集 合 论 讲 义

上 册

张 锦 文

北京广播电视大学印

前　言

集合论是一门现代数学，它属于纯数学领域，而且几乎涉及到一切数学分支。著名的连续统问题、选择公理，尤其后者已成为许多分支的一个基本概念了。同时，集合论又是离散数学结构的一个重要方面，它作为一个数学语言已普遍用于数学各分支，也正在向计算机科学的各种领域（首先是作为一个语言、一个表达工具）渗透。人们也试图用公理集合论避免逻辑悖论的方法去避免程序语言中遇到的逻辑困难问题。

集合论是现代数学的引论和基础，事实上，现代数学正是从它开始的，它于上世纪七十年代由德国数学家 G.Cantor 所创立，它不仅应是大学数学系学生，计算机科学系学生的必修课程，而且它的初等部分已列入中学课程。因此，中学数学教师应该有较好的集合论训练。

学习集合论不仅应学习它的数学知识，而且更重要的是应通过它进行逻辑思维和逻辑表达力的训练。

虽然公理集合论是数理逻辑的一个重要分支，而且本书也是按公理方法的基本要求展开的，但是本书仍是以初等集合论为中心，并且不假定读者已经学过数理逻辑课程，而且我们打算用它作为学习数理逻辑的一个入门和途径。本书为命题逻辑和谓词逻辑提供了一个直观背景，我想，在本书的基础上再读命题逻辑和谓词逻辑应该是更易于理解和掌握了。

由于缺少经验，水平有限，错误缺点在所难免，欢迎批评指正。

张锦文

1981.12.4.

目　　录

第五章　关系、函数

第六章　集合的秩和递归定理

第七章　偏序结构与良基关系

第一章 基本概念

集合论是一门现代数学，它从集合这一基本概念开始，使用几条基本原则，可以建造起整个数学大厦。

集合论从基本概念一集合着手，引伸出大量有趣的问题，不仅使人发省，简直是引人入胜，唤起人们对它进行研究。

§1 集合的概念

什么是集合呢？这是一个不加定义的概念。事实上，每个人都知道许多集合。集合就是把人们的直观或思维中的某些确定的能够区分的对象汇集在一起，使之成为一个整体（或称单体），这一整体就叫做一个集合。组成这一集合的这些对象就称为这一集合的元素或简称元、任意类型的对象都可以作为一集合的元素，特别地集合也可以作为对象，亦即一集合可以是其它集合的元素。

〔例1〕甲班的全体学生组成一个集合。

我们可以把这一集合记做S_1，如果张三是甲班的一个学生，我们就说张三是集合S_1的一个元素，并记做“张三$\in S_1$”，其中符号“$\in$”表示“属于”或“元素关系”。因此，“张三$\in S_1$”可以读做“张三属于S_1”，或“张三是S_1的一个元素”，也就是“张三是甲班的一个学生”。如果李四不是甲班的一个学生，我们就记做：“李四$\notin S_1$”，意思是指：“李四不是S_1的一个元素”。而“王五$\in S_1$”表示“王五是S_1的一个元素”。

〔例2〕这一黑板上写了而且只写了：2，3，7，8这样几个数字，我们把这些数字组成的集合记做S_2。

这时，有：$2\in S_2$，$3\in S_2$，$4\notin S_2$，$5\notin S_2$，等等。

在例1中，我们把甲班的学生汇集成一个集合S_1，为什么能够这样汇集呢？因为“一个学生是否在甲班”这是确定的，张三是甲班的学生，李四不是甲班的学生，这些都已确定，不会含混。同时，甲班的若干个学生相互都是能够区别的，虽然，张三、王五都是甲班的学生，但这是两个不同的学生，这些都是我们的常识所知道的。

又，比如甲班的女生可以组成一个集合，甲班的男生同样也可以组成一个集合，因为这些对象都是“确定的，能够区分的”。但是，“甲班的高个子”就不能组成一个集合，这是因为，什么叫“高个子”？这是一个不确定的、不清晰的概念，身高一米八的是高个子，身高一米七的、一米六八的算不算高个子呢？这些没有一个确定的界限。这类不清晰的对象不是古典集合论的对象，不能形成我们现在讲的“集合”。+

+现代数学的一个领域——弗晰（Fuzzy）集合论，是研究不清晰对象所组成的弗晰集合及其应用的理论。

在例2中，S_2的元素为2，3，7，8，有时也把S_2记做{2，3，7，8}。凡是它的元素都写在花括号中，不是它的元素都不写入花括号内。

〔例3〕数0，1，2，3，…叫自然数。在本书中，我们把所有自然数组成的集合记做N。

0，1，2，3，都是自然数，都是N的元素。1000是一自然数，所以是N的元素，即$1000\in N$，当然，123789也是一自然数，所以$123789\in N$。但是，-2不是自然数，因此$-2\notin N$。

我们还可以从集合N形成许多新的集合，比如：小于10的所有自然数的集合，100与1000之间的所有自然数的集合，所有奇数的集合，所有偶数的集合，所有平方数的集合，等等。

〔例4〕数…，-3，-2，-1，0，1，2，3，…叫整数，所有整数组成的集合记做Z。

注意：每一个自然数都是一整数，反之并不成立。

〔例5〕形式为$\frac{p}{q}$（其中p、q都是整数，$q\neq 0$；为方便起见，可以假定p、q互素）的数叫有理数，所有有理数组成的集合记做Q。

这样，我们有$2\in Q$，$-3\in Q$，$-2\in Q$，$\frac{1}{2}\in Q$，$\frac{5}{3}\in Q$，$\sqrt{2}\notin Q$，等等。

〔例6〕所有实数组成的集合记做R。

这样，我们有：$2\in R$，$-2\in R$，$3\in R$，$-3\in R$，$\frac{1}{2}\in R$，$-\frac{1}{2}\in R$，$\frac{5}{3}\in R$，$\sqrt{2}\in R$，$-\sqrt{2}\in R$，$\pi\in R$，（π为圆周率），$\sqrt{-1}\notin R$，等等。

还可以有更复杂的集合，也可以把一些集合汇合起来组成新的集合。例如，令S是这样的一集合，它的元素恰好是N、Z、Q、R，亦即+

$S:=\{N, Z, Q, R\}$。

这个集合恰有四个元素N、Z、Q、R，即$N\in S$，$Z\in S$，$Q\in S$，$R\in S$，但是$2\notin S$，$3\notin S$。

上述“$\in$”是集合论中一个基本的关系，是元素与集合之间的“类属关系”。我们已经指出：$2\in N$，$N\in S$，但$2\notin S$。如果令$S':=\{2, N\}$，我们才有$2\in N$，$N\in S'$，且$2\in S'$。

这样，由$S_1\in S_2$且$S_2\in S_3$，不一定就有$S_1\in S_3$。究竟如何，要看具体的集合S_1、S_2、S_3是什么而决定，要看他们含有哪些元素而决定。一集合由它的元素所决定，这正是外延原则。我们将在§3中进行讨论。

§2 集合的表示方法

在前边，为了给出一个集合，常常是例举出该集合的元素，这种方法的好处是具有明显性。比如，令集合$S_1:=\{0, 1, 4\}$，我们一眼就看出它只有三个元素，即0，1，4，但是，在有些情况下，这样做是很不方便的，比如令集合S_2为：

+符号：“:=”表示左边是由右边定义出来的，有的书上用“=df”，二者是一个意思。也还有些作者采用符号“$\triangleq$”来表示这一意思。

$\{5832, 6759, 8000, 9261, 10648, 12167, 13824\}$，　　　　　　(1.1)

式（1.1）所确定的集合就有点烦琐了，这样大的数目再多列出几个，那就更复杂甚至无法写出。然而，当我们分析一下S_2的元素的性质时，就会发现这些数都是有规律的，它们是18到24之间的这七个自然数的立方数，亦即当x满足$18\leqslant x\leqslant 24$时，$S_2$的元素恰为$x^3$。这样就有：

S_2：$\{y|\ x$是一自然数，且$18\leqslant x\leqslant 24$ 并且$y=x^3\}$，　　　　　　(1.2)

其中竖杠“｜”的前边是集合S_2的元素，它必须满足竖杠“｜”的后边所列举的条件，亦即“x是一自然数且$18\leqslant x\leqslant 24$并且$y=x^3$”。这个条件也叫做一个性质。(1.2)表明$S_2$的元素都具有性质为“把这个元素开立方，立方根为18与24（包括18和24在内）之间的自然数”。不难验证它的元素恰好是在（1.1）中所列举的那些。由下述外延原则，（1.1）与（1.2）定义了同样的集合。

当我们把（1.2）式中的条件改为“x是一自然数且$10\leqslant x\leqslant 109$ 并且$y=x^3$”时，所定义的集合称为S'_2。如果要用类似于（1.1）式那样的显式去列举S_2'时，那将是很烦琐的事情了。如果把(1.2)式中的条件改为：“x是一有理数且$10\leqslant x\leqslant 109^{2000}$且$y=x^3$”时，这时如果要使用（1.1）那样的显式，枚举这样的集合的全部元素就几乎不可能。为此，为了方便、简便地给出一个集合，就需采用如象（1.2）这样的定义方式。

集合的第三种表示方式就是图形表示法，用一定的图形表示特定的集合。

集合的第四种表示方法是用已知集合和已知运算来表示新的集合。

§3　外延原则

由于一个集合是由它的元素完全决定，而不管它的其他任何性质，那么对于这两个集合，便可以定义“相等”。就是说，任给两个集合S_1和S_2，当且仅当对于每一个元素X；若$X\in S_1$则$X\in S_2$；并且，对于每一个元素X，若$X\in S_2$，则$X\in S_1$，则称集合S_1和S_2相等，记作$S_1=S_2$。上述定义方法是外延性的，称为外延公理。如果采用符号化记法：用“$\forall X$”表示“对于每一X”，用“$X\in S_1\rightarrow X\in S_2$”表示“若$X\in S_1$则$X\in S_2$”，这样，外延公理（$S_1=S_2$当且仅当$S_1$与$S_2$有相同的元素）这一事实可以符号地写成：

外延公理：$S_1=S_2$当且仅当$\forall X(X\in S_1\leftrightarrow X\in S_2)$。

其中$X\in S_1\leftrightarrow X\in S_2$　表示$X\in S_1\rightarrow X\in S_2$并且$X\in S_2\rightarrow X\in S_1$。

这种符号化的记法，对于初学者似乎不太习惯，可能会带来一点困难，其实，只要看多了，用多了，习惯了，这种符号记法将会带来许多好处，它能使你在描述、表达问题时更清晰、严格和简练。

例如，集合$S_1:=\{0, 1, 3\}$，$S_2:=\{3, 1, 0\}$。虽然表面看S_1与S_2不同：元素的顺序不同。由于这两个集合元素完全相同，根据外延公理，有$S_1=S_2$。令$S_3:=\{4, 5, 6\}$，$S_4:=\{0, 1, 4\}$，对于S_1与S_3，因为它们的元素全不相同，故有$S_1\neq S_3$；对于S_1与S_4，它们有一个相同的元素4，但是其它元素就不同了，因此，$S_1\neq S_4$；同理$S_3\neq S_4$

§ 4 子集合

当我们研究集合之间的相互关系时，一集合S_1是否包含在另一集合S_2中，这常常是一件很重要的事情。

定义 1 当集合 S_1的每一个元素也都是集合 S_2的一个元素时，集合S_1称为是集合S_2的一个子集合。这时，记作$S_1 \subset S_2$。即

$S_1 \subset S_2 := \forall X(X \in S_1 \to X \in S_2)$。

S_1不是S_2的子集合，就记作$S_1 \not\subset S_2$

在$S_1 \subset S_2$成立时，也称S_1包含在S_2中，有时也称集合S_2包含集合S_1。

对于$S_1 \subset S_2$、$S_3 \not\subset S_4$，可用图来加以形象地说明（参见图 1）。

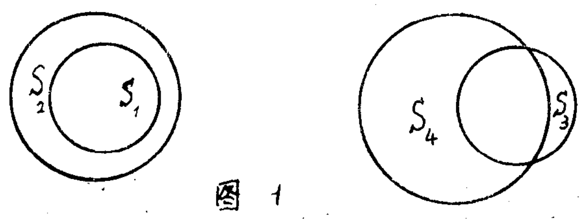


图 1

例如：$\{0, 1\} \subset \{0, 1\}$；

$\{0, 1\} \subset \{0, 1, 2, 3\}$；

$\{\{2\}\} \subset \{0, 1, \{2\}\}$；

$\{0, 2\} \not\subset \{0, 3, 4\}$；

$\{3\} \not\subset \{\{3\}, 4, 2\}$；

$N \subset Z$；

$Z \subset Q$；

$Q \subset R$；

$Q \not\subset N$。

注意：不要把$\in$与$\subset$相混淆，例如：

$\{3\} \not\subset \{\{3\}, 4, 2\}$，但$\{3\} \in \{\{3\}, 4, 2\}$；

$\{1, 3\} \subset \{0, 1, 3\}$，但$\{1, 3\} \notin \{0, 1, 3\}$。

定理 1 对于任给的集合S_1、S_2、S_3，有：

（1）$S_1 \subset S_1$，

（2）$S_1 \subset S_2$且$S_2 \subset S_1$，则$S_1 = S_2$，

（3）$S_1 \subset S_2$且$S_2 \subset S_3$，则$S_1 \subset S_3$。

这个定理的证明是直接从定义，就可以获得的。当然，对（2）还要用到外延原则。

人们也常把（1）称为关于$\subset$的自反性，把（2）称为关于$\subset$的反对称性，而（3）称为关于$\subset$的传递性。

定义 2 当$S_1 \subset S_2$且$S_1 \neq S_2$时，S_1称为S_2的一真子集合。这时，记做$S_1 \subset_{+} S_2$。也就

是说，

$S_1 \subset_+ S_2 :=\forall X(X\in S_1\rightarrow X\in S_2)$。

$\wedge\exists X(X\in S_2 \vee \neg X\in S_1)$。

其中“∧”表示“并且”，而“∃X”表示“有一个X”，或“存在一个X”，$\neg X\in S_1$ 即$X\notin S_1$。

当S_1不是S_2的一真子集合时，就记做$S_1 \not\subset_+ S_2$

例如：

$\{0, 1, \{2\}\}\subset_+\{0, 1, \{2\}, 3\}$；

$\{3, 4\}\subset_+\{2, 3, 4\}$；

$\{2, \{1\}\}\not\subset_+\{2, \{1\}\}$；

$\{1, \{3\}\}\not\subset_+\{1, 3, 4\}$。

§5 概括原则

我们在前边提到的某一定义集合所用的条件也叫做性质，Cantor把所有满足给定性质的元素汇集在一起而成为一个集合，并且称之为概括原则。也就是说：

概括原则 任给一个性质P，那么存在着一个集合S，它的元素恰好是具有性质P的那样的一些对象，亦即

$$S := \{X \mid P(x)\},$$

其中P（X）是“X具有性质P”的一个缩写。这样，就有$\forall X(X\in S\leftrightarrow P(X))$。

这条原则在使用上是强有力的，而且也是很方便的。比如，我们曾给出的集合{2，3，4，8}，可用条件“X＝2或者 X＝3或者 X＝4或者 X＝8”来给出，可记成：

$S_2 := \{X \mid X=2$ 或者 $X=3$ 或者 $X=4$ 或者 $X=8\}$。

在下边，我们用“∨”表示“或者”，用“∧”表示“并且”。

例如：$\{X \mid$“X是一自然数”$\wedge 80\leqslant X^2\leqslant 200\}$就是集合{9，10，11，12，13，14}；

{X｜X是一自然数}就是集合N；

{X｜X＝3}就是集合{3}。

§6 空集合、单元集合和无序对集合

一个没有任何元素的集合叫做空集合，由外延原则，这种集合只有一个，并且常常记做$\varnothing$。

定理2 对于所有的集合S，有 $\varnothing\subset S$。也就是说，空集合是任一集合的子集合。

证明 假定$\varnothing\not\subset S$，那么有一元素X，使得$X\in\varnothing$，$X\notin S$。但这是不可能的，因为$\varnothing$中不可能有一元素X。所以$\varnothing\subset S$。

注意：$\varnothing$是一集合，它没有元素，而$\{\varnothing\}$是一集合，它有一个元素$\varnothing$，所以$\varnothing\neq\{\varnothing\}$，前者一无所有，后者有一容器。

读者可以验证：

（1）$\varnothing\subset\varnothing$，　（2）$\varnothing\notin\varnothing$，

（3）$\varnothing\subset\{\varnothing\}$，　（4）$\varnothing\in\{\varnothing\}$，

（5）$\{\varnothing\}\subset\{\varnothing\}$，　（6）$\{\varnothing\}\notin\{\varnothing\}$，

（7）$\varnothing\subset\{\{\varnothing\}\}$，　（8）$\varnothing\notin\{\{\varnothing\}\}$，

（9）$\{\varnothing\}\not\subset\{\{\varnothing\}\}$，　（10）$\{\varnothing\}\in\{\{\varnothing\}\}$，

（11）$\varnothing\in\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$，　（12）$\{\varnothing\}\in\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$，

（13）$\varnothing\subset\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$，　（14）$\{\{\varnothing\}\}\subset\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$。

恰好含有一个元素的集合，叫做单元集合。

例如$\{\varnothing\}$，$\{1\}$，$\{n\}$，$\{a\}$，$\{N\}$，$\{Q\}$，都是单元集合。上述这六个单元集合的元素分别为$\varnothing$，1，n，a，N，Q。而$\{1,2\}$，$\{1,3,4\}$，N，Q都不是单元集合，因为它们的元素都不只一个；$\varnothing$也不是单元集合，因为它没有元素。

恰好有两个元素的集合，并且这两个元素之间没有一定顺序的，叫做无序对集合。比如，前边提到的$\{1,2\}$就是一个无序对集合，对于$\{1,2\}$，还可以写作$\{2,1\}$。也就是说我们有

$$\{1,2\}=\{2,1\}。$$

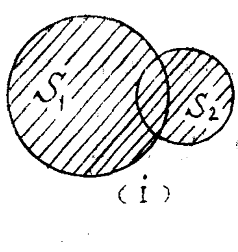
对于任意的对象a、b，无序对集合$\{a,b\}$都等于$\{b,a\}$。另外，$\{N,Q\}$，$\{1,N\}$，$\{R,N\}$都是无序对集合。

还应当注意，就是$\{1,1,2\}=\{1,2\}$。在任一集合中，某一个元素重复出现多次和它只出现一次，其结果没有变化，仍然是相同的集合。因此，$\{a,a\}$就是单元集合$\{a\}$，$\{a,a,a\}$还是单元集合$\{a\}$；而$\{a,a,b\}$，$\{b,b,a\}$也仍然是无序对集合$\{a,b\}$。

§7　集合的并、交和相对补

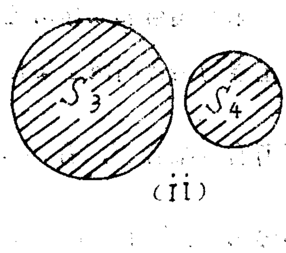
令S_1、S_2是两个集合，我们现在定义第三个集合$S_1\cup S_2$，叫做S_1与S_2的并集合，它是这样的一个集合，它的元素至少是属于S_1和S_2二者之一（见图2），即：

定义3　$S_1\cup S_2:=\{X\mid X\in S_1\vee X\in S_2\}$。



（i）

图 2



（ii）

根据概括原则，$S_1\cup S_2$是一个集合，并且对于所有的X，

有$X\in S_1\cup S_2\leftrightarrow X\in S_1\vee X\in S_2$。亦即：

$\forall X(X\in S_1\cup S_2\leftrightarrow X\in S_1\vee X\in S_2)$。

例如：$\{1, 2, 3\} \cup \{4, 5\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$；

$\{1, 2, 3\} \cup \{3, 4\} = \{1, 2, 3, 4\}$；

$\{2, 3\} \cup \{3\} = \{2, 3\}$；

$\{2, 3\} \cup \varnothing = \{2, 3\}$；

$\{2, 3\} \cup \{2, 3\} = \{2, 3\}$。

定理 3 对于任给集合S_1、S_2、S_3，有：

（1）析等律：$S_1 \cup S_1 = S_1$；

（2）交换律：$S_1 \cup S_2 = S_2 \cup S_1$；

（3）结合律：$S_1 \cup (S_2 \cup S_3) = (S_1 \cup S_2) \cup S_3$。

证明 对于任意的X，

$$X \in S_1 \cup S_1 \leftrightarrow X \in S_1 \vee X \in S_1$$
$$\leftrightarrow X \in S_1;$$
$$X \in S_1 \cup S_2 \leftrightarrow X \in S_1 \vee X \in S_2$$
$$\leftrightarrow X \in S_2 \vee X \in S_1$$
$$\leftrightarrow X \in S_2 \cup S_1;$$
$$X \in S_1 \cup (S_2 \cup S_3) \leftrightarrow X \in S_1 \vee X \in (S_2 \cup S_3)$$
$$\leftrightarrow X_1 \in S_1 \vee X \in S_2 \vee X \in S_3$$
$$\leftrightarrow (X \in S_1 \vee X \in S_2) \vee X \in S_3$$
$$\leftrightarrow X \in (S_1 \cup S_2) \vee X \in S_3$$
$$\leftrightarrow X \in (S_1 \cup S_2) \cup S_3。 \quad \dashv$$

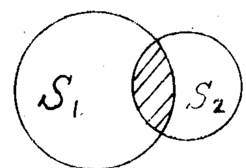


图 3

令S_1，S_2为两个集合，我们定义它们的交集合$S_1 \cap S_2$，它是这样一个集合，它的元素恰好是既属于S_1又属于S_2的那些对象（见图 3），即：

定义 4 $S_1 \cap S_2 := \{X \mid X \in S_1 \wedge X \in S_2\}$。

根据概括原则，$S_1 \cap S_2$是一集合，并且对于所有的X，有$X \in S_1 \cap S_2 \leftrightarrow X \in S_1 \wedge X \in S_2$）亦即：

$$\forall X(X \in S_1 \cap S_2 \leftrightarrow X \in S_1 \wedge X \in S_2)。$$

例如：$\{1, 2, 3\} \cap \{2, 4, 5\} = \{2\}$；

$\{1, 2, 3\} \cap \{1, 2, 3\} = \{1, 2, 3\}$；

$\{1, 2, 3\} \cap \{4, 5\} = \varnothing$；

$\{1, 2, 3\} \cap \varnothing = \varnothing$。

定理 4 对于任给集合S_1、S_2、S_3，有：

（1）合等律：$S_1 \cap S_1 = S_1$；

（2）交换律：$S_1 \cap S_2 = S_2 \cap S_1$；

（3）结合律：$S_1 \cap (S_2 \cap S_3) = (S_1 \cap S_2) \cap S_3$。

证明 对于任意的X，

$$X \in S_1 \cap S_1 \leftrightarrow X \in S_1 \wedge X \in S_1$$
$$\leftrightarrow X \in S_1,$$
$$X \in S_1 \cap S_2 \leftrightarrow X \in S_1 \wedge X \in S_2$$

$\leftrightarrow X\in S_2 \wedge X\in S_1$

$\leftrightarrow X\in S_2 \cap S_1$,

$X\in S_1\cap(S_2\cap S_3)\leftrightarrow X\in S_1 \wedge X\in(S_2\cap S_3)$

$\leftrightarrow X\in S_1 \wedge (X\in S_2 \wedge X\in S_3)$

$\leftrightarrow (X\in S_1 \wedge X\in S_2)\wedge X\in S_3$

$\leftrightarrow X\in S_1\cap S_2 \wedge X\in S_3$

$\leftrightarrow X\in(S_1\cap S_2)\cap S_3$ ⊣

现在，我们定义两个集合的相对补。令S_1，S_2 为任意的两个集合，S_2相对于S_1的补集合是$S_1—S_2$，它的元素是把S_1中含有的S_2的元素全部去掉所剩下的所有的元素(见图 4)。亦即

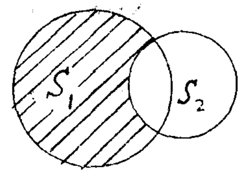


图 4

定义 5 $S_1—S_2 := \{X \mid X\in S_1 \wedge X\notin S_2\}$。

根据概括原则，$S_1—S_2$仍然是一集合，并对于所有的X，

$X\in S_1—S_2\leftrightarrow X\in S_1 \wedge X\notin S_2$，亦即：

$\forall X(X\in S_1—S_2\leftrightarrow X\in S_1 \wedge X\notin S_2)$。

例如：$\{1, 2, 3\}-\{1, 2\}=\{3\}$；

$\{1, 2, 3\}-\{1, 2, 4\}=\{3\}$；

$\{1, 2, 3\}-\varnothing=\{1, 2, 3\}$；

$\{1, 2, 3\}-\{1, 2, 3\}=\varnothing$；

$\{1, 2, 3\}-\{4, 5, 6\}=\{1, 2, 3\}$

定理 5 假定S_1，S_2，S_3是任意的集合，

则

（1）$S_1—S_1=\varnothing$；

（2）$S_2\subset S_1\rightarrow S_1-(S_1-S_2)=S_2$；

（3）$(S_1-S_2)-S_3=S_1-(S_2\cup S_3)$。

证明 对于任意的X，有：

（1）$X\in S_1-S_1\leftrightarrow X\in S_1 \wedge X\notin S_1$。

右边是不可能成立的，因此不存在这样的X，使得$X\in S_1-S_1$；同时，由概括原则，S_1-S_1仍然是一集合，所以S_1-S_1就恰好空集合了。

（2）$X\in S_1-(S_1-S_2)\leftrightarrow X\in S_1 \wedge X\notin(S_1-S_2)$

$\leftrightarrow X\in S_1 \wedge (X\notin S_1 \vee X\in S_2)$

$\leftrightarrow X\in S_1 \wedge X\notin S_1 \vee X\in S_1 \wedge X\in S_2$

$\leftrightarrow X\in S_1 \wedge X\in S_2$

$\leftrightarrow X\in S_2$。（因为$S_2\subset S_1$）

在上述推导过程中，用到了：

$X\notin(S_1-S_2)\leftrightarrow \neg(X\in(S_1-S_2))$

$\leftrightarrow \neg(X\in S_1 \wedge X\notin S_2)$

$\leftrightarrow X\notin S_1 \vee X\in S_2$。

这里符号“¬”意指“非”、“否定”。对于任一个性质P，用¬P表示非性质P，

用$\neg P$（X）表X不具有性质P。这样，显然有：

$$X \notin (S_1 - S_2) \leftrightarrow \neg(X \in (S_1 - S_2)),$$

$$\text{而} \neg(X_1 \in S_1 \wedge X \notin S_2) \leftrightarrow X \notin S_1 \vee \neg(X \notin S_2)$$
$$\leftrightarrow X \notin S_1 \vee X \in S_2。$$

第二步直观上是很显然的，$\neg(X \notin S_2) \leftrightarrow X \in S_2$ 也就通常掌推理中的否定之否定为肯定，这是个很有意思的逻辑问题，对此问题有兴趣的读者，可参阅各节末所列的逻辑思考问题。第一步也是个有趣的逻辑问题，“并非（P_1和P_2）”就等价于“$\neg P_1$或$\neg P_2$”。

$$(3)\ X \in (S_1 - S_2) - S_3 \leftrightarrow X \in (S_1 - S_2) \wedge X \notin S_3$$
$$\leftrightarrow X \in S_1 \wedge X \notin S_2 \wedge X \notin S_3$$
$$\leftrightarrow X \in S_1 \wedge \neg(X \in S_2 \vee X \in S_3)$$
$$\leftrightarrow X \in S_1 \wedge \neg(X \in (S_2 \cup S_3))$$
$$\leftrightarrow X \in S_1 \wedge X \notin (S_2 \cup S_3)$$
$$\leftrightarrow X \in S_1 - (S_2 \cup S_3)。$$

⊣

§ 8 幂集合

对于单元集合，它的子集合只有空集合∅和它自身。例如，{ 1 }的所有子集合为∅与{ 1 }。对于两个元素的集合，它的子集合有四个。比如{ 1 ， 2 }的子集合，容易验证恰为∅，{ 1 }，{ 2 }，{ 1 ， 2 }。至于三个元素的集合，比如{ 1 ， 2 ， 3 }的子集合就有：∅，{1}，{2}，{3}，{1，2}，{1，3}，{2，3}，{1，2，3}这样八个子集合。现在问：一集合S的所有子集合能否组成一个新的集合呢？回答是肯定的，并且把这个新的集合叫做S的幂集。例如{1}的幂集为{∅，{1}}，而{1，2}的幂集为{∅，{1}，{2}，{1，2}}，集合{1，2，3}的幂集为{∅，{1}，{2}，{3}，{1，2}，{1，3}，{2，3}，{1，2，3}}，并且，通常把集合S的幂集记作 P(S)。即有：

定义 6　$P(S) := \{X \mid X \subset S\}$，亦即

$$P(S) = \{X \mid \forall t(t \in X \rightarrow t \in S)\}。$$

由概括原则，对于任意的集合S，P(S)显然也是一集合。并且，上述几个集合的例子暗示了：一集合S若有n个元素，则其幂集 P(S) 就恰好有 2^n个元素。下面，我们将证明这一结论。为此，我们先证明一个引理

引理　假定S是有穷集合，$a \notin S$，并且 $S_1 := S \cup \{a\}$，则S_1的子集数目恰为S的子集数目的二倍。

证明　对于S的每一子集，都能附加上元素a或不附加上a，由这一过程可以获得S_1的所有子集合，这是因为，对于S的每一子集合S_2，都有S_1的两个子集合S_2或 $S_2 \cup \{a\}$，这就证得了S_1的元素个数恰为S的 2 倍。

定理 6　对于所有的自然数 n 和所有的集合S，如果S恰有n个元素，则P(S) 就恰有 2^n个元素。

证明　用数学归纳法来证明这一定理，即对S的元素的个数运用归纳法。

对于每一自然数n，令A（n）为这样的一个命题：对于所有的集合S，如果S恰有n个元素，则 P(S) 恰有 2^n 个元素。

对于命题A（n），我们只要证明了下列两点，就证明了我们的定理：

（1）A（0）成立；

（2）对于所有的自然数n，如果A（n）成立，那么可以推得A（n+1）成立。

现在我们来证明（1）。设S是一集合且S没有元素，所以$S=\varnothing$。而 $P(\varnothing)=\{\varnothing\}$，$2^0=1$，因此，（1）显然成立。

我们再来证明(2)。设$n\in N$，且A（n）成立，即S恰有n个元素，P(S) 恰有 2^n 个元素，在此假设下来证明A(n+1)，亦即当S_1恰有 n+1 个元素时，求证$P(S_1)$恰有 2^{n+1} 个元素。

不妨假定$a\in S_1$，$a\notin S$，且$S_1=S\cup\{a\}$。所以，根据上述引理，$P(S_1)$的元素的个素为2倍于P(S)的元素的个数，亦即等于$2.2^n=2^{n+1}$。 ⊣

注意：上述定理证明中，使用了数学归纳法。数学归纳法用符号化来表示，就是：

$A(O)\wedge\forall n\in N\,[A(n)\to A(n+1)]\to\forall n\in NA(n)$，其中$\forall n\in NB$为$\forall n\,(n\in N\wedge B)$的缩写、如果不用缩写，上式就是：

$$A(O)\wedge\forall n[n\in N\wedge[A(n)\to A(n+1)]]$$
$$\to\forall n(n\in N\wedge A(n))\ 。$$

如果在上下文中很清楚地说明变元n 仅取自然数值时，上式也可更简明地写成：

$A(O(\wedge\forall n[A(n)\to A(n+1)]\to\forall nA(n)$。

前已知道，当S中元素的个数为0时，P(S)元素的个数为1；当S中元素的个数为1时，P(S)元素的个数为2；当S中元素的个数为2时，P(S)元素的个数为4；当S中元素的个数为3时，P（S）元素的个数为8；…当S有10个元素时，由定理6，P(S)就有 2^{10} 个元素，即S恰有1024个子集。这个数目的增长速度是很惊人的。

注意：我们已经注意到一个集合的元素的个数问题，这是集合论的一个很重要的问题，也是本书要讨论的重点之一。

§9 Russell悖论

所谓悖论，是指这样一个命题A，由A出发，可以找到一语句B，然后，若假定B真，就可推得 ¬B真，亦即可推导出B假，若假定 ¬B真，即B假，又可推导出B真。

在Cantor 集合论中有没有悖论呢？在上世界末，虽然有些数学家反对 Cantor 集合论中研究无穷集合这样的对象，对他的无穷推理过程表示怀疑，但又找不出毛病来。整个数学已经建立在严谨的集合论上了，因此，1900年 Poincare 在巴黎召开的数学大会上高兴地宣称：“现在，我们能够说完全严格性已经达到了”。但是，事隔两年，1902年，Russell发现了一个悖论。使用我们的符号，他构造了这样一个集合：

$$T:=\{X\mid X\notin X\},$$

也就是说，T是由所有那些不属于自己的那些集合所组成，任一集合X，如果有$X\notin X$成立，那么这个X就是T的元，反之，T中每一元X都有这种性质，亦即若$X\in T$，就有$X\notin X$。

现在我们问：集合T是否属于它自己呢？

若假定：$T \in T$，因为T的任一元素X都有$X \notin X$，现在T是T的元素，所以有 $T \notin T$，即由$T \in T$可导致$T \notin T$；反之，若假定：$T \notin T$，因为T由所有那些满足条件 $X \notin X$的X所组成，现在$T \notin T$，当然就在T中，即有$T \in T$，即由$T \notin T$可导致$T \in T$。

其实，在 Russell 发现上述悖论之前，在集合论中已经发现了一些悖论，其中有Cantor自己在1899年发现的一个悖论。

集合论悖论的发现说明概括原则是不能普遍成立的，直观集合论或朴素集合论中的概括原则必须给以抛弃，而应具体地分析它的那些特殊形式是应当成立的，这就是我们下一章将要讨论的集合论公理系统。

在一些著名的集合论公理系统中原先的悖论被避免了，但是，是否还有新的悖论呢？这是不知道的，正像Poincare所说："我们围住了一群羊，但是羊棚里或许已经有狼了"。于是人们又分析在数学推理中可能出现毛病的地方，一派数学家（以 Luitzen E.J.Brouwer 为代表）主张在数学推理中抛弃排中律（从而就抛弃了反证法）；以D. Hilbert为代表的另一派数学家不赞成 Brouwer学派的主张，Hilbert 说："禁止数学家使用排中律，等于不许天文学家使用望远镜，不许拳击家使用拳头。"

虽然，数学基础问题并未解决，集合论基础并未奠定，然而在公理化方向已经取得一批重大研究成果，正象大家所看到的，数学家的科学成果不是贫乏了，而是更丰富了。新成果和新的研究者将不断出现，这是必然的。

习　题

1、设A、B、C为任意集合，证明：

（1）$A \cap B \subset A$；　（2）$A \subset B \to A \cap C \subset B \cap C$；

（3）$C \subset A \wedge C \subset B \to C \subset A \cap B$；　（4）$A \cap (A \cup B) = A$；

（5）$A \cup (A \cap B) = A$；　（6）$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$；

（7）$A \cup (B \cap C) = (A \cap B) \cap (A \cup C)$

2、设A、B为任意集合，证明：

（1）$A \subset B \to P(A) \subset P(B)$；　（2）$P(A) \subset P(B) \to A \subset B$；

（3）$P(A) = P(B) \leftrightarrow A = B$；　（4）$P(A) \in P(B) \to A \in B$；

（5）举例说明$A \in B$但$P(A) \notin P(B)$，即（4）的逆不成立。

3、求：

（1）$P(\varnothing)$；　（2）$P(P(\varnothing))$；

（3）$P(P(P(\varnothing)))$；　（4）$P(P(P(P(\varnothing))))$。

4、求：

（1）$Z - N$；　（2）$Z \cap N$；

（3）$Z - (Z - N)$；　（4）$R \cap Q$；

（5）$R - Q$。

5、令$0 := \varnothing$，$1 := 0 \cup \{0\}$，$2 := 1 \cup \{1\}$，$3 := 2 \cup \{2\}$，$4 := 3 \cup \{3\}$，

（1）验证上述0，1，2，3，4都是集合；

（2）验证$1\in 2$，$1\in 3$，$1\in 4$，$2\in 3$，$3\in 4$，$0\in 4$；

（3）仅用$\varnothing$与$\{\ \}$写出4来。

6、令 $A:=\{3,4\}$，$B:=\{4,3\}\cup\varnothing$，
$C:=\{4,3\}\cup\{\varnothing\}$，

$D:=\{X\mid X^2-7X+12=0\}$，$E:=\{\varnothing,3,4\}$，

$F:=\{4,4,3\}$，$G:=\{4,\varnothing,\varnothing,3\}$。

问上述集合中哪些是相等的，哪些是不等的？

逻辑思考题

1、李庄有一座磨房，在村东头或者在村西头张三弄不清楚，但他确知不是在村东头就一定在西头，反之亦然，事实也正是如此。李庄有兄弟二人，其一，只说假话不说真话，其二只说真话不说假话。张三知道这一情况，但他分不清谁说真话谁说假话。一天，张三来到李庄街上，正遇到这兄弟俩之一。张三问：我若问你的弟兄，磨房在那里，他将如何回答我呢？此人作了回答，于是张三立即正确地判断出磨房的位置了。请问，张三是如何判断的？

2、逻辑学中的所谓命题，是指表达一个完整意思的一句话，有时也称一个语句。如“张三是甲班的一个学生”、“李四不是甲班的学生”、“$n\in S$”、“$4\notin S$”等等，都是命题（或语句）。我们假定A、B都命题，试考虑：

（1）若A为真命题，$\neg A$，$\neg\neg A$分别为真命题呢？还是假命题呢？

（2）若A为真命题，B为假命题，试分析$A\vee B$，$A\wedge B$，$\neg A\vee B$，$\neg A\wedge B$，$A\vee\neg B$，$A\wedge\neg B$分别为真命题呢？还是假命题呢？

（3）试分析$A\to B$与$\neg A\vee B$二者的真假值的关系？

（4）试分析$\neg(\neg A\vee\neg B)$与$A\wedge B$二者的真假值的关系。

3、设A、B为任意的命题，若$\neg A$能推导出B，也能推导出$\neg B$，那么A为一真命题。

4、设A、B为任意命题，则由$\neg A$真可得$A\to B$亦真。

5、设p、q为任意命题，则由p真可得$p\vee q$，$p\vee\neg q$都是真命题。

6、设p、q、r为任意命题，则

（1）$(p\to q)\to r$与$(\neg p\vee q)\to r$的真假值一样；

（2）$\neg p\vee\neg q\vee\neg r$与$\neg(p\wedge q\wedge r)$的真假值一样。

7、设p、q为命题，命题只取“真”值或“假”值，而且二者只取其一，也必取其一。我们以1表示“真”值，以0表示“假”值，这样，关于命题连接词的真假值，可列表如下（并称为“真值表”，见下页）：

在真值表中，取相同真值的二个命题，称为是等值的。

使用等值表，证明下述命题对是等值的：

（1）$p\to q$与$\neg(p\wedge\neg q)$；　　（2）$p\vee q$与$\neg(\neg p\wedge\neg q)$；

（3）$p\to q$与$(p\wedge\neg q)\to\neg p$；　　（4）$p\to q$与$(p\wedge\neg q)\to q$

（5）$p\vee q$与$q\vee p$；　　（6）$q\wedge p$与$p\wedge q$；

（7）p∧（q∨r)与（p∧q)∨(p∧r)；

（8）p∨（q∧r）与（p∨q）∧（p∨r)；

（9）p与p∨p；　　　　　　　　（10）p与p∧p。

（一）真值表：

P	q	P∧q
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

P	q	P∨q
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

P	¬P
0	1
1	0

P	q	P→q
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

P	q	P←→q
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

（二）等值的真值表：

（1）　P与¬¬P等值：

P	¬P	¬¬P
0	1	0
1	0	1

（2）　P→q与¬PVP等值：

q	P	P→q、	¬P、	¬PVq
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	1	1	0	1

（3）　P→q与¬P→¬P等值：

P	q	P→q、	¬P、	¬q、	¬P→¬q
0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0
0	1	1	1	0	1
1	1	1	0	0	1