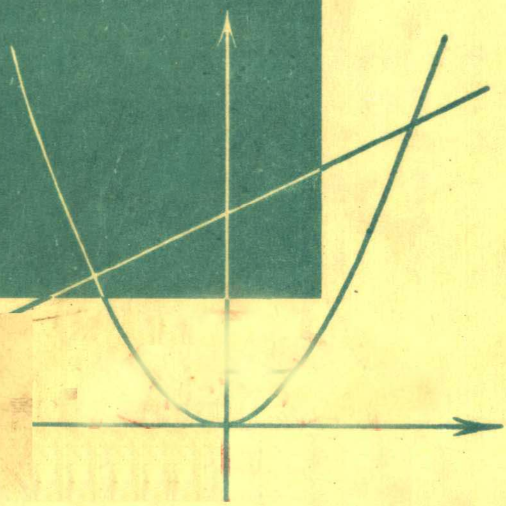
中学数学教师进修讲义

初等代数复习与研究

下册



太原市教育学院

一九七八年九月

中学数学教师进修讲义

初等代数复习与研究

下　　册

太原市教育学院

一九七八年九月

前　　言

以英明领袖华主席为首的党中央，高举毛主席的伟大旗帜，清除“四害”，抓纲治国，我国的社会主义革命和社会主义建设进入新的发展时期。毛主席的教育路线得到全面贯彻，无产阶级教育事业蓬勃发展。广大教师正在又红又专的大道上阔步前进，为“四个现代化”早出人才、快出人才贡献力量。

为了适应教育事业发展的新形势，提高师资水平，现将我院（原太原市教干校）根据历年教学实践于一九七四年编写的中学数学教师进修讲义《代数》（试用稿）油印本，稍加增删再次付印并更名为《初等代数复习与研究》（分上、下册），供我市中学数学教师进修培训和教学参考之用。

全书共四编，一、二编为上册，三、四编为下册。基本上包括了教育部《中学数学教学大纲》中有关初等代数的内容，并在深度和广度上有一定的加深加宽。主要内容有：第一编，数的概念，在介绍集合知识的基础上，按自然数、零、分数、有理数、实数、复数的顺序，将数的概念逐步地加以补充；第二编，解析式，依次介绍多项式、分式、根式、指数式和对数式的运算；第三编，方程和不等式，介绍方程和方程组的同解变形，各种方程、方程组和不等式的解法，列方程和方程组解应用题；第四编，函数和极限，介绍初等函数的性质和图象，极限概念及其应用，简单的级数求和等。

本书对象是中学数学教师。内容编排上采取了专题讲述的方法，便于读者对中学代数的内容有一个总括的了解，教学参考时也较方便。但是这样做不可避免的就出现了有些知识的前后交叉现象。用这种专题讲述的方法进行编排，仅仅是我们的初步尝试。利用本书进行教学时，可根据实际情况适当调整或删减。

本书由我院数学教研组刘宪武、阮一清、任朝雁、晚成国、于恩芳、江　一、晁国勋、郭凤英等同志集体编写。

由于我们对毛主席的教育思想学习不够，水平有限，书中一定会存在不少缺点甚至错误，敬希广大教师同志们批评指正。

太原市教育学院数学教研组

一九七八年九月

目　　录

第三编 方程与不等式

在三大革命实践的数学问题中，从数量关系来看，有相等的也有不等的，从数据来看，有已知的也有未知的，它们既对立又统一，并且在一定条件之下，可以互相转化。方程以及不等式正是处理这些矛盾的重要理论和方法，它们是进行各门自然科学的理论研究和解决各种实际问题的有力工具。

本编，我们介绍怎样处理方程和不等式的恒等变形和同解变形，怎样证明一个不等式是正确的，如何运用这些理论和方法去解决实际问题。

第一章 方 程

方程是代数学中的一个中心课题。

我们知道，用算术方法解决实际问题是根据题目中给出的条件，利用已知数据列出一个表达未知数的算式，再通过运算，使问题得到解答。但是，事物总是一分为二的。用算术方法解应用题的缺点是把已知和未知截然分开，突出了对立的一面，而削弱了统一的一面，因而在列式过程中局限性很大，使一些问题不易解决和不能解决。

人类对事物的认识总是不断深化的，用方程解决实际问题是算术方法的发展和提高。这是一个飞跃。它把已知数量和未知数量通过题目本身的条件，统一在一个等式中，再通过方程的同解变形，使未知向已知转化，得到问题的解答。它的优点是在未知数选定以后，可以和已知数一样的参与列式和运算，充分体现了已知和未知的同一性，大大便利了分析和列式的过程，使问题易于解决。

本章介绍方程的有关知识和应用。

第一节 方程及其同解变形

一、方 程

含有未知数的等式叫做方程。含有一个未知数的方程叫做一元方程。

一元方程的一般形式是

$$f_1(x)=f_2(x).$$

其中x表示未知数，未知数的允许值是解析式$f_1(x)$和$f_2(x)$的变数x允许值的公共部分。

例如，方程$3x^2+2x=1$是一元方程，仅就方程本身而论，它的未知数允许值是全

体复数，方程$\frac{x}{x+1}=\frac{6}{2x+1}$的未知数允许值，是把$-1$和$-\frac{1}{2}$除外的任何复数，

含有n个未知数的方程叫做n元方程。

n元方程的一般形式是

$$f_1(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n)=f_2(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n),$$

其中x_1，x_2，……，x_n表示未知数，未知数的允许值组是解析式f_1和f_2的所有变数允许值组的公共部分。

例如，二元方程$\sqrt{x}-\sqrt{y-1}=2\sqrt{xy}$的未知数允许值组是$x\geq 0$，$y\geq 1$。

由于构成方程的解析式不同，方程被分为各种类型。

含有超越式构成的方程，叫做超越方程。例如，含有指数式、对数式、三角函数式和反三角函数式等构成的方程，都是超越方程。

只由代数式构成的方程，叫做代数方程。在代数方程中，只由有理式构成的方程，叫做有理方程。含有未知数开方运算的方程，叫做无理方程。在有理方程中，分母含有未知数的方程，叫做有理分式方程（简称分式方程）。只由整式构成的方程，叫做有理整式方程，（简称整式方程）。

代数方程分类如下：

$$\text{代数方程}\begin{cases}\text{有理方程}\begin{cases}\text{整式方程}\\ \text{分式方程}\end{cases}\\ \text{无理方程}\end{cases}$$

例如 $5x+3=0$，$\frac{2}{3}x+y=\frac{3}{4}$，$\sqrt{3}x^2+x-\sqrt{2}=0$，是整式方程；

$\frac{1}{x}+3=0$，$\frac{x}{x+1}=\frac{\sqrt{6}}{2x+1}$，$\frac{1}{x+y}=\frac{1}{x-y}$，是分式方程；

$\sqrt{x-1}=3x+1$，$\sqrt{x+y}=\frac{1}{\sqrt{x-y}}$是无理方程。

整式方程根据未知数的个数及其各项中最高次数的不同，分别叫做几元几次方程。

例如 $2x+53=139$ 是一元一次方程。

$\sqrt{3}x^2+x-\sqrt{2}=0$ 是一元二次方程。

$\frac{2}{3}x+y=\frac{3}{4}$ 是二元一次方程。

$2x^2-xy+y^2-3y+2=0$ 是二元二次方程。

$x^3+2x^2-3x+6=0$ 是一元三次方程。

而$\frac{x}{x+1}=\frac{\sqrt{6}}{2x+1}$不是整式方程，也就不能说是几次方程。

使方程两边相等的未知数的值，叫做方程的解。即若$f_1(a)=f_2(a)$，则$x=a$是方程$f_1(x)=f_2(x)$的解；反之若$x=a$是方程$f_1(x)=f_2(x)$的解，则$f_1(a)=f_2(a)$。一元方程的解也叫做根。

如果一个方程对于未知数的一切允许值都不成立（例如$x=x+1$），这样的方程，叫做矛盾方程。

如果一个方程对于未知数的一切允许值都成立（例如$(x+1)^2=x^2+2x+1$），这样的方程实际是恒等式。

根据问题中已知数与未知数之间的等量关系组成方程，叫做列方程，求方程的解的过程或判定方程无解，叫做解方程。

列方程与解方程，是用方程解决实际问题的两个基本步骤。下面，我们先讨论解方程的问题，然后再讨论列方程的问题。

二、方程的同解变形

解方程就是创造条件，使共处于方程这个统一体中的未知数向已知转化，下面我们介绍解方程的一些理论根据。

在两个方程中，如果第一个方程的每个解，都是第二个方程的解；反之第二个方程的每个解也都是第一个方程的解，那么这两个方程叫做同解方程。

解方程时，可以用同解方程代替原来的方程，这种代换叫做同解变形。

同解的概念是相对的，因为已知的两个方程，可能在某一数体上同解，但在另一数体上可能不同解。

例如，方程$x^2-2=0$和$x^4-4=0$在实数体上同解，因为在实数体上，每个方程都有两个根$x=\pm\sqrt{2}$，在复数体上这两个方程不同解，因为第一个方程的根仍为$x=\pm\sqrt{2}$，而第二个方程却有四个根：$\pm\sqrt{2}$和$\pm\sqrt{2}i$。

下面介绍方程同解变形的几个定理：

定理 1 如果解析式$\varphi(x)$对于方程

$$f_1(x)=f_2(x) \qquad (f)$$

的未知数所有允许值都有意义，那么，方程(f)与方程

$$f_1(x)+\varphi(x)=f_2(x)+\varphi(x) \qquad (f+\varphi)$$

同解。（对于多元方程结论是一样的）

证明：若$x=a$是方程(f)的任一解，即$f_1(a)=f_2(a)$，两边同加$\varphi(a)$〔$\varphi(a)$显然是有意义的〕，则有

$$f_1(a)+\varphi(a)=f_2(a)+\varphi(a),$$

这说明$x=a$也是方程$(f+\varphi)$的解。

反之，若$x=b$是方程$(f+\varphi)$的任一解，即

$$f_1(b)+\varphi(b)=f_2(b)+\varphi(b)$$

两边同加$-\varphi(b)$则有$f_1(b)=f_2(b)$，这说明$x=b$也是方程(f)的解，因此，方程(f)与

$(f+\varphi)$同解。（证完）

根据这个定理，方程中的任何一项*，都可以改变它的符号，从方程的一边移到另一边，这就是移项法则。例如

$3x=5+2x$，移项后变形为$3x-2x=5$；

$\dfrac{3}{x-2}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x-2}$，移项后变形为$\dfrac{3}{x-2}-\dfrac{2}{x-2}=\dfrac{1}{x}$。

恩格斯曾经指出："一个方程式的真实内容，只有当它所有的各项都被移到一边而使它等于零时才能明白地表现出来"，定理1说明了这种变形的理论根据。

定理2 如果解析式$\varphi(x)$对于方程

$$f_1(x)=f_2(x) \qquad (f)$$

的未知数的所有允许值都有意义，而且不等于零，那么方程(f)与方程

$$f_1(x)\cdot\varphi(x)=f_2(x)\cdot\varphi(x) \qquad (f\varphi)$$

同解 （对于多元方程也有相同结论）。

证明：若$x=a$是方程(f)的任一解，即

$$f_1(a)=f_2(a),$$

两边同乘以$\varphi(a)$ 〔$\varphi(a)$显然有意义且不等于零〕，则有

$$f_1(a)\varphi(a)=f_2(a)\varphi(a),$$

这说明$x=a$也是方程$(f\varphi)$的解；反之，若$x=b$是方程$(f\varphi)$的任一解，即，

$$f_1(b)\varphi(b)=f_2(b)\varphi(b)。$$

因为$\varphi(b)\neq0$，所以两边可以同乘以$\dfrac{1}{\varphi(b)}$，则有

$$f_1(b)=f_2(b),$$

这说明$x=b$也是方程(f)的解，因此方程(f)与$(f\varphi)$同解。（证完）

在方程两边同乘或同除以一个非零的数，显然符合定理2的条件，于是有：

推论：在方程两边同乘或同除以一个非零的数所得的方程与原方程同解。这就是我们常用的系数"搬家"法则。例如

$7x=2$，变形为 $x=\dfrac{2}{7}$；

$\dfrac{x}{5}=12$，变形为$x=12\times5$。

假若乘式$\varphi(x)$对于方程(f)未知数的某些允许值能够变成零，那么方程(f)和$(f\varphi)$可能不同解。因为方程$(f\varphi)$的根可能是$\varphi(x)=0$的根，而不是方程(f)的根。例如方程

$$3x+1=2x$$

---

*这里的项是指广义的项。

的两边乘以$x-2$得新方程

$$(3x+1)(x-2)=2x(x-2),$$

新方程有-1和2两个根，其中2是乘式$x-2$的根，而不是原方程的根．

把一个方程变形后所得的方程的根不适合原方程，这种根叫做原方程的增根．上例中的2就是增根．如果已知一个方程在变形过程中，可能产生增根，只要把求出的解，代入原方程检验一下就行了，增根应舍去．

假如乘式$\varphi(x)$对原方程未知数的某些允许值无意义，则可能失根．例如方程

$$x(x-3)=x$$

有0和3两个根，两边乘以$\frac{1}{x}$得新方程

$$x(x-3)\cdot\frac{1}{x}=x\cdot\frac{1}{x},$$

仅有3一个根，丢掉了原来的一个根0．失根应从乘式对原方程未知数允许值无意义的那些值中找回。

综上所述，可得出下面**结论**：若将方程

$$f_1(x)=f_2(x), \qquad (f)$$

变形，改变了未知数允许值的范围，则所得方程与原方程可能不同解．当原方程变形为方程

$$F_1(x)=F_2(x), \qquad (F)$$

如果未知数允许值范围扩大了，这时可能出现增根，如果未知数允许值范围缩小了，这时可能失根．但是，如果未知数允许值范围虽扩大（缩小）而增加的（失掉的）允许值不满足方程(F)〔或不满足方程(f)〕，这时方程(f)与(F)仍然同解．

例 在分式方程

$$\frac{1}{x-2}+3=\frac{x-1}{x-2}, \qquad (1)$$

两边同乘以$x-2$，得分式方程

$$\left(\frac{1}{x-2}+3\right)(x-2)=\frac{x-1}{x-2}\cdot(x-2), \qquad (2)$$

根据定理2，乘式$x-2$对原分式方程未知数允许值都有意义，所以方程(2)和(1)同解．

如果对分式方程(2)的两边施行恒等变形，化为整式方程

$$1+3(x-2)=x-1, \qquad (3)$$

解得 $x=2$．

显然，2不是分式方程(1)或(2)的根，方程(1)和(2)与方程(3)不同解．

这个例子说明，在分式方程两边同乘以最低公倍式而不施行恒等变形，则所得方程与原方程同解；如果施行恒等变形，使分式方程转化为整式方程，则扩大了未知数允许

值的范围，所得的整式方程与原分式方程，可能不同解而产生增根。

因此我们说，对方程两边施行恒等变形，可能改变未知数允许值的范围，这是要十分注意的。

定理 3 方程$f_1(x)\cdot f_2(x)=0$与两个方程$f_1(x)=0$和$f_2(x)=0$同解，对于$f_1(x)$和$f_2(x)$应在它们允许值的公共部分上确定。

证明：在$f_1(x)$和$f_2(x)$的允许值的公共部分里，设α是方程$f_1(x)=0$的任一解，那么$f_1(\alpha)=0$，从而$f_1(\alpha)\cdot f_2(\alpha)=0$。因此，在$f_1(x)$和$f_2(x)$允许值的公共部分里，方程$f_1(x)=0$的所有解都是方程$f_1(x)\cdot f_2(x)=0$的解。同理，在$f_1(x)$和$f_2(x)$允许值的公共部分里，方程$f_2(x)=0$的所有解都是方程$f_1(x)\cdot f_2(x)=0$的解；

反之，设β是方程$f_1(x)\cdot f_2(x)=0$的任一解，那么，$f_1(\beta)\cdot f_2(\beta)=0$，由此必有$f^1(\beta)=0$或$f_2(\beta)=0$，即$\beta$是方程$f_1(x)=0$的解或者是方程$f_2(x)=0$的解。因此，方程$f_1(x)\cdot f_2(x)=0$的所有解，都是方程$f_1(x)=0$或方程$f_2(x)=0$的解。综上所述，定理成立。（证完）

应用定理 3 时，也要注意在允许值的公共部分这个限制条件，否则可能产生增根，例如，方程$(x-1)\cdot\frac{x+1}{x-1}=0$分为下列两个方程$x-1=0$及$\frac{x+1}{x-1}=0$时，如果不受允许值公共部分的约束，则后面两个方程的解$x_1=1$，$x_2=-1$之中，1不是原方程的解。

显然，当$f_1(x)$及$f_2(x)$是整式时，允许值的限制是不必要的。

这个定理说明较高次的方程，如果能分解因式的话，可以转化为两个或两个以上较低次的方程求解。

例 解方程 $(x-1)(x+1)^2(x^2+1)=0$，
可以变形为下列三个方程

$$x-1=0, \qquad (x+1)^2=0, \qquad x^2+1=0$$

求解。

定理 4 方程$f^2(x)=g^2(x)$与两个方程

$f(x)=g(x)$ 和 $f(x)=-g(x)$同解。

证明：由方据$f^2(x)=g^2(x)$移项得

$$f^2(x)-g^2(x)=0,$$

左边分解因式，得方程

$$[f(x)-g(x)]\cdot[f(x)+g(x)]=0,$$

根据定理 3，它与下面两个方程

$f(x)-g(x)=0$ 和 $f(x)+g(x)=0$

同解，即原方程与两个方据$f(x)=g(x)$和$f(x)=-g(x)$同解．（证完）．

这个定理说明：方程两边同时平方，可能产生增根：方程两边同时开平方，可能失根。

推论：方程$f^2(x)=a^2$与方程$f(x)=\pm a$同解

例 无理方程

$$x-10=2\sqrt{x+5},$$

两边平方后，得有理方程

$$(x-10)^2=4(x+5),$$

有理方程的根为$x_1=20$，$x_2=4$．检验后可以知道，只有$x=20$是原方程的根；4是原方程的增根。

定理5 在实数体上将方程两边同时立方后，得到的新方程与原方程同解。

证明：把方程$f(x)=g(x)$两端立方得

$$f^3(x)=g^3(x),$$

移项得$f^3(x)-g^3(x)=0$，

即 $$[f(x)-g(x)][f^2(x)+f(x)g(x)+g^2(x)]=0,$$

这个方程可分解为下面两个方程

$$f(x)-g(x)=0 \qquad (1)$$

及 $$f^2(x)+f(x)g(x)+g^2(x)=0 \qquad (2)$$

方程（1）与原方程是同解方程，方程（2）可变形为

$$[f^2(x)+f(x)g(x)+\frac{1}{4}g^2(x)]+\frac{3}{4}g^2(x)=0$$

即 $$[f(x)+\frac{1}{2}g(x)]^2+\frac{3}{4}g^2(x)=0 \qquad (3)$$

这个方程的左边是关于未知数x的两个代数式的平方和，只有当未知数x的值使$f(x)=0$及$g(x)=0$同时成立时，方程（3）才能成立。因此，方程（3）或者在实数体上没有根，或者有根就同时适合$f(x)=0$及$g(x)=0$，所以同时也是方程（1）的根。

综上所述，定理得证。

例 方程$\sqrt[3]{x^2+55}=x+1$，在实数体上与方程$x^2+55=(x+1)^3$同解。

定理4和定理5，为我们解含有二次根式和三次根式的无理方程，提供了理论根据。

习题二十八

一、在实数体上，求下列方程未知数的允许值范围：

1． $x+1=6$； 2． $x^2+3x-1=0$；

3． $\frac{3}{x+2}+\frac{x-1}{x+5}=\frac{5x+1.5}{6x+18}$； 4． $\sqrt{3x-2}+\sqrt{2x+5}=5$．

二、下列各组方程是否同解？为什么？

1． $4x^2+1=x+2x^2-5$和$2x^2-x+6=0$；

2. $\frac{3x+4}{2}=\frac{4x-5}{3}$和$3(3x+4)=2(4x-5)$;

3. $\frac{x+1}{x-5}=\frac{6}{x-5}$和$x+1=6$;

4. $x-2=3$和$(x-2)(x-3)=3(x-3)$;

5. $\frac{3}{x-1}=\frac{5}{x+3}$和$3(x+3)=5(x-1)$;

6. $2x+\frac{1}{x-4}=8+\frac{1}{x-4}$和$2x=8$;

7. $2x+\frac{1}{x-5}=8+\frac{1}{x-5}$和$2x=8$;

8. $2x+\frac{1}{x^2+1}=8+\frac{1}{x^2+1}$和$2x=8$;

9. $2x+\sqrt{x-2}=8+\sqrt{x-2}$和$2x=8$;

10. $2x+\sqrt{2-x}=8+\sqrt{2-x}$和$2x=8$;

11. $x-2=3x+5$和$(x-2)^2=(3x+5)^2$;

12. $x-2=3x+5$和$(x-2)^3=(3x+5)^3$;

13. $\sqrt{2x-1}=4x$和$2x-1=16x^2$;

14. $\sqrt[3]{2x-1}=4x$和$2x-1=64x^3$;

15. $x-2=0$和$(x-2)^n=0$,(n为自然数)。

三、下列方程解的对不对?如果不对,应当怎样解?

1. $x(x-5)=0$,

$x-5=0$,

$\therefore x=5$.

2. $x(x-3)=4(x-3)$,

$\therefore x=4$.

3. $x^2=36$,

$\therefore x=6$.

4. $2x^2=36$。

$2x=\pm 6$,

5. $\sqrt{x}=-2$,

$\therefore x=4$.

6. $3-\sqrt{x+5}=6$,

$\sqrt{x+5}=-3$,

$x+5=9$,

$\therefore x=4$。

7. $2x+\frac{1}{x-4}=8+\frac{1}{x-4}$,

$2x=8$,

8. $2x+\sqrt{2-x}=8+\sqrt{2-x}$,

$2x=8$,

$\therefore x=4.$ $\therefore x=4.$

9. $\frac{x+1}{x-5}=\frac{6}{x-5}$, 10. $(x-2)^3=8$,

$x+1=6$, $x-2=2$,

$\therefore x=5.$ $\therefore x=4.$

第二节　一元一次方程与一元二次方程

一、一元一次方程的解法

一元一次方程是最简单的整式方程，它的标准形状是

$ax+b=0 \quad (a\neq 0)$ （1）

一元一次方程中的未知数如何转化为已知呢？由移项法则得$ax=-b$,系数搬家法则得 $x=-\frac{b}{a}$，这就是方程（1）的根。

例 1　解方据$2x+53=139$.

解　移项，　$2x=139-53$,

合并同类项，　$2x=86$,

系数搬家得　$x=43$.

例 2　解方程$\frac{x-b}{a}=2-\frac{x-a}{b}$($a\neq 0$, $b\neq 0$, $a+b\neq 0$).

解　去分母，$b(x-b)=2ab-a(x-a)$,

去括号，　$bx-b^2=2ab-ax+a^2$,

移项，　$ax+bx=a^2+2ab+b^2$,

合并同类项：　$(a+b)x=(a+b)^2$,

系数搬家得　$x=a+b$.

例 3　解方程：$1-\frac{x-\frac{1+x}{3}}{3}=\frac{x}{2}-\frac{2x-\frac{10-7x}{3}}{2}$.

解　先化简繁分式，得

$$1-\frac{3x-1-x}{9}=\frac{x}{2}-\frac{6x-10+7x}{6},$$

即　$$1-\frac{2x-1}{9}=\frac{x}{2}-\frac{13x-10}{6},$$

去分母得，　$18-2(2x-1)=9x-3(13x-10)$,

去括号，　$18-4x+2=6x-39x+30$,