。在本节中讨论了有关初缺陷的影响和对初缺陷灵敏度的近代工作。

Koiter^{19,20} 开创了缺陷灵敏度分析的研究方法,但是这方面的主要促进是 Budiansky 和 Hutchinson² 进行的一系列的调查研究。在这些工作中,把一个给定的壳体一载荷组合里的载荷,展开成最大横向屈曲挠度的幂级数。目的是决定这一级数的第二个系数,用以提供缺陷灵敏度的第一次近似测量,并且能够联系到具有屈曲形态的几何缺陷所引起的强度减少。这一方法在文献 2 中详加讨论,因此这里不予赘述。

载荷对特征位移(它和载荷的褶积产生了功)的曲线,其屈曲后的初始斜率提供了一种有关缺陷灵敏度的测量。这个(物理)量用在这里是因为它为基本概念的叙述提供了一个简单的工具。在文献 20 以及过去一些缺陷敏感性的分析中都计算过这种斜率;它的定义由图 3 表明。对应于屈曲后初始斜率的参数 S 是这样定义的:当屈曲后的曲线从向它本身曲线折回变到与屈曲前曲线相切时, S 将在 -3 和 1 之间变化。对于正的 S 值,

① 在 $3 < [12(1-\mu^2)]^{1/4} a/(Rt)^{1/2} < 5$ 区间, 仍然存在着一个矛盾, (看图 2), 即固持边的理论载荷低于简支边。还没有得到简支边具有波数等于一的结果。也许, 研究一下这种情形将解决这一矛盾。

缺陷将不明显地改变屈曲载荷；对于负的 S ，缺陷将降低屈曲载荷。尽管用 S 如同用

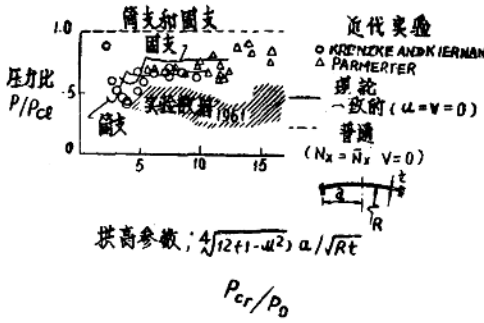


图 2 浅球壳在外压下实验和理论的屈曲压力的比较

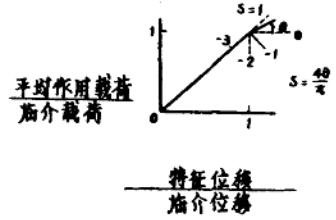


图 3 屈曲后初始斜率的定义

Koiter 参数，对给定缺陷下的这种载荷降低作出定量的测量并不那末容易，可是 S 为比较一种壳体—载荷组合与另一种组合提供了一个较为合适的依据。此外， S 提供了一种衡量屈曲过程的预计的猛烈性，因而也是预计破坏程度的尺度；对于 $S < -2$ (体系)。将经常发生“突越”式的屈曲。反之，对于 $-2 > S > 0$ 的情况，屈曲将是猛烈的或缓和的，取决于载荷或特征位移是否被控制往。

对于刚才叙述的头二个问题，轴压下的圆筒和外压下的球壳，敏感角 S (按普通理论计算) 是 $S = -3$ 。这和一些壳体—载荷组合的已知最大灵敏度关连得很好。当然，不少壳体—载荷组合对缺陷是不太敏感的。(参看，例如，Kemper 在文献 21 中的一篇有意义的屈曲和屈曲后的研究报告，内容是关于初始几何缺陷对于静水压力下圆筒壳(稳定)性能的影响。)从另一不太敏感的壳体—载荷组合得到的结果，是在图 4 中表示的受到扭转的圆筒壳。对于这种载荷，按普通理论得出的结果和按确切理论得出的结果是相同的。在文献 22 中，Budiansky 确定了特征扭矩—扭率曲线的屈曲后的初始斜率。在图 4 的简图上定义了这种载荷的参数 S 。上图中，用阴影区表示了画起来紧靠一起的现有实验屈曲扭矩，并用 + 号表示分散较远的结果。在下图中画出了与曲率参数的各种值相对应的敏感角。Koiter 第二系数，正像在文献 22 中确定的那样，表明了一种分布，和这里表示的 S 曲线相似。实验圆筒壳的边界都是固持的；对于扭转载荷，在实验室中几乎得不到简支边。因此，理论扭矩和敏感角都是按固持边计算的。结果表明： Z 值较低时，(组合)不敏感，在 $Z = 10$ 处，曲线跨过零，灵敏度在 $Z = 40$ 处最大，然后，随着 Z 的增大降低到零。然而，与厚度相比，缺陷的可能相对尺寸在较大的 Z 值处是比较大的。这一点也许是那里的屈曲扭矩宽广的起因。阴影区域和记号代表了 100 个以上的实验，它们都是在 20 年以前做的，并没有采取特别措施使初始缺陷最少。如果排除两个较高的试验点，不难想像，试验结果的上包络线沿

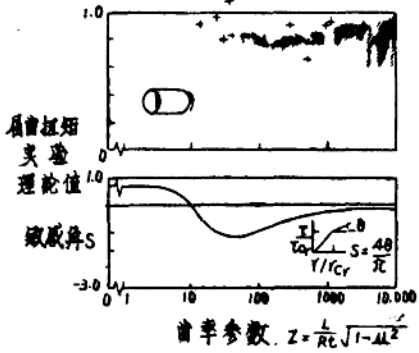


图 4 圆筒壳在扭转下屈曲的实验和理论值的比较和相应的缺陷敏感角

着灵敏度曲线的趋向。然而，敏感角和实验的关联远不是精确的。也许这一点不应该惊奇，因为在这一关联中实验圆筒中的缺陷特征并没有被考虑到。很清楚，进一步努力去改进和估价予测缺陷影响的方法是必要的。

对缺陷敏感壳体的近代成果的评价

以上的比较表明，过去理论和实验之所以不一致，主因是实验中的初缺陷而次因是理论中的假设。在具有正确边界条件的理想壳体的理论结果和近乎理想试件的实验结果之间所引证的一致性表明理论是正确的。在确定了理论的正确性和识别了初缺陷是不一致的原因之后，现在重要的是对有关壳体载一荷组合的初缺陷灵敏度进行定量测定。通过对理论的初屈曲性态的研究，可以决定一个缺陷灵敏度的粗略尺度。为了给缺陷引起的强度降低得出一个可靠的尺度，在这方面进行更多的研究是必要的。

边界条件和壳壁构造的理论规定

虽然在前几节里已经指出，初缺陷是理论和实验之间不一致的主要原因。而且为了 consistency，常常需要利用非线性弯曲理论来确定一个屈曲前的确切状态，必须强调指出，还有屈曲分析的其它方面，需要仔细考虑，特别像加劲壳那样的实际壳体结构。例如，尽管过去认为，除了浅仄的构造以外，边界条件对于屈曲载荷的影响是相对小的；可是近代研究表明了边界条件变化时的重大差别。近代分析研究还表明，在予测加劲壳结构的强度时，板壁构造和载荷作用点的详细规定是重要的考虑方面。下面就讨论这些效应。

支承条件

首先来考虑一系列的支承条件对于屈曲载荷的影响将是适宜的。为了完备起见，也将相应地列出普通屈曲计算。作为一个例题，把文献 11 里有关圆筒屈曲的结果提出来。该筒承受轴压和內压的联合作用，具有不同的边界条件。在图 5 中表示了简支边和固持边圆筒的曲线，每一种支承情况包含有四组不同的中性面边界条件。实线是按照确切理论得到的，而虚线则用普通理论求得。就会注意到，普通理论结果在确切理论结果的上面和下面都有。对于一种简支情形 ($u=\bar{u}, N_{xy}=0$) 的部分区域，普通理论结果低得相当多。对于只受內压作用的屈曲 ($P=0$)，看来各种边界条件下屈曲压力给出相当大的差异。单独在轴压 $P(p=0)$ ，包括 $N_{xy}=0$ 的简支条件给出的屈曲应力等于 $0.3Et/R$ 或仅是包括 $v=0$ 时的（屈曲应力）值的 50%。这种边界条件是不平常的，也许不会在设计中出现。但它确实引人注目地说明边界条件的强烈影响。

Ohira 在文献 23 中首先用普通理论计算了半无限长圆筒在轴压下的低限屈曲载荷。Hoff 和 Rehfield 在文献 24 中得到了有限圆筒的类似的普通理论结果。Almroth¹¹ 也独立地求得了有限圆筒的普通理论结果（在确切理论结果以外）。Sobel²⁵ 比较早就指出了各种边界条件对于有限圆筒在外压作用下屈曲的重要性。

偏心加劲

壳壁（一边）偏心加劲的壳体理论，在联系拉伸应变和弯曲应变的手续上，比壳壁对称加劲的理论要复杂得多。这是首先由 Van der Neut²⁶ 在 1947 年指出的，但一直到

Card的试验^{27,28} 证明了强度方面的重大影响以前,一般并不认为它是重要的。图6表示
 了这些实验数据,结果表明,外加劲圆筒负担的载荷比相应内加劲圆筒的试验数据大一
 倍多。概括它们的是从文献28中,(它包含了一边加劲的效应)引述的关于固持和简支
 边界条件的普通理论曲线。还表示了从文献29-31中引述了确切理论结果^①。这些结果
 表明,在简支和固持边结果之间以及在内加劲和外加劲结果之间有着较大的差别。正
 像所予料的那样,试验结果一般接近于固持边的理论结果。提请注意的是,外加劲并不
 常常是最好的。对于别的一些加劲构造得到过十分不同的屈曲载荷结果。没有一个完全
 的计算,似乎没有简单的规则,可以给所需要的情况决定那一种加劲是最有效的。最近
 有许多文章用普通理论论述了偏心加劲壳体。特别应该提到 Singer, Baruch, 和
 Harari³² 关于加劲圆筒在轴压下的渊博文章。

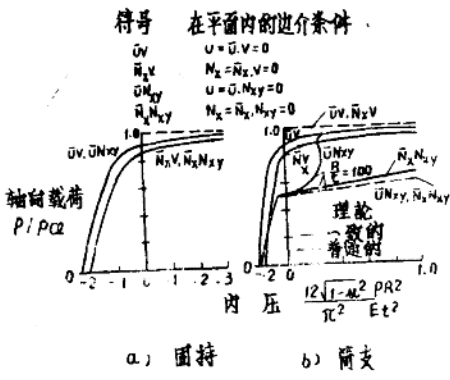


图5 圆筒在轴压和内压联合作用下屈曲的相互作用曲线; $Z = 50$ 。

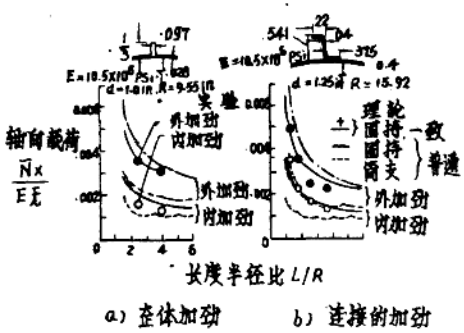


图6 轴向加劲圆筒在轴压下屈曲的实验和理论值比较载荷的偏心

壳体的边缘往往是通过一些并非中性面的表面受载,例如肋条形心的轨迹或通过蒙皮的中面。这种载荷偏心所造成的力矩引起不寻常的屈曲前变形和应力,需要确切理论去分析。从文献29-31得到的理论结果表示在图7中,它们分析了通过偏心筒支端沿轴向加载的两组内外加劲圆筒壳和一组圆锥壳。结果表明,载荷偏心可以给加劲圆柱壳和锥壳的屈曲载荷造成重大的变化。对于这些构造,无论是内部加劲还是外部加劲,载荷加在中性面内得到的屈曲载荷比载荷通过中性面的临界值有时竟高达四倍以上。在内加劲和外加劲方面,载荷仍有相当大的差别。但在圆筒壳和10°圆锥壳之间,结果的差别很小。

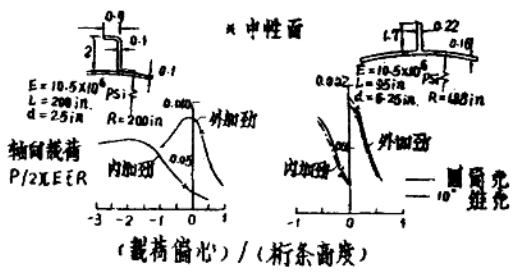


图7 压缩载荷的偏心作用(从蒙皮中心量起)对于筒支轴向加劲圆筒壳和锥壳的屈曲载荷的影响

① 注意,在文献29和30中外加劲圆筒的计算结果(在图6a中用直线表示)和在文献31中所报告的单个计算(用+号表示)之间存在着矛盾。二种计算是采用本质上相同的理论,没有明显理由存在着矛盾。

对加劲圆筒壳附加微量的径向曲率

除了在几何或载荷细节方面的变化以外,在总体几何方面的微量改变可以对加劲圆筒壳的强度造成巨大的影响。例如研究过附加微量的径向曲率对于轴压下加劲圆筒的影响。已有的计算结果经过添改后得到在图8中表示的曲线。在图8左边的曲线表示了一些普通理论的结果,它们取自 McElman 的文章(文献33)和 Card 和 gones 的文章(文献28)。圆筒的数值是在图6里表示的圆筒试件之一的计算结果。对于内加劲,发觉经线向外拱出7.8%时,屈曲载荷加大到九倍。在图8右边的曲线,表示由 Almroth, Bushnell 和 Sobel³¹从确切理论得出的结果。画在曲线右边的圆筒结构和图7中通过中性面受力的圆筒相同。这里算出,经线向外拱出6%时,在量级上会增加7倍。一般的说,用内加劲和向外鼓可以得到较高的载荷。对于双曲壳体,内外加劲的屈曲载荷之间,差别不如圆筒壳和锥壳那样大。结果也表明,附加微量负的径向曲率使轴向承载量大有降低。要注意,加劲壳附加微量正的径向曲率后的这一特性在普通(未加劲)壳体中并没有一个直接的对应部分。轴压下的未加劲壳,附加微量径向曲率后并不明显地负担更多的载荷⁷。

板壁构造和边界条件效应的评价

所举的例子指出,在壳体屈曲的预测中有需要运用正确的确切的边界条件。应用屈曲前的线性薄膜理论可以给出确切理论保守的或不保守的屈曲载荷。而应用包括考虑偏心载荷的正确边界条件很可能是与实验的一致和不一致之间的差别。在加劲壳体中,还必须考虑加劲的任何偏心。

根据所举的用现有理论得到的例子,看来可以大量增加承载能力:1)从一边加劲的位置证明有200%的增加,2)中性面偏心加载证明有400%的增加,3)给加劲圆筒壳附加微量的正径向曲率证明有700%的提高。当然,理论上表明的惊人提高并不是递加的,还应该考虑其他因素加以调节。这些因素包括缺陷,塑性以及除压缩以外的其他载荷变得危险的可能性,(诸如拉伸或弯曲等)。此外,这些巨量的增加也许并不能在最佳设计中实现。由于载荷偏心 and 附加正的径向曲率而预期的增加还没有经过实验证明。

为了对所要求的结构用确切理论研究上面讨论过的效应需要广泛而复杂的计算。一种通常用来进行这类计算的电算机程序由 Almroth, Bushnell 和 Sobel 在文献31,34和35中作了叙述,用以研究具有不同边界条件的,——包括偏心加载和环式支承——回转浅壳在轴压和压力下的轴对称失稳(问题)。这个程序包含了屈曲前变形和应力的非线性(弯曲)效应。通过这个程序得出的结

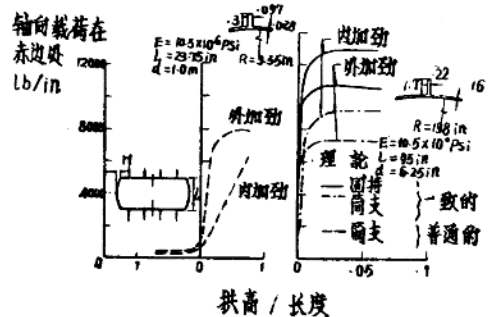


图8 轴对称的双曲率轴向加劲壳体在压缩下的屈曲载荷

果与其他理论结果相一致，并且与现有的实验结果很好地一致。

结 束 语

壳体结构屈曲的近代实验和理论研究结果表明，在适当建立的理论 and 细致准备和执行的实验结果之间有着明显的一致性。这些结果提示，过去的理论与实验之所以不一致主要是由于壳体试件的初缺陷，其次是理论的简单化。但是，通过现代计算机和较为完备的理论的结合，还发现了对于壳体屈曲特性的其他强大的影响；这些包括对承载能力有巨大影响的加劲的偏心，载荷的偏心以及对加劲圆筒附加微量的经向曲率。

从这些进展中可以断定，适当提出的屈曲理论是正确的，并不需要人工的屈曲准则，诸如任意引用屈曲后的最小量或“等能量准则”。此外，初缺陷的重要性已经证实，并且对设计计算中定量地估计缺陷效应这个决定性的问题已经作出一个开端。最后，认为必须精确地规定边界条件，而且在许多设计计算中必须考虑在几何和加载路线方面的细节。

註：参阅本刊 2459 页和 2460 页上 d.J.Hart-Smith 的评论和作者的回答。

参 考 文 献

1. Hoff, N.J., "Thin Shells in Aerospace Structures", *Astronautics & Aeronautics*, Vol.5, No.2, Feb. 1967. PP26—45.
2. Budiansky, B. and Hutchinson, J.W., "A Survey of Some Buckling Problems", *AIAA Journal*, Vol.4, No. 9, Sept. 1966. PP1505-1510.
3. Tennyson, R.C., "An Experimental Investigation of the Buckling of Circular Cylindrical Shells in Axial Compression Using the Photoelastic Technique," Rept. 102, Nov. 1964. Institute of Aerospace Sciences, University of Toronto.
4. Tennyson, R.C., "A Note on the Classical Buckling Load of circular cylindrical Shells under Axial Compression", *AIAA Journal*, Vol.1, No.2, Feb. 1963, PP.475-476.
5. Horton, W.H. and Durham, S.C., "Imperfections, a Main Contributor to Scatter in Experimental Values of Buckling Load," *International Journal of Solids Structures*, Vol.1, 1965, PP.59-72.
6. Almroth, B.O., Holmes, A.M.C., and Brush, D.O., "An Experimental Study of the Buckling of Cylinders under Axial Compression," Paper 878, May 1964, Society for Experimental Stress Analysis.

7. Babcock C.D. and Sechler, E.E., "The Effect of Initial Imperfections on the Buckling Stress of Cylindrical Shells", TN D-2005, 1963, NASA.
8. Stein, M., "The Effect on the Buckling of Perfect Cylinders of Prebuckling Deformations and Stresses Induced by Edge Support," Collected Papers on Instability of Shell Structures-1962, TND-1510, 1962, NASA, PP.217-227.
9. Fischer, G., "über den Einfluss der gelenkigen Lagerung auf die Stabilität dünnwandiger Kreiszy-linderschalen unter Axiallast und Innendruck." Z. Flugwissenschaften, Jahrg. 11, Heft3, March 1963, PP.111-119.
10. Stein, M., "The Influence of Prebuckling Deformations and Stresses on the Buckling of Perfect Cylinders", TRR-190, 1964, NASA.
11. Almroth, B.O., "Influence of Edge Conditions on the Stability of Axially Compressed Cylindrical Shells," CR-161, 1965, NASA, also Rept. 4-91-64-1, Aug. 1964, Lockheed Missile and Space Co.
12. Krenzke, M.A. and Kiernan, T.J., "Elastic Stability of Near-Perfect Shallow Spherical Shells", AIAA Journal, Vol. 1, No. 12, Dec. 1963, PP-2855-2857; also "Erratum: Elastic Stability of Near-Perfect Shallow Spherical Shells", AIAA Journal, Vol.2, No.4, April 1964, P.784.
13. Parmerter, R.R., "The Buckling of Clamped Shallow Shells under Uniform Pressure", Ph.D. thesis, Nov. 1963, California Institute of Technology, Pasadena, Calif.
14. Budiansky, B., "Buckling of Clamped Shallow Spherical Shells", Proceedings of the Symposium on the Theory of Thin Elastic Shells", North Holland, 1960, PP.64-94.
15. Thurston, G.A., "A Numerical Solution of the Nonlinear Equations for the Axisymmetric Bending of Shallow Spherical Shells", Journal of Applied Mechanics, Vol.28, 1961, PP. 557-568.
16. Budiansky, B. and Weinitschke, H., "On Axisymmetrical Buckling of Clamped, Shallow, Spherical Shells", Journal of the Aerospace Sciences (Readers Forum), Vol.27, No.7, July 1960, PP. 545-546.
17. Huang, N.C., "Unsymmetric Buckling of Thin Shallow Spherical Shells", Journal of Applied Mechanics, Vol.31, 1964, PP.447-457.
18. Weinitschke, H.L., "Asymmetric Buckling of Shallow Spherical Shells", Journal of Mathematics and Physics, Vol.44, June 1965.
19. Koiter, W.T., "On the Stability of Elastic Equilibrium", thesis (in Dutch), 1945, Delft, Amsterdam, Holland.
20. Koiter, W.T., "Buckling and post-Buckling Behavior of a Cylindrical Panel under Axial Compression", Rept. S-476, 1956, Nat. Luchvaartlaf., Amsterdam, Holland.

21. Kempner, J., "Some Results on Buckling and Postbuckling of Cylindrical Shells", Collected Papers on Instability of Shell Structures-1962, TN D-1510, Dec. 1962, NASA, PP. 173-183.
22. Budiansky, B., "Post-Buckling Behavior of Cylinders in Torsion", Rept. SM-17, Aug. 1967, Harvard University, Cambridge, Mass.
23. Ohira, H., "Local Buckling Theory of Axially Compressed Cylinders", Proceedings of the Eleventh Japan National Congress for Applied Mechanics, 1961, PP. 37-40.
24. Hoff, N.J. and Rehfield, L.W., "Buckling of Axially Compressed Circular Cylindrical Shells at Stresses Smaller than the Classical Critical Value", Journal of Applied Mechanics, Vol. 32, No. 3, Sept. 1965, PP. 542-546; also SUDAER 191, May 1964, Stanford University, Stanford, Calif.
25. Sobel, L.H., "Effects of Boundary Conditions on the Stability of Cylinders Subject to Lateral and Axial pressures", AIAA Journal, Vol. 2, No. 8, Aug. 1964, PP. 1437-1440. also Rept. 6-90-63-91, Sept. 1963, Lockheed Missiles and Space Co.
26. Van der Neut, A., "General Instability of Stiffened Cylindrical Shells Under Axial Compression", Rept. S-314, 1947, Nat. duchvaartlab., Amsterdam, Holland.
27. Card, M.F., "Preliminary Results of Compression Tests on Cylinders With Eccentric Longitudinal Stiffeners", TMX-1004, 1964, NASA.
28. Card, M.F. and Jones, R.M., "Experimental and Theoretical Results for Buckling of Eccentrically Stiffened Cylinders", TN D-3639, 1966, NASA.
29. Block, D.L., "Influence of Prebuckling Deformations, Ring Stiffeners, and Load Eccentricity on the Buckling of Stiffened Cylinders", AIAA/ASME 8th Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference, AIAA, 1967, PP. 597-607.
30. Block, D.L., "Influence of Prebuckling Deformations and Discrete Ring Stiffeners on the Buckling of Eccentrically Stiffened Orthotropic Cylinders", TN D-4283, 1967, NASA.
31. Almroth, B.O., Bushnell, D., and Sobel, L.H., "Buckling of Shells of Revolution With Various Wall Construction, Volume 1. Numerical Results", CR-1049, 1968, NASA; also Rept. 4-17-67-1, 1967, Lockheed Missiles & Space Co.
32. Singer, J., Baruch, M., and Harari, O., "On the Stability of Eccentrically Stiffened Cylindrical Shells under Axial Compression", International Journal of Solids, Structures, Vol. 3, 1967, PP. 445-470.
33. McElman, J.A., "Eccentrically Stiffened Shallow Shells of Double

Curvature", TN D-3826, 1967, NASA.

34. Bushnell, D., Almroth, B.O., and Sobel, L.H., "Buckling of Shells of Revolution With Various Wall Construction Volume 2. Basic Equations and Method of Solution", CR-1050, 1968, NASA; also Rept. 4-17-67-1, 1967, Lockheed Missile and Space Co.

35. Bushnell, D., Almroth, B.O. and Sobel, L.H., "Buckling of Shells of Revolution With Various Wall Construction Volume 3. User's Manual for Bøøøø", CR-1051, 1968, NASA, also Rept. 4-17-67-4, 1967, Lockheed Missiles & Space Co.

译 自 AIAA Journal, 6卷, 1968.12.

2339-2345 页

(卓曙君 译 周明鸿 校)

关于“壳体屈曲研究的某些近代进展”评论

L.J.Hart-Smith

在文献 1 中, Stein 曾经断言,经典的薄壳屈曲分析是基本正确的。本文只注意在纯轴压作用下的圆筒情形。他的图 1 表明,无论边界是完全固持的 ($u - \bar{u} = 0, v = 0, w = 0, \partial^2 w / \partial x^2 = 0$) 或是不完全地约束着 ($u - \bar{u} \neq 0, v = 0, w = 0, \partial^2 w / \partial x^2 = 0$), 经典理论予测出同样的屈曲应力。他于是把这个理论只与牵涉到固持边界的那些实验相比较。这点引起二个问题。首先,如果理论对两组边界条件都适用,对边界没有完全约束的圆筒的实验结果为什么不应该也和理论相一致? Stein 自己从整个实验证据中断定,边界条件是十分重要的。第二,理论真正和 Stein 所引证的实验的情况相对应吗? 周向环式屈曲的经典理论的确适用于完全固持的或不完全约束的边界条件。但是,对于菱式屈型²的经典解,菱形皱纹必须扩展到圆筒的两端, [文献 2 方程式(f)464 页], 那里 $u - \bar{u} = \pm A \sin n\theta \neq 0$ 。因此,菱式屈型的经典解和 Stein 所引证的完全固持边的菱式屈型的任何一个实验证据不能相比较。他的所有文献 (4-7) 都明确指出了菱式屈型和那么严格的边端固持以致完全抑制了那里的位移。而且,记录在他的文献 4 和 6 中的高速电影摄像机的观察结果清楚地表明,观察到的屈曲型式从一开始就是菱形的。在他引用的任一有关文献 (4-7) 中没有任何屈型从环式改变到菱式的证据。

所以,使经典的平衡一分叉分析和相应的实验证据调和一致的问题看来仍然没有解