高 等 数 学

第 四 册

（試用教材）

成都电訊工程学院

一九七三年七月

目　　录

第七章　多元函数

第七章　多元函数

我们学过的"解析几何"，是用座标为工具，来研究平面上的几何问题。所研究的点、线、图形等几何对象都在同一个平面內。这些內容是研究几何的基础，是很重要的数学內容。但是，人类生活活动在空间内，所接触的问题往往不局限于一个平面內，这样就提出了研究空间的几何问题。用座标来研究空间几何图形就是"空间解析几何"。

微积分研究的对象主要是变量间的函数关系。我们以前学过的微积分是一个自变量的，即所谓一元函数。对于较复杂的问题，往往牵涉到多个自变量，这样就提出研究多元函数的问题。

这一章就是研究空间解析几何、多元函数的微分、积分这些內容。重点研究二元函数。学习时要注意二元函数与一元函数的联系和区别。

第一节　空間解析几何

一、空間直角座标系

在学习解析几何和微分时，平面座标是一个重要的工具，对研究平面图形的性质，了解微积分的一些基本概念，都是不可缺少的。同样，为了研究空间图形和多元函数的微积分，空间座标也是一个重要的工具。首先，我们介绍空间的直角座标。

我们知道，表示一条直线上的点，只要用一个数就可以了。表示平面上的点，需要两个数，就是这个点的座标。这样，我们很自然地想到，要表示空间的点，就需要用三个数。实际情况也确是这样。例如，要确定飞机在某一时刻的位置，不但要知道飞机到达地面某一处（需要用两个数来表示）的上空，还要知道飞机离地面的高度。也就是要用三个数才能确定飞机在某一时刻的位置。

现在我们来建立空间的座标。过一定点O，作三条互相垂直的有方向的直线Ox，Oy，Oz。习惯上按右手规则来确定。就是把右手的姆指、食指、中指伸直，作成互相垂直的形状，如图7—1，如果姆指指向Oz的正方向，食指指向Ox的正方向，中指就指向

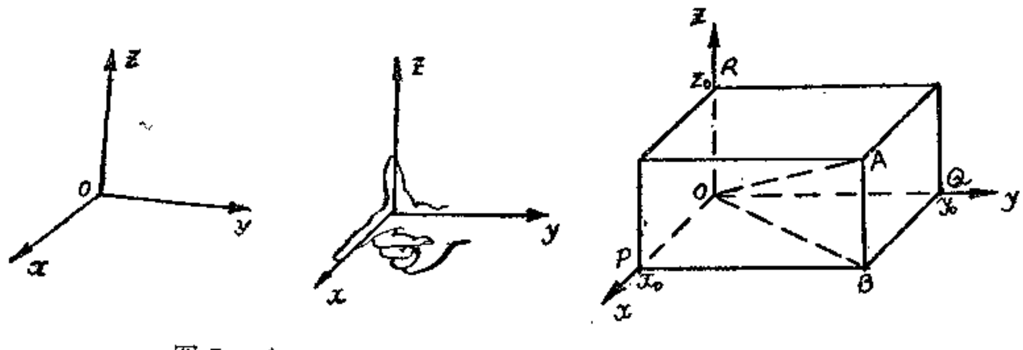


图7—1

Oy的正方向。通常，在这三条互相垂直的直线上取相同的单位长，作为基本尺度；三直线的公共交点O作为每一直线上的座标原点。这样，就组成了一个空间直角座标系，O点叫做座标原点，Ox、Oy、Oz叫做座标轴。

建立了这样的座标系以后，就可以用"数"（即座标）来确定空间任一点的位置。对空间内任一点A，过A作三个平面分别垂直于x轴、y轴、z轴（图7—2）。设这个平面和x、y、z轴的交点分别是P、Q、R，并设P、Q、R在x轴、y轴、z轴上的座标分别是x_0，y_0、z_0，这样空间任意一点A，就唯一地确定了三个数x_0、y_0、z_0。将这三个数按次序写成（x_0，y_0，z_0）就称为A点的座标。反过来，任意给定三个有次序的数（x_0，y_0，z_0），在空间只能唯一地找到一个点A，它的座标是（x_0，y_0，z_0）。

习　题　一

1．试在空间座标系中标出下列六个点的位置：

$$p_1(2,\ 3,\ 4);\ p_2(-2,3,4);\ p_3(2,\ -3,\ -4);$$
$$p_4(2,\ 3,\ 0);\ p_5(2,\ 0,\ 0);\ p_6(0,\ 3,\ 4).$$

2．xy平面上的点在空间座标系中的座标有什么特点（Ox轴Oy轴所在的平面叫xy平面）？yz平面上的点呢？zx平面上的点呢？

3．x轴上的点在空间座标系中的座标有什么特点？y轴上的点呢？z轴上的点呢？原点O的座标是什么？

4．（x_0，y_0，z_0），（x_0，y_0，$-z_0$）两个点在空间的位置有什么关系？（x_0，y_0，z_0），（$-x_0$，$-y_0$，z_0）两个点呢？又（x_0，y_0，z_0）与（$-x_0$，$-y_0$ $-z_0$）呢？

5．右手规则用下列方法描绘：将右手的姆指、食指、中指作成互相垂直的形状，如果姆指指向x轴的正方向，食指指向y轴的正方向，那么中指就指向z轴的正方向。说明这样描绘对不对？

6．说明可以按下述方法在空间直角座标系中描出点（x_0，y_0，z_0）来：在xy平面上先画出点$B(x_0,\ y_0)$（见图7—2），过B点作与Z轴平行的直线l，若$z_0>O$，在l沿Z轴正方向一侧取点A，使A、B的距离为z_0，这个点A就是所求的点（x_0，y_0，z_0）；若$z_0<O$，在l沿z轴负方向一侧取点A，使A、B的距离为$|z_0|$，这个点A的座标就是（x_0，y_0，z_0）；若$z_0=0$，那么点B就是（x_0，y_0，O）点。

建立了点的座标，就可以用座标来计算空间任意两点间的距离。

先考虑两个点中有一个是座标原点的情形。如求A（x_0，y_0，z_0）与O（O，O，O）的距离。从A点到xy平面作垂线，设垂足为B点（见图7—2）用$\overline{OA}$记O、A的距离。根据勾股弦定理（注意$\triangle OBA$是一个直角三角形，B角是直角）

$$\overline{OA}^2=\overline{OB}^2+\overline{BA}^2$$

又从直角三角形OPB（P角是直角），利用勾股弦定理，得

$$\overline{OB}^2=\overline{OP}^2+\overline{PB}^2$$

代入上式，得到

$$\overline{OA}^2=\overline{OP}^2+\overline{PB}^2+\overline{BA}^2=x^2_0+y^2_0+z^2_0$$

两端开方取算术根，得O、A两点间距离是

$$\overline{OA}=\sqrt{x^2{}_0+y^2{}_0+z^2{}_0} \qquad (1)$$

用类似的方法，可以求出任意两点 $P(x_1, y_1, z_1)$ $Q(x_2, y_2, z_2)$

间的距离公式：

$$\overline{PQ}=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2} \qquad (2)$$

这只要通过P、Q两点，各作与座标轴垂直的平面（图7—3）。这六个平面构成一个长方体。PQ是这个长方体的一条对角线。而这长方体的三个边长分别是$|x_1-x_2|$，$|y_1-y_2|$，$|z_1-z_2|$。故得距离公式（2）。

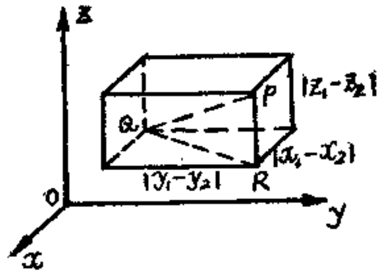


图7—3

习　题　二

1．求下列各点与座标原点间的距离：

（2，3，4），（－2，3，4），（2，－3，－4）

2．求下列各对点间的距离：

① （2，3，－4），（1，0，3）

② （－2，3，－4），（1，0，－3）

③ （4，－2，3），（－2，1，3）

3．根据图7—3，详细推导两点间距离公式（2）。

二、空間向量

在《矢量与复数》中讲过的向量是平面向量。所谓“平面向量”就是所研究的向量都平行于同一个平面，如果所研究的向量不具有这个特点，（即不都平行于同一个平面），我们就叫做这些向量为空间向量。学习这一段时，建议先复习《矢量与复数》的第一节和第二节。平面向量的加减，数量与向量的乘积，对空间向量也同样定义。

1）空間向量的座标表示

先讲空间向量的座标表示法。在空间取定一个直角座标系（图7—4），在x轴、y轴、z轴的正方向上各取一个单位向量，分别记作$\vec{i}$、$\vec{j}$、$\vec{k}$。这三个向量叫做基本单位向量。空间任意一个向量，都可以用这三个基本单位向量表示出来。因为若在空间内任取一点$P(x, y, z)$，过P点作xy平面的垂线，垂足为M，则向量$\overrightarrow{OP}$可以写成

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MP}$$

由平面向量的座标表示，我们知道

$$\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}$$

又 $\overrightarrow{MP}=z\vec{K}$

所以 $\overrightarrow{OP}=x\vec{i}+\vec{y}j+z\vec{K}$

这就是向量$\overrightarrow{OP}$的座标表示。

上述结果可归结如下：

若一个向量以座标原点O为起点，以$P(x,\ y,\ z)$为终点，则这个向量$O\vec{P}$可表示为$x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$。这里$\vec{i}$、$\vec{j}$、$\vec{k}$分别是在$x$轴、$y$轴、$z$轴上的三个单位向量，方向指向座标轴的正方向。$x$，$y$、$z$三个数分别叫做向量$\overrightarrow{OP}$在$x$轴、$y$轴、$z$轴上的投影（也叫分量）。若$\overrightarrow{OP}$与座标轴正向的夹角分别为$\alpha$、$\beta$、$\gamma$（图7—5），则

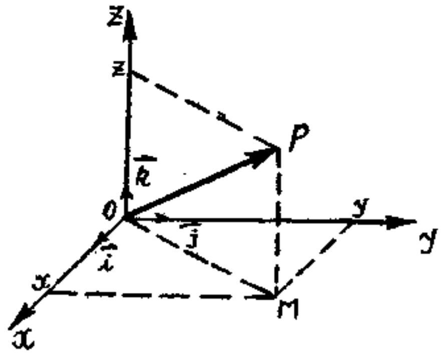


图 7 — 4

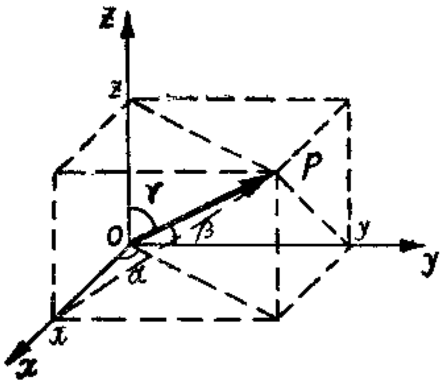


图 7 — 5

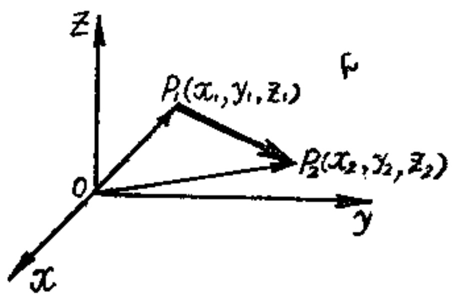


图 7 — 6

$$x=|\overrightarrow{OP}|\cos\alpha$$
$$y=|\overrightarrow{OP}|\cos\beta$$
$$z=|\overrightarrow{OP}|\cos\gamma$$

若一个向量的起点为$P_1(x_1,\ y_1,\ z_1)$，终点为$P_2(x_2,\ y_2,\ z_2)$，则这个向量（图7—6）

$$\begin{aligned}P_1\vec{P}_2&=\overrightarrow{OP_2}-\overrightarrow{OP_1}\\&=(x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k})-(x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k})\\&=(x_2-x_1)\vec{i}+(y_2-y_1)\vec{j}+(z_2-z_1)\vec{k}\end{aligned}$$

因此，一般的向量，都可以用$\vec{i}$、$\vec{j}$、$\vec{k}$各乘一个系数之和表示，$\vec{i}$、$\vec{j}$、$\vec{k}$的系数叫这个向量在座标轴上的投影（或分量）。

与平面向量相同，利用座标表示，可以用代数方法处理空间向量的运算。

设有两个向量

$$\vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k};\quad \vec{b}=b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k}$$

那么，它们的和为

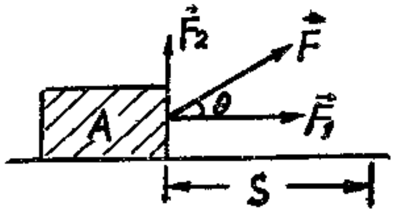
$$\vec{a}+\vec{b}=(a_1+b_1)\vec{i}+(a_2+b_2)\vec{j}+(a_3+b_3)\vec{k} \qquad (1)$$

数量m与向量$\vec{a}$的乘积为

$$m\vec{a}=(ma_1)\vec{i}+(ma_2)\vec{j}+(ma_3)\vec{k} \qquad (2)$$

2）两个向量的数量积

在物理的力学部分，关于作功问题，就用到了两个向量的数量积概念。



若有力$\vec{F}$作用在物体A上(如右图)，使物体产生了一段位移S。我们说物体A在力$\vec{F}$的作用下，作了功W。怎样计算这个功W呢？因为$\vec{F}$与位移的方向不一致，设其夹角为θ，力$\vec{F}$可以分解成两个分力，与$\vec{S}$方向平行的分为$\vec{F}_1$作了功，而与$\vec{S}$方向垂直的分力$\vec{F}_2$不作功。我们用F_1表示$\vec{F}_1$的大小，则$F_1=|\vec{F}_1|=|\vec{F}|\cos\theta$。

故在力$\vec{F}$作用下，物体产生位移$\vec{S}$时所作的功为

$$W=F_1S=|\vec{F}|\cdot\cos\theta\cdot|\vec{S}|=|\vec{F}|\cdot|\vec{S}|\cos\theta。\ (3)$$

这个式子，从数学形式上说是两个向量的模与其夹角余弦的乘积。

一般的，若两个向量$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为θ ($O\leqslant\theta\leqslant180°$)，则数量$|\vec{a}||\vec{b}|\cos$，称为向量$\vec{a}$与$\vec{b}$的数量积（也称点积或内积），记作

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta \qquad (4)$$

由此，(3)式可以写成

$$W=\vec{F}\cdot\vec{S}$$

两个向量的数量积有以下几个性质：

1. $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$

$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$

$\lambda\vec{a}\cdot\vec{b}=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})$ （λ是一个数量）

这性质是很显然的，学员自己推证。

2. $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$

即一个量与它自己的数量积，等于它的模的平方。事实上，因为向量$\vec{a}$与它自己的夹角是0°，故

$$\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}||\vec{a}|\cos 0°=|\vec{a}|^2$$

3、　若$\vec{a}\perp\vec{b}$则$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

因为　$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角$\theta=90°$

故

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos 90°=0。$$

反之，若$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，且$\vec{a}\neq 0$，$\vec{b}\neq 0$则必$\vec{a}\perp\vec{b}$。这是检查两个向量是否垂直的很简便的办法。由以上性质可知：

$$\vec{i}\cdot\vec{i}=\vec{j}\cdot\vec{j}=\vec{k}\cdot\vec{k}=1$$

$$\vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{j}\cdot\vec{i}=0、\vec{j}\cdot\vec{k}=\vec{k}\cdot\vec{j}=0，\vec{k}\cdot\vec{i}=\vec{i}\cdot\vec{k}=0$$

于是，如果两个向量用坐标表示时，

$$\vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}$$

$$\vec{b}=b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k}$$

则　$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$　　(5)（学员自推）

这就是两个向量的数量积的座标表示式。

利用数量积，可以计算向量的模和两向量的夹角。

由数量积的性质2和公式(5)

$$\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2=a_1^2+a_2^2+a_3^2$$

$$\therefore\quad |\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$$

同理　$|\vec{b}|=\sqrt{\vec{b}\cdot\vec{b}}=\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}$

$$\therefore\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}\qquad(6)$$

(6)式就是计算两向量夹角的余弦的公式。

例　已知　$\vec{a}=3\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$，$\vec{b}=2\vec{i}+5\vec{j}-3\vec{k}$，

求下列各量：$\vec{a}+\vec{b}$，$\vec{a}-\vec{b}$，$|\vec{a}|$，$|\vec{b}|$，$\vec{a}\cdot\vec{b}$，$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角θ。

解　$\vec{a}+\vec{b}=(3\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k})+(2\vec{i}+5\vec{j}-3\vec{k})$

$$=(3+2)\vec{i}+(-1+5)\vec{j}+(2-3)\vec{k}$$

$$=5\vec{i}+4\vec{j}-\vec{k}$$

$$\vec{a}-\vec{b}=(3\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k})-(2\vec{i}+5\vec{j}-3\vec{k})$$

$$=(3-2)\vec{i}+(-1-5)\vec{j}+(2+3)\vec{k}$$
$$=\vec{i}-6\vec{j}+5\vec{k}$$
$$|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}=\sqrt{3^2+1^2+2^2}=\sqrt{14}=3.742$$
$$|\vec{b}|=\sqrt{\vec{b}\cdot\vec{b}}=\sqrt{2^2+5^2+3^2}=\sqrt{38}=6.164$$
$$\vec{a}\cdot\vec{b}=3\times2+(-1)\times5+2\times(-3)=6-5-6=-5$$

由公式(6)

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{-5}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{38}}=\frac{-5}{2\cdot\sqrt{7}\cdot\sqrt{19}}$$
$$=\frac{-5\cdot\sqrt{7}\cdot\sqrt{19}}{2\cdot7\cdot19}=-0.2168$$

查表得

$$\theta=180°-77°29'=102°31'。$$

题　习　三

1. 从座标原点O到$P(1,\ 1,\ 1,\ )$点作向量，试写出向量$\overrightarrow{OP}$的座标表示式，求这向量的模及它和三角座标轴的夹角。

2. 求$\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$与$\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$间的夹角。

3. 判断下列向量中，哪些是互相平行的，哪些是互相垂直的：

$\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$，$\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}$，$2\vec{i}+2\vec{j}-4\vec{k}$，$\vec{i}-\vec{j}$

4. 已知 $\overrightarrow{AB}=2\vec{i}+5\vec{j}+\vec{k}$，$\overrightarrow{AC}=-3\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}$，求$\triangle ABC$的三个边长和三个内角的大小。

三、空間曲面、曲綫的方程

在平面上建立了座标系，一个点就可以用座标表示，一条曲线就可以用曲线上任一点的座标所满足的方程表示。同样，在空间中建立了座标系，那么，曲面和曲线也可以用方程表示出来。我们看几个常遇到的曲面的方程。

1)球面方程　球心在$P_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$，半径为R的球面上任一点$P(x,\ y,\ z,\ )$到$P_0(x_0,\ y_0,\ z_0,\ )$的距离为R，因此这球面上任一点的座标应满足方程

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}=R$$

或　$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$　　(1)

例 1　求球心在座标原点$(0,\ 0,\ 0,\ )$，半径为 5 的球面方程。

由(1)式，将x_0，y_0，z_0R用0，0，0，5 代替，得这球面的方程是

$$x^2+y^2+z^2=25$$

例2. 求球心在(1，−2，0)点，半径为 2 的球面方程。

由(1)式得

$$(x-1)^2+(y+2)^2+z^2=4$$

去括弧，化简，方程可写成

$$x^2+y^2+z^2-2x+4y+1=0$$

例 3 求下列方程所表示的曲面：

$$x^2+y^2+z^2+2x-4z=0$$

配方，由于

$$x^2+2x=(x+1)^2-1$$

$$z-4z=(z-2)^2-4$$

代入原方程得到

$$(x+1)^2+y^2+(z-2)^2-1-4=0$$

或 $$(x+1)^2+y^2+(z-2)^2=5$$

和(1)式比较，知这个方程表示一个球面，球心在(−1，0，2)，半径$=\sqrt{5}$。

2) **平面方程** 求过点$p_0(x_0,y_0,z_0)$与向量$\vec{n}=a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k}$垂直的平面方程。

设$p(x，y，z)$为所求平面上任一点（图7—7），则$\overrightarrow{p_0p}$必垂直于$\vec{n}$，因此

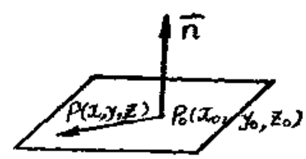


图 7—7

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{p_0p}=0$$

而 $$\vec{n}=a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k}$$

$$\overrightarrow{p_0p}=(x-x_0)\vec{i}+(y-y_0)\vec{j}+(z-z_0)\vec{K}$$

$$\therefore\quad (a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k})\cdot\left[(x-x_0)\vec{i}+(y-y_0)\vec{j}+(2-Z_0)\vec{k}\right]=0$$

即 $$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0 \qquad (2)$$

这里推出了所求平面上任一点满足方程(2)

反过来，如有一点$p(x,y,z)$满足方程(2)，将上面的推导倒过去，就可知$\vec{n}\cdot\overrightarrow{p_0p}=0$，即$\overrightarrow{p_0p}$垂直于$\vec{n}$，所以$P$点必在所求平面上。

因此，方程(2)是过p_0点垂直于向量$\vec{n}$的平面方程。$\vec{n}$叫做这个平面的一个法线向量。

例 4 求过(1，−2，0)点与$\vec{n}=\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}$垂直的平面方程。

代入公式(2)，得所求平面的方程是

$$(x-1)+(y+2)-2(z-0)=0$$

化简为 $$x+y-2z+1=0$$

例 5 说明一次方程

$$3x-4y+z-9=0$$

表示什么图形。

以上求出了平面的方程是一次方程，现在我们来看这个一次方程的图形是否是平面。为此，只要我们能将方程化成(2)的形状，就可以说明它所表示的图形是个平面。

事实上，所给方程，可以写成

$$3x-4y+(z-9)=0$$

与方程(2)比较，可知这个方程的图形就是过(0, 0, 0)点，垂直于向量$3\vec{i}-4\vec{j}+\vec{k}$的平面。

从例5可以看出，一般的三元一次方程

$$ax+by+cz+d=0$$

(a, b, c不全为0)的图形都是一个平面。事实上，如果$c\neq0$，则这方程可改写成

$$ax+by+c(z+\frac{d}{c})=0$$

这是过$(0, 0, -\frac{d}{c})$点，以$a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k}$为法线向量的一个平面。

对于一些特殊的一次方程，应该熟悉它们的图形。如

$$2x-3y+5=0 \qquad (\text{即}c=0)$$

表示以$2\vec{i}-3\vec{j}$为法线向量的平面，过$(0, \frac{5}{3}, 0)$，$(-\frac{5}{2},0,0)$等点(图7—8)。这个平面平行于z轴。

又如 $z-3=0$

是以$\vec{k}$为法线向量的平面方程，过(0, 0, 3)点。这个平面垂直于z轴(图7—9)

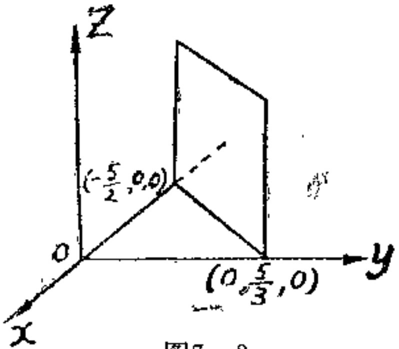


图7—8

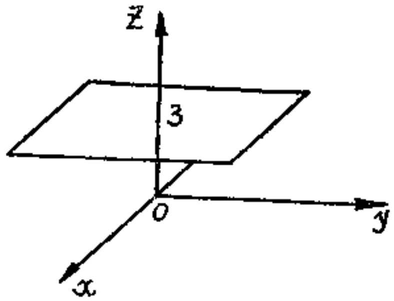


图7—9

习 题 四

1. 方程$x^2+y^2+z^2=49$表示什么图形？下列各点哪些在这个曲面上？

   $(6, -2, 3)$，$(1, 4, -5)$，$(0, -3, -2\sqrt{10})$

2. 方程$x^2+y^2+z^2-2x+4y+2z=10$表示什么图形？

3. 下列方程各表示什么图形？请讲清楚它们的位置：

   ①$x=0$ ②$x=3$ ③$x=-2$ ④$y=0$ ⑤$y-3=0$
   ⑥$2x-3y=0$ ⑦$z=0$ ⑧$3z+1=0$ ⑨$y+2z=0$

4.试在下列平面上各找出一点，并写出它们的法线向量

① $x-2y+3z=0$　　② $2x+y-3z-6=0$

③ $z=-2x+0.5y-1$　　④ $x+y+z=1$

5.写出下列平面的方程，并作出图形。

①过(0, 4, 0)点，垂直于y轴的平面。

②过(1, 0, 0)点，垂直于向量$\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$的平面。

③过(5, 0, 0)及(0, −1, 0)点，平行于z轴的平面。

3) 一些常见曲面的方程

以上看到，在空间座标中，x，y，z，的一个方程表示一个曲面（包括平面）。下面介绍几个常见曲面的方程。

给出空间曲面的方程，象平面解析几何那样用描点作图法，就不容易看清图形的形状了。这里介绍一种由方程研究曲面形状的方法，叫“平面截割法”。

例6 讨论方程$z=\sqrt{x^2+y^2}$表示什么图形。

所谓“平面截割法”，是用一系列垂直于座标轴的平面来截割方程所表示的曲面，通过所截出的一系列曲线的形状想象出曲面的形状。也就是说，用曲面上一组曲线变化的情况显示出曲面的形状。

现在用垂直于z轴的一组平面来截割$z=\sqrt{x^2+y^2}$表示的曲面。过z轴正方向上任一点$(0, 0, z_0)$作垂直于轴的平面，这个平面的方程是

$$z=z_0$$

这个平面与曲面$z=\sqrt{x^2+y^2}$所截出的曲线上的任一点（x，y，z）要满足方程组

$$\begin{cases} z=\sqrt{x^2+y^2} \\ z=z_0 \end{cases}$$

将$Z=Z_0$代入第一式，两端平分后得

$$x^2+y^2={z_0}^2$$

容易看出，所截出的曲线是平面$z=z_0$上，以点（O，O；z_0）为圆心，以z_0为半径的一个圆（图7—10）。

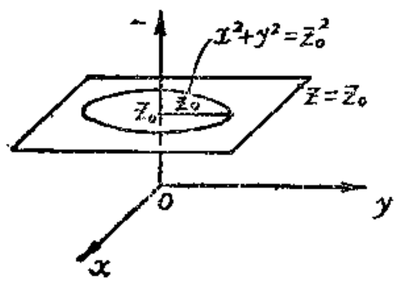


图7—10

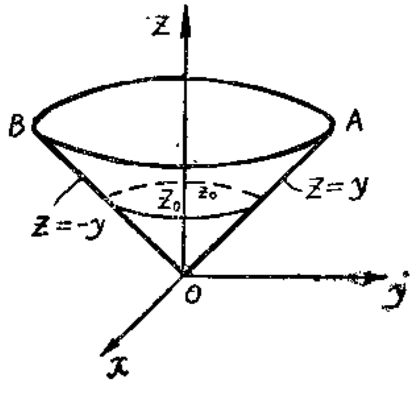


图7—11

当截面 $z=z_0$ 离开 xy 平面越远（即 z_0 越大）时，所截出的圆也越大；当截面就是 xy 平面时，$z_0=0$，截出的圆就退化成一点（0，0，0）。$z_0<0$ 时，因 $\sqrt{x^2+y^2}$ 不得负数，所以没有图形上的点。即曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 在 xy 平面以上。

为了准确看出曲面的形状。再用 yz 平面截一下曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$，因为 yz 平面的方程是 $x=0$，所以截线上的点（x，y，z）满足方程组

$$\begin{cases} z=\sqrt{x^2+y^2} \\ x=0 \end{cases}$$

将 $x=0$ 代入第一式，得

$$z=\sqrt{y^2}$$

即　$y>0$　时　$z=y$

　　$y<0$　时　$z=-y$

在 yz 平面上作出这两条半直线 OA、OB（图 7—11）。可见曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$，从 0 点向上，水平截线是逐渐增大的圆，这些圆以半直线 OA，OB 为界。所以，这曲面是以 O 点为顶点，以 Oz 为对称轴的一个圆锥面。

例 7　讨论 $z=x^2+y^2$ 表示什么图形

我们仍用"平面截割法"来研究 $z=x^2+y^2$ 所表示的曲面的形状。设用平面 $z=z_0$ 来截割，则截出的曲线上任一点（x，y，z）必须满足方程组

$$\begin{cases} z=x^2+y^2 \\ z=z_0 \end{cases}$$

将 $z=z_0$ 代入第一式，得

$$x^2+y^2=z_0$$

这是 $z=z_0$ 平面上以 (o,o,z_0) 为圆心，半径为 $\sqrt{z_0}$ 的圆。当 z_0 越大（也就是截面 $z=z_0$ 离 xy 平面越远），所截出的圆也越大。因此，这个曲面的水平截线和例 6 中的圆锥面一样是一系列逐渐增大的圆，但由此能否说它也是一个圆锥面呢？要确切搞清这个曲面的形状，再用 yz 平面来截这个曲面。截出的曲线上的点应满足方程组

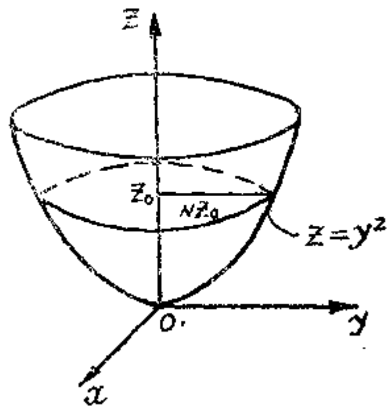


图 7—12

$$\begin{cases} z=x^2+y^2 \\ x=o \end{cases}$$

将 $x=o$ 代入第一式，得

$$z=y^2$$

这样得到的是以 Z 轴为对称轴的一条抛物线。因此 $z=x^2+y^2$ 并不是一个圆锥面，而是由 yz 平面上的抛物线 $z=y^2$ 绕 Z 轴旋转一周所得到的旋转面（图 7—12）。因此，这个曲面叫做旋转抛物面。

例 8　讨论 $x^2+y^2=R^2$ 的图形的形状

在平面解析几何中，我们非常熟悉这个方程，它在 xy 平面表示以原点为圆心，半径为

R 的圆C（图7—13）。现在，我们来讨论这个方程在空间表示什么图形，也就是说，在空间满足这个方程的所有的点构成什么曲面？因为这个方程中不包含z，所以z可以取任意值，只要x、y满足方程$x^2+y^2=R^2$就可以了。我们知道圆周C上任一点$(x_1, y_1, 0)$满足方程，所以对任意的z，点(x_1, y_1, z)也满足方程。显然，$(x_1, y_1, 0)$、(x_1, y_1, z)这两点的连线与z轴平行。由此得到：满足方程$x^2+y^2=R^2$的点的全体，就是过圆C上任一点作与z轴平行的直线所构成的曲面。显然，这是一个圆柱面，它以z轴为对称轴。图7—13中就是这个圆柱面的一部份。

从讨论这个例子的方法可以看出，任意一个不包含z的方程，在空间所表示的曲面一定是一个柱面。它是通过这个方程在xy平面上所表示的曲线上的任一点，作与z轴平行的直线（叫柱面的母线）所构成的柱面。应该注意，这里所讲的柱面也包括平面，即将平面看成一种特殊的柱面。例如$2x-y-4=0$就是过xy平面上的直线$2x-y-4=0$且与z轴平行的平面。

同样，一个方程如缺少x或缺少y，都表示柱面，只不过柱面的母线分别与x轴或y轴平行。

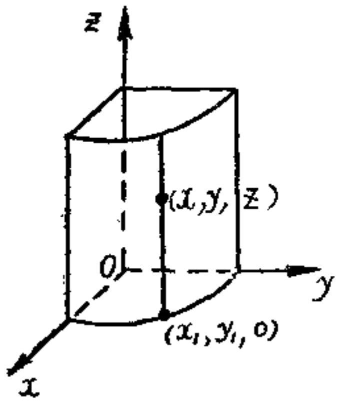


图7—13

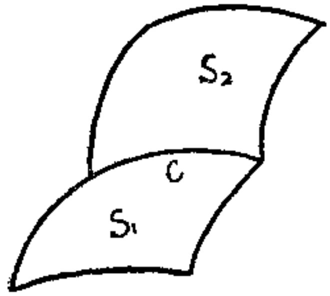


图7—14

4）空間曲綫的方程

前面讲过，一个方程在空间表示一个曲面。空间的一条曲线C可以看成两个曲面S_1和S_2的交线（图4—14）。因此，曲线上的点的座标应该满足这两个曲面的方程。反过来，如果一个点的座标，同时满足两个曲面S_1和S_2的方程，那么这个点既要在S_1上，又要在S_2上，所以必然在它们的交线C上。如此，在一般情况下，空间曲线是用两个方程表示的。这两个方程联立叫做曲线的方程。例如，我们要表示xy平面上以座标原点为圆心，半径为R的圆C就不能只用一个方程

$$x^2+y^2=R^2$$

来表示。因为，在空间这个方程表示一个圆柱面，而不表示一个圆。为要表示圆C，就需要两个方程，如

$$\begin{cases} x^2+y^2=R^2 \\ z=0 \end{cases}$$

即把圆C看成是上面这个园柱面与xy平面的交线。当然，也可以表示成

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=R^2 \\ z=0 \end{cases}$$

这是将圆 C 看成为第一个方程所表示的球面与 $x\ y$ 平面的交线。

习　题　五

1. 下列这些方程在空间表示什么图形。

　① $x^2+y^2+z=0$　　② $z=1-x^2-y^2$

　③ $z=4x^2+y^2$　　④ $z=1-4x^2-y^2$

　⑤ $y^2+z^2=1$　　⑥ $2x-y=2$

　⑦ $y=\sin x$　　⑧ $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{z^2}{9}=1$

2. 下列方程组表示什么曲线

　① $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=49 \\ z=-5 \end{cases}$　　② $\begin{cases} x=y \\ z=1 \end{cases}$

3. 怎样用方程表示 z 轴？

4. 方程组

$$\begin{cases} x^2+y^2=R^2 \\ x^2+y^2+z^2=4R^2 \end{cases}$$

表示什么曲线？表示几条曲线？能不能用另外的方法表示出这些曲线来？

四、两个向量的向量积

两个向量的数量积是从物理问题（如作功问题）抽象出来的一种向量的乘积。两个向量还有另一种乘积，叫做向量积。它反映另一类物理现象。我们从物理模型出发。如图 7—15 所示，一载有电流强度为 I 的导线 l，把它放在一个均匀磁场 $\vec{B}$ 中。磁场和载流导线就会发生相互作用。结果在导线上作用一个力 $\vec{F}$。这个力的大小等于

$$I\,|\vec{l}|\,|\vec{B}|\,\sin\theta$$

这里 $|\vec{l}|$ 为导线的长，$\vec{l}$ 的方向即电流的方向，θ 为 $\vec{l}$ 与 $\vec{B}$ 的夹角。$\vec{F}$ 的方向垂直于 $\vec{l}$ 和 $\vec{B}$，且符合于"右手螺旋方向"。所谓"右手螺旋方向"是指：当右手姆指伸直，其它四指指向 $\vec{l}$ 的正方向，如果这四个指头向身体方向转动 θ 角（θ 是一个小于180°的角）能到达 $\vec{B}$ 时，姆指所指的方向就是 $\vec{F}$ 的方向。

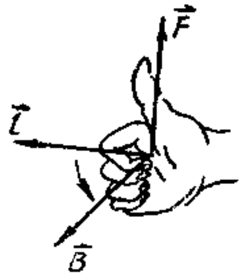


图 7—15

我们从这个物理模型抽象到一般的概念：设有任意两个不平行的向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$，可以用下列两个规则确定另一向量 $\vec{c}$：

（1）$\vec{c}$的长度为$|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$，$\theta$为$\vec{a}$、$\vec{b}$间的夹角。

（2）$\vec{c}$的正方向是由$\vec{a}$到$\vec{b}$按“右手螺旋方向”确定的方向。

这个由$\vec{a}$、$\vec{b}$唯一确定的向量$\vec{c}$，叫做$\vec{a}$与$\vec{b}$的向量积，记作

$$\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$$

如果$\vec{a}$、$\vec{b}$为平行向量(即$\theta=0$)，或$\vec{a}$、$\vec{b}$中有零向量，规定$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$

有了向量积的概念，上面载流导线受到磁場的作用力$\vec{F}$可以表示为

$$\vec{F}=I(\vec{l}\times\vec{B})$$

即$\vec{F}$等于$\vec{l}$与$\vec{B}$的向量积的I倍。

值得注意的是：两个向量间有两种不同的乘积，一种乘积是数量，叫数量积；另一种乘积是向量，叫向量积。为了区别这两种乘积，数量积的乘号用“·”表示，所以数量积又叫“点积”；向量积的乘号用“×”表示，所以向量积又叫“叉积”。我们知道，两个数量的乘积，如a乘b，既可以写成$a\cdot b$，也可以写成$a\times b$，还可以写成$a\ b$。但对于两个向量$\vec{a}$和$\vec{b}$，$\vec{a}\cdot\vec{b}$与$\vec{a}\times\vec{b}$表示完全不同的内容。因此，不能混淆起来。而且，都不能写成$\vec{a}\,\vec{b}$。

根据向量积的意义，不难求出基本单位向量$\vec{i}$、$\vec{j}$、$\vec{k}$间的向量积：

$$\left.\begin{array}{lll}\vec{i}\times\vec{i}=0, & \vec{j}\times\vec{j}=\vec{0}, & \vec{k}\times\vec{k}=0\\ \vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}, & \vec{j}\times\vec{k}=\vec{i}, & \vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}\\ \vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k}, & \vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i}, & \vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j}\end{array}\right\}\qquad(1)$$

显然这里$\vec{i}\times\vec{j}$不等于$\vec{j}\times\vec{i}$，它们差个负号。就是说两个向量的向量积不符合交换律。根据向量积的意义，可以看出，对任意的两个向量，如果调换它们在向量积中的前后次序，向量积就要差个负号。即

$$\vec{a}\times\vec{b}=-(\vec{b}\times\vec{a})$$

对于向量积，结合律与分配律都是符合的，即

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$$

$$\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$$

$$(\vec{b}+\vec{c})\times\vec{a}=\vec{b}\times\vec{a}+\vec{c}\times\vec{a}$$

这些不证明了。

怎样从两个向量的座标表示

$$\vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k},\qquad \vec{b}=b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k}$$

写出$\vec{a}\times\vec{b}$的座标表示呢？利用分配律和上面的(1)式，可以算出

$$\vec{a}\times\vec{b}=(a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k})\times(b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k})$$

$$=a_1b_1\vec{i}\times\vec{i}+a_2b_2\vec{j}\times\vec{j}+a_3b_3\vec{k}\times\vec{k}$$
$$+a_1b_2\vec{i}\times\vec{j}+a_2b_3\vec{j}\times\vec{k}+a_3b_1\vec{k}\times\vec{i}$$
$$+a_2b_1\vec{j}\times\vec{i}+a_3b_2\vec{k}\times\vec{j}+a_1b_3\vec{i}\times\vec{k}$$
$$=0+0+0+a_1b_2\vec{k}+a_2b_3\vec{i}+a_3b_1\vec{j}$$
$$-a_2b_1\vec{k}-a_3b_2\vec{i}-a_1b_3\vec{j}$$
$$=(a_2b_3-a_3b_2)\vec{i}+(a_3b_1-a_1b_3)\vec{j}+(a_1b_2-a_2b_1)\vec{k}$$

这个结果，如用下面行列式表示，就比较容易记忆了。

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}\tag{2}$$

下面，我们举两个应用向量积解决几何问题的例：

例 1 求与 $3\vec{i}+2\vec{j}-5\vec{k}$ 和 $-2\vec{i}-\vec{j}+4\vec{k}$ 都垂直的单位向量。

首先，利用向量积求出与这两个向量都垂直的一个向量

$$\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & 2 & -5\\ -2 & -1 & 4\end{vmatrix}=3\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$$

这个向量的长为

$$\sqrt{3^2+2^2+1}=\sqrt{14}$$

因此，所求单位向量共有两个，它们是

$$\frac{3\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}}{\sqrt{14}},\qquad -\frac{3\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}}{\sqrt{14}}$$

例 2 求过下列三点

$$P_1(2,\ 3,\ -3),\qquad P_2(0,\ -2,\ 1),\qquad P_3(-3,\ 4,\ 1)$$

的平面的方程

首先我们先求出这个平面的一个法线向量。作出平面上的两个向量

$$\overrightarrow{P_1P_2}=-2\vec{i}-5\vec{j}+4\vec{k}$$
$$\overrightarrow{P_1P_2}=-5\vec{i}+\vec{j}+4\vec{k}$$

显然，$\overrightarrow{P_1P_2}\times\overrightarrow{P_1P_3}$ 是所求平面的一个法线向量，写出它的座标表示式

$$\overrightarrow{P_1P_2}\times\overrightarrow{P_1P_3}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -2 & -5 & 4\\ -5 & 1 & 4\end{vmatrix}=-24\vec{i}-12\vec{j}-27\vec{k}$$

有了法线向量，平面又通过 $P_1(2,\ 3,\ -3)$ 点，故所求平面方程为