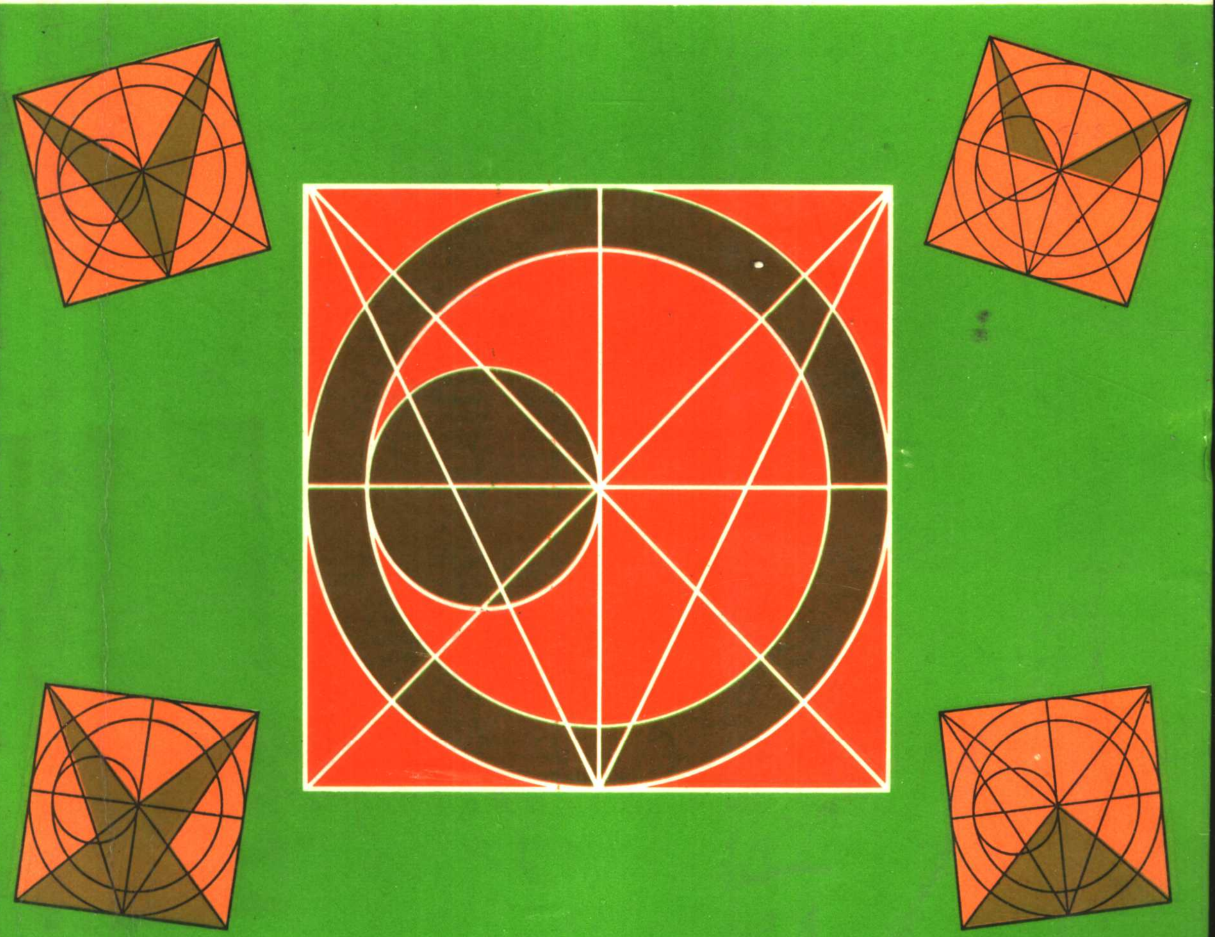
實用工程數值方法

——適用Apple Ⅱ BASIC語言——

陳明輝・李宗隆　編譯

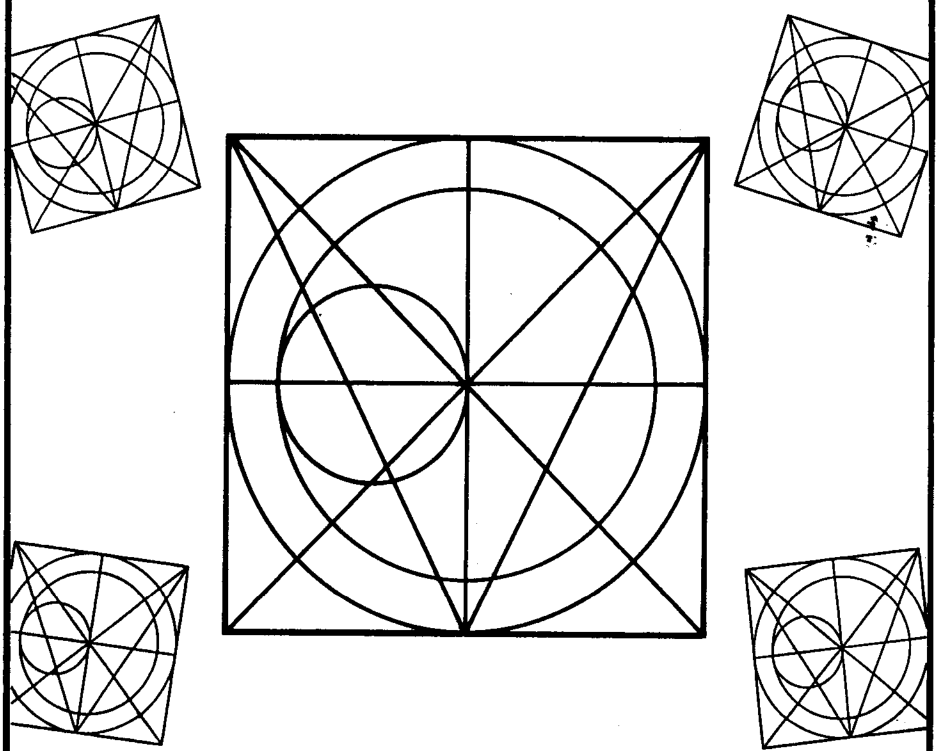


全華科技圖書股份有限公司　印行

實用工程數值方法

——適用Apple II BASIC語言

陳明輝・李宗隆　編譯



全華科技圖書股份有限公司　印行

實用工程數值方法

陳明輝
李宗隆　編譯

出版者　全華科技圖書股份有限公司
北市龍江路76巷20-2號
電話：581-1300・541-5342
581-1362・581-1347
郵撥帳號：100836
發行人　陳本源
印刷者　建發彩色印刷廠
定價　新臺幣 190 元
初版　[redacted]73年4月

序　言

數值方法對研習理工科系的同學而言是一門非常重要的課程，許多科學和工程上的問題計算上相當繁雜，但只要寫好程式，我們就可以利用計算機非常容易的解決這些繁雜的問題。目前個人電腦相當普遍，許多較簡單的數值問題都可以用家裏的個人電腦來解決。

但是在使用數值方法的程式時不知道其所根據的數學理論是什麼的話，這是相當危險的，所以不希望只是這樣迷糊的使用程式。

本書的程式是以APPLESOFT 寫成的，在程式之前都先討論這個方法的來源，最後還有程式執行結果之例題，希望盡可能詳細的討論到程式裏用到的數值方法。

本書的所有程式均採用自 John Heilborn 著的Science and Engineering Programs Apple Ⅱ Edition 書中較重要之程式，且已經訂正原書多處的錯誤。至於理論部份主要是參考Kuo 著的Computer Applications of Numerical Methods和其他許多有關數值方法的書籍。

這本書的寫成，首先要感謝學校之圖書館提供了我很多參考資料和書寫的地方，也要感謝台大計算機研習社提供給我機器，還有許多好友的鼓勵才得以完成這本書。

無論如何，本人才疏學淺，本書雖經多次校對但錯誤在所難免，不妥之處尚祈諸位先進不吝指正。

陳明輝
李宗隆　謹識

[redacted]72 年8月

編輯部序

「系統編輯」是我們的編輯方針，我們所提供給您的，絕不只是一本書，而是關於這門學問的所有知識，它們由淺入深，循序漸進。

數值方法對研習理工科的同學而言是一門非常重要課程，許多科學和工程上的問題計算上相當繁雜，但只要寫好程式即可利用計算機解決這些問題。近年來個人電腦相當普遍，因此，可利用它配合理想的軟體程式，以解大部份複雜的計算。本書具有如下特點：

① 本書以常用的APPLESOFT爲基礎，並例舉數值方法的程式供讀者參考。

② 理論部份的數學式，儘量以淺顯爲主，易於瞭解。

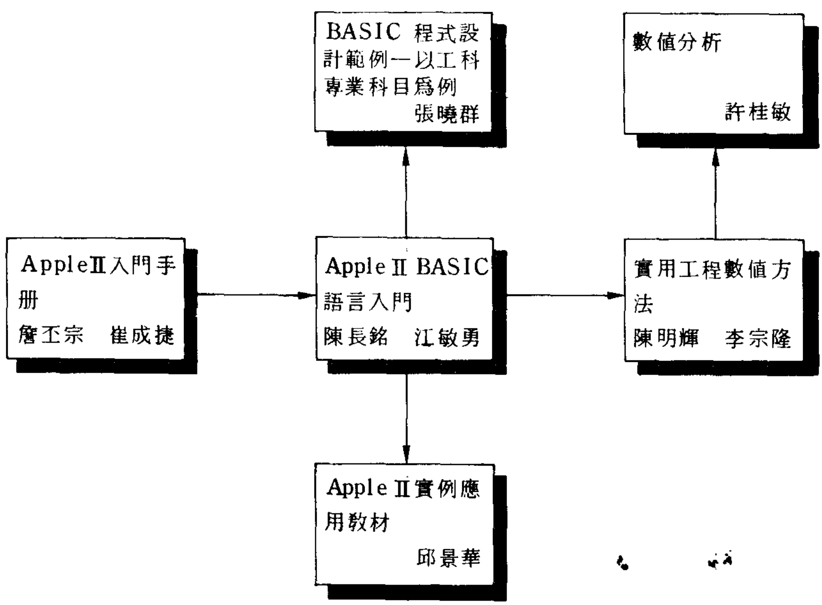
③ 本書爲便於讀者使用該程式，例舉詳細流程圖，供讀者對照使用。

④ 本書所例舉之實例，均以實用爲主，可將工程上問題一一代入解之。

同時，爲了使您能有系統且循序漸進研習數值方法方面叢書，我們以流程圖方式，列出各有關圖書的閱讀順序，以減少您研習此門學問的摸索時間，並能對這門學問有完整的知識。若您在這方面有任何問題，歡迎來函連繫，我們將竭誠爲您服務。

[redacted]

流程圖：



BASIC 程式設計範例—以工科專業科目爲例
張曉群
數值分析
許桂敏
AppleⅡ入門手冊
詹丕宗 崔成捷
Apple Ⅱ BASIC語言入門
陳長銘 江敏勇
實用工程數值方法
陳明輝 李宗隆
Apple Ⅱ實例應用教材
邱景華

目　　錄

第六章　常微分方程式

第七章　數值積分

第八章　簡單熱力問題

第九章　各類問題應用

內插法
(Interpolation)

1.1 拉格蘭吉內插法(Lagrangian Interpolation)

假設我們已經知道某一未知曲線上的 $n+1$ 個點：

$$(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots\cdots, (x_n, y_n), \tag{1.1-1}$$

當我們要求 x_0 到 x_n 範圍之內某一非已知點 x 所對應的 y 值時，就牽涉到內插法。

拉格蘭吉內插法就是以一 n 次多項式：

$$y = c_0 x + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots\cdots + c_n x^n \tag{1.1-2}$$

來逼近原來未知曲線，以求 x_0 到 x_n 範圍內任一點之內插值。

我們希望式(1.1-2)必須通過式(1.1-1)中的各點，即

$$P_n(x_k) = y_k \qquad (k=0, 1, 2, \cdots\cdots, n) \tag{1.1-3}$$

定義 n 次拉格蘭吉多項式 $L_k(x)$ 爲：

$$L_k(x_i) = \begin{cases} 0, 當\ i \neq k \\ 1, 當\ i = k \end{cases} \tag{1.1-4}$$

其中 x_i，$(i=0, 1, 2, \cdots\cdots, n)$ 爲已知的 $n+1$ 個點，所以 $P_n(x)$ 可以寫成下列之形式

$$\begin{aligned} P_n(x) &= L_0(x)y_0 + L_1(x)y_1 + \cdots\cdots + L_n(x)y_n \\ &= \sum_{k=0}^{n} L_k(x)y_k \end{aligned} \tag{1.1-5}$$

因爲當 x_k $(k=0, 1, 2, \cdots\cdots, n)$ 代入式(1.1-5)可以得到式(1.1-3)：另一方面，式(1.1-4)可被 $(x-x_i)$ 整除（但 $i \neq k$），所以

$$L_k(x) = \alpha(x-x_0)(x-x_1)\cdots\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots\cdots(x-x_n) \tag{1.1-6}$$

其中 $(x-x_k)$ 項沒有出現。

條件 $L_k(x_k) = 1$，可以用來決定 α

$$\alpha=\frac{1}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\cdots\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots\cdots(x_k-x_n)} \tag{1.1-7}$$

式（1.1-7）代入式（1.1-6）可得到：

$$L_k(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\cdots\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots\cdots(x_k-x_n)}$$

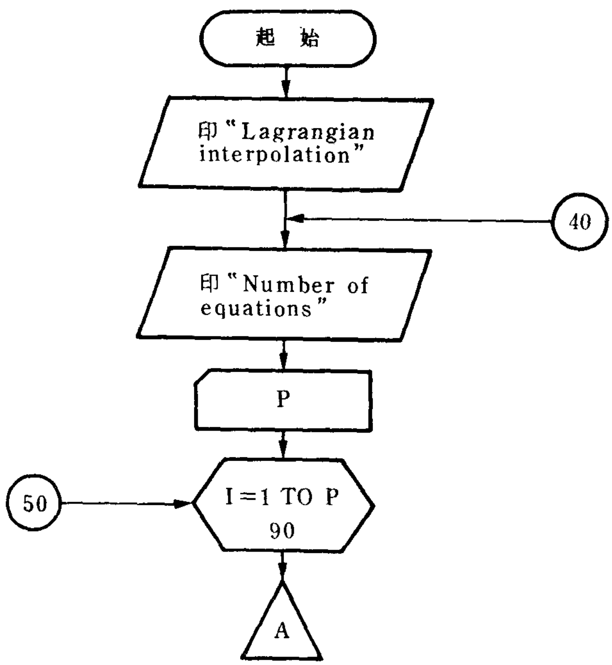
$$=\prod_{i=0,\ i\neq k}^{n}\frac{(x-x_i)}{(x_k-x_i)} \tag{1.1-8}$$

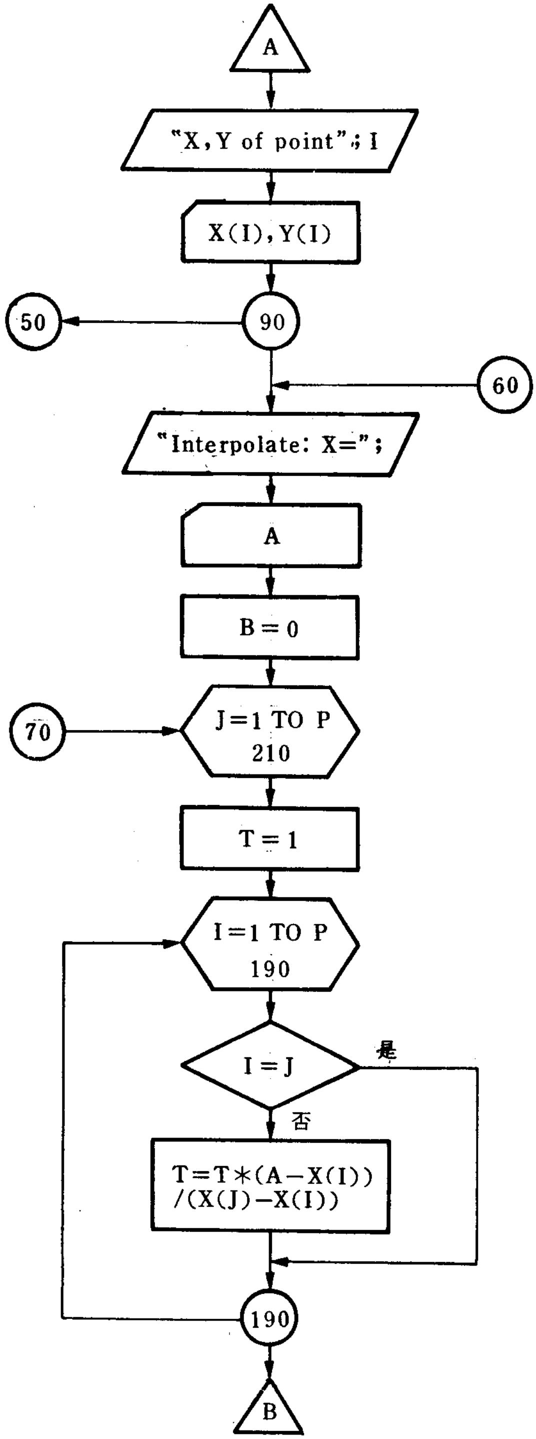
式（1.1-8）代入式（1.1-5）得到：

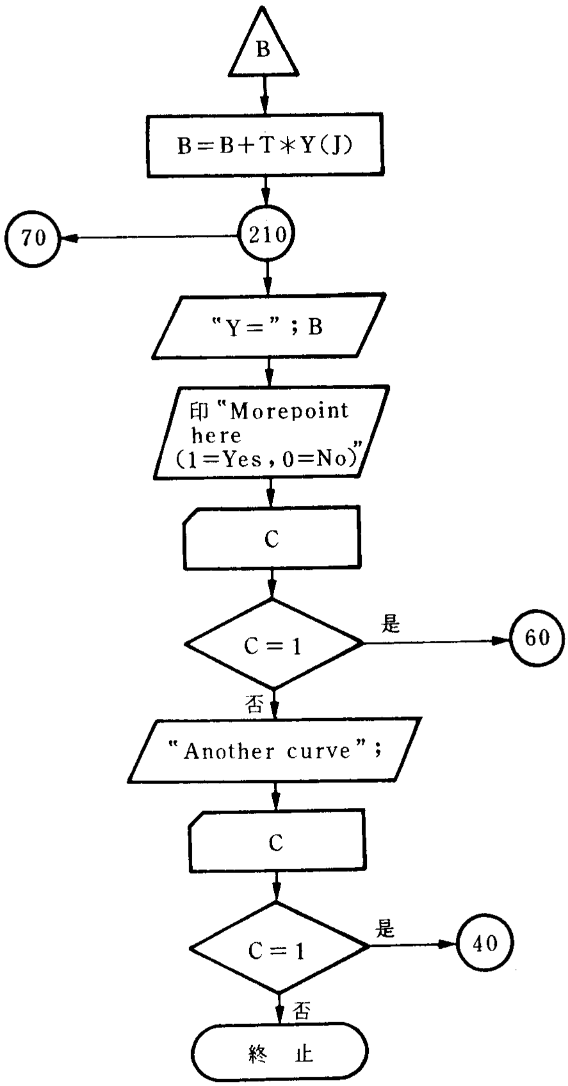
$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\left[\prod_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{n}\left(\frac{x-x_i}{x_k-x_i}\right)\right]y_k \tag{1.1-9}$$

可知，式（1.1-9）爲所求。其流程圖及程式。

流程圖：




A
"X, Y of point"; I
X(I), Y(I)
50
90
60
"Interpolate: X=";
A
B = 0
70
J=1 TO P
210
T = 1
I=1 TO P
190
I = J
是
否
T=T*(A-X(I))
/(X(J)-X(I))
190
B



程式：

```
5  HOME
10  PRINT "LAGRANGIAN INTERPOLATION"
20  PRINT
30  DIM X(50),Y(50)
40  PRINT "NUMBER OF KNOWN POINTS";
50  INPUT P
60  FOR I = 1 TO P
70  PRINT "X,Y OF POINT";I;
80  INPUT X(I),Y(I)
```

```
90  NEXT I
100  PRINT
110  PRINT "INTERPOLATE: X= ";
120  INPUT A
130 B = 0
140  FOR J = 1 TO P
150 T = 1
160  FOR I = 1 TO P
170  IF I = J THEN 190
180 T = T * (A - X(I)) / (X(J) - X(I))
190  NEXT I
200 B = B + T * Y(J)
210  NEXT J
220  PRINT "                    Y=   ";B
230  PRINT
240  PRINT "MORE POINTS HERE";
245  PRINT "(1=YES,0=NO)";
250  INPUT C
260  IF C = 1 THEN 100
270  PRINT "ANOTHER CURVE";
280  INPUT C
290  IF C = 1 THEN 40
300  END
```

例題：

考慮曲線 $y=x^3-3x+3$・已知（－3，－15），（－2，1），（－1，5），（0，3），（1，1），（2，5）與（3，21）諸點均在此曲線上。求當 $x=-1.65$ 及0.2時之 y 值。

下列各點是在sin曲線上的點，求當－2.47，和1.5時之函數值。

(−5,0.958)	(0,0)
(−4,0.757)	(1,0.841)
(−3,−0.141)	(2,0.909)
(−2,−0.909)	(3,0.141)
(−1,−0.841)	(4,−0.757)
	(5,−0.959)

執行結果：

```
LAGRANGIAN INTERPOLATION

NUMBER OF KNOWN POINTS?7
X,Y OF POINT1?-3,-15
X,Y OF POINT2?-2,1
X,Y OF POINT3?-1,5
```

```
X,Y OF POINT4?0,3
X,Y OF POINT5?1,1
X,Y OF POINT6?2,5
X,Y OF POINT7?3,21

INTERPOLATE: X= ?-1.65
             Y=  3.457875

MORE POINTS HERE(1=YES,0=NO)?1

INTERPOLATE: X= ?.2
             Y=  2.408

MORE POINTS HERE(1=YES,0=NO)?0
ANOTHER CURVE?1
NUMBER OF KNOWN POINTS?11
X,Y OF POINT1?-5,.958
X,Y OF POINT2?-4,.757
X,Y OF POINT3?-3,-.141
X,Y OF POINT4?-2,-.909
X,Y OF POINT5?-1,-.841
X,Y OF POINT6?0,0
X,Y OF POINT7?1,.841
X,Y OF POINT8?2,.909
X,Y OF POINT9?3,.141
X,Y OF POINT10?4,-.757
X,Y OF POINT11?5,-.959

INTERPOLATE: X= ?-2.47
             Y=  -.621839596

MORE POINTS HERE(1=YES,0=NO)?1

INTERPOLATE: X= ?1.5
             Y=  .9971638

MORE POINTS HERE(1=YES,0=NO)?0
ANOTHER CURVE?0
```

1.2 三次曲線尺內插法(Cubic Spline Interpolation)

令 x_1，x_2，……，x_n為不同之點，有下列關係：

$$a=x_1<x_2<x_3<\cdots\cdots<x_n=b$$

且令 f_1，f_2，……，f_n為在這些點對應的函數值。三次曲線尺內插法是以一定

義於$[a, b]$之函數$s(x)$內插這些數據，$s(x)$必須有下列之性質：

(1) $s(x_k)=f_k$，$k=1, 2, 3, \cdots\cdots, n$

(2) $s(x)$，$s'(x)$和$s''(x)$在$[a, b]$區間內爲連續。

(3) 在每一個次區間$[x_k, x_{k+1}]$，$k=1, 2, \cdots\cdots, n$，$s(x)$爲一三次多項式。（但在不同之次區間，$s(x)$可能有不同之三次內插多項式。）

(4) 假如$g(x)$爲另一個滿足(1)、(2)和(3)的函數，則

$$\int_a^b [s''(x)]^2\,dx \leq \int_a^b [g''(x)]^2\,dx$$

上列的性質也可以敍述如下：

(1) 曲線尺必須經過所有的已知點。

(2) 曲線尺沒有斷掉，且不可以彎成尖角。

(3) 由薄梁之理論可證明，在兩個已知點之間曲線尺之形狀接近於一條三次曲線。

(4) 曲線尺之形狀含有最小之位能（位能正比於曲率，即正比於二次導函數）。第(4)個性質，在程式上很難公式化，但由第(4)個性質可以證明。

(4)′ $s''(a)=s''(b)=0$

我們定義三次曲線尺函數爲滿足(1)、(2)、(3)和(4)′等條件的函數$s(x)$。

即然$s(x)$在$x_k \leq x \leq x_{k+1}$的範圍內爲一三次多項式，很顯然的，$s''(x)$是線性的。由線性內插法，我們知道

$$s''(x)=s''(x_i)+\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}[s''(x_{i+1})-s''(x_i)]$$

$$x_i \leq x \leq x_{i+1} \qquad (1.2\text{-}1)$$

將式(1.2-1)積分可得到：

$$s'(x)=s'(x_i)+\int_{xi}^{x} s''(x)\,dt$$

$$=s'(x_i)+s''(x_i)(x-x_i)+\frac{s''(x_{i+1})-s''(x_i)}{2(x_{i+1}-x_i)}(x-x_i)^2$$

$$x_i \leq x \leq x_{i+1} \qquad (1.2\text{-}2)$$

再積分式（1.2-2），且根據性質（i），以 f_i 取代 $s(x_i)$，可以得到：

$$s(x)=f_i+s'(x_i)(x-x_i)+\frac{s''(x_i)}{2}(x-x_i)^2$$
$$+\frac{s''(x_{i+1})-s''(x_i)}{6(x_{i+1}-x_i)}(x-x_i)^3$$
$$x_i\le x\le x_{i+1} \qquad (1.2\text{-}3)$$

以 s_k'' 代替 $s''(x_k)$，且令 $h_k=x_{k+1}-x_k$，$k=1,2,\cdots\cdots,n-1$ 然後，在式（1.2-2）中以 $i-1$ 代換 i，且令 $x=x_i$，可以得到：

$$s'(x_i)=s'(x_{i-1})+½(s''_i+s_{i-1}'')h_{i-1} \qquad (1.2\text{-}4)$$

在式（1.2-3）中令 $x=x_{i+1}$，求解 $s'(x_i)$：

$$s'(x_i)=\frac{f_{i+1}-f_i}{h_i}-s_{i+1}''\frac{h_i}{6}-s_i''\cdot\frac{h_i}{3} \qquad (1.2\text{-}5)$$

式（1.2-4）之右邊等於式（1.2-5）之右邊：

$$s'(x_{i-1})+\frac{s_i''+s_{i-1}''}{2}h_{i-1}=\frac{f_{i+1}-f_i}{h_i}-s_{i+1}''\frac{h_i}{6}-s_i''\frac{h_i}{3} \qquad (1.2\text{-}6)$$

式（1.2-5）中以 $i-1$ 代換 i，然後將 $s'(x_{i-1})$ 代入式（1.2-6）內，化簡之後得到：

$$h_{i-1}s_{i-1}''+2(h_{i-1}+h_i)s_i''+h_is_{i+1}''=6\left(\frac{f_{i+1}-f_i}{h_i}-\frac{f_i-f_{i-1}}{h_{i-1}}\right)$$
$$i=2,3,4,\cdots\cdots,n-1 \qquad (1.2\text{-}7)$$

式（1.2-7）爲一組 $n-2$ 條 s_2''，s_3''，……，s_{n-1}'' 之線性方程組。s_1''，s_n'' 之值由性質(4)′決定。只要 s_k''，$k=2,3,\cdots\cdots,n-1$，可以求出，$s(x)$ 值就可以由式（1.2-3）和式（1.2-6）求出。

假設以 d_i 表示式（1.2-7）之右邊，且應用 $s_1''=s_n''=0$ 之條件，將式（1.2-7）全部寫出來：