

网状结构的连续化分析方法

董石麟

网状球壳的连续化分析方法

董石麟

(浙 江 大 学)

提 要

本文对四向杆系、三向杆系、两向杆系组成的各种网状球壳,探讨了基于连续化计算模型的拟壳分析法,给出了网壳等代薄膜刚度和抗弯刚度的表达式,建立了轴对称网状球壳拟壳法的一般性基本方程式,并采用薄膜理论加边界效应的分析方法进行计算。文中还给出了如何由壳体内力反算各种网状球壳杆件内力的计算公式,文末附有算例。计算表明,这种连续化的拟壳分析法比较方便,手算电算均可。此外,本文就常用网状球壳的形式和分类作了讨论。

一、概 述

平面为圆形的网状球壳,是一种受力性能好、复盖跨度大的空间杆系结构,近年来在体育馆、展览馆、会议厅等屋盖结构中得到广泛采用,发展迅速,受到国内外的关注。

根据网格布置和形式的不同,网状球壳可分为两大类。

第一类是由径向杆系、纬向杆系和斜向杆系所组成的四向、三向、两向网状球壳,其主要形式有:四向Ⅰ型网壳、三向Ⅰ型网壳、四向Ⅱ型网壳、三向Ⅱ型网壳、两向斜交网壳和两向正交

网壳(图1)。这类网状球壳的特点是,同纬度的斜向杆、纬向杆的长度是相等的,被纬向杆分割的经向杆的长度一般也是相等或近似相等的;从而构成同纬度相等、同经度相似的网格体系,网格类型少,规律性非常明显,网壳内部和周边没有另碎的网格。同时,这类网壳的轴对称性能好,结构分析时可按连续化的旋转壳来考虑。但另一方面,由于过分依赖经纬线来划分网格,致使这类网壳的网格大小不很匀称,中部网格密集,四周网格稀疏。在国外,对于具有经向杆系组成的四向Ⅰ型、Ⅱ型网壳、三向Ⅰ型网壳,统称为施威特勒型网壳(1863年Schwedler在柏林的一个贮气罐工程中首先采用这种形式的穹顶而得名)。对于不具有经向杆系组成的三向Ⅱ型网壳、两向斜交网壳可称为联方型网壳。两向正交网壳也可称为肋环型网壳。

第二类是由三角形网格组合而成的各种形式的三向类网状球壳(不包括第一类的三向Ⅰ型、Ⅱ型网壳)。这类网壳是为改善第一类网壳中网格大小不匀称性而发展起来的,其主要形式有:三向 K_6 型网壳、三向 K_n 型网壳、三向 $K_6 \sim \text{Ⅱ}$ 型网壳、三向 $K_n \sim \text{Ⅱ}$ 型网壳、平面为正三角形网格的三向网壳和短程线型网壳(图2)。三向 K_n 型网壳($n=6, 8, 10, 12 \dots$)又称凯威特型网壳,是美国人Kiewitt提出的。这种网壳是由 n 根通长的径向杆先把球面划分为 n 个扇形曲面,然后在每个扇形曲面内再由纬向杆系和斜向杆系划分为大小比较匀称的三角形网格。而且每圈都以 $2n$ 个网格数从内圈向外圈递增的。因此,网壳有 n 个对称面,除 n 根径向杆轴线处外,都是由三向杆系组成的,故称为三向 K_n 型网壳。当前,世界上最大的平面直径为213米的新奥尔良超级穹顶,便是这种三向 K_{12} 型网壳。若网壳中间采

用三向 K_n 型网格, 周围采用三向 II 型网格, 可称为三向 $K_n \sim$ II 型网壳。从三向 K_n 型网格转变为三向 II 型网格要有一个过渡, 如图 2c, d 的第三圈网格所示。1984 年沙特阿拉伯麦加附近的红海之滨, 在一个直径 20 米的泳池顶盖, 首次采用了这种三向 $K_6 \sim$ II 型网状球壳。平面为正三角形网格的三向网壳, 一般用在扁壳屋盖。50 年代 Fuller 教授提出的短程线型网壳, 基本上也是一种三向网壳, 在铝结构和应力蒙皮结构中用得较多。

不考虑斜杆作用的施威特勒型网壳及两向正交网壳可按静定结构的近似方法, 或按弹性支承的连续杆的计算模型采用力法或位移法进行计算〔1〕〔2〕〔3〕。国外学者 Benjamin, Lederer, Makowski 等研究了以薄膜理论为基础的拟壳法来分析网状球壳〔4〕。在文献〔5〕中研讨了肋型的钢筋土无牌手装配式球壳。近年来由于电子计算机的发展和应用, 可精确地采用空间梁单元法来分析计算网状球壳。但每个节点有 6 个未知位移, 计算工作量较大, 需用大型机才能计算网壳。

本文试图对多种形式的四向、三向和两向网状球壳, 探讨了按有矩理论的连续化分析方法, 给出了统一的基本微分方程式。在忽略高阶小项的条件下, 基本方程式的齐次解, 可用衰减振动型的函数来表示, 而特解可采用无矩理论的薄膜内力及考虑网壳等代刚度后的薄膜位移来表示。当网状球壳的边界条件为简支、固定、弹性支承时, 以及跨中开孔、荷载突变与刚度突变时, 文中分别作了详细地讨论。

二、网状球壳的等代刚度

假定网格相当稠密, 则第一类网状球壳沿某纬向杆展开投影

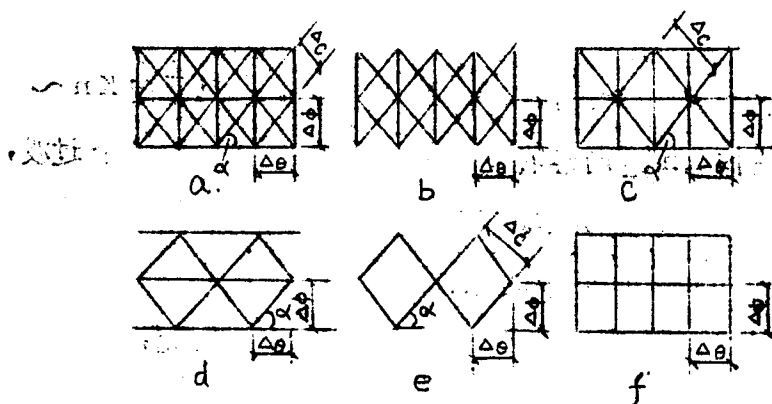


图 3 第一类网状球壳的网格体系

后便形成图 3 所示的网格体系，径向杆系与纬向杆系相互垂直正交，斜向杆系与纬向杆系的夹角为 α 。设径向杆、纬向杆和斜向杆的截面积、惯性矩和间距分别为 $A_\varnothing$ 、 A_θ 、 A_C ， $J_\varnothing$ 、 J_θ 、 J_C 和 Δ_θ 、 $\Delta_\varnothing$ 、 Δ_C ，并设：

$$\left. \begin{aligned} E\delta_\varnothing &= \frac{EA_\varnothing}{\Delta_\theta}, & E\delta_\theta &= \frac{EA_\theta}{\Delta_\varnothing}, & E\delta_C &= \frac{EA_C}{\Delta_C} \\ D_\varnothing &= \frac{EJ_\varnothing}{\Delta_\theta}, & D_\theta &= \frac{EJ_\theta}{\Delta_\varnothing}, & D_C &= \frac{EJ_C}{\Delta_C} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

则以四组杆系组成的网状球壳为例(图 1a,c, 图 3a,c), 如同分析直角坐标系下的网状扁壳〔6〕, 其等代薄膜刚度与抗弯刚度可表达为：

$$\left. \begin{aligned} B_{\varnothing\varnothing} &= E(\delta_\varnothing + 2\delta_C \sin^4 \alpha), \\ D_{\varnothing\varnothing} &= D_\varnothing + 2D_C \sin^4 \alpha \\ B_{\theta\theta} &= E(\delta_\theta + 2\delta_C \cos^4 \alpha), \\ D_{\theta\theta} &= D_\theta + 2D_C \cos^4 \alpha \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$$B_{\theta\theta} = B_{\theta\phi} = B_{KK} = 2E\delta_C \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha,$$

$$D_{\theta\theta} = D_{\theta\phi} = D_{KK} = 2D_C \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$$

这里假定了杆系的抗扭刚度很小，忽略不计。由此可见，这类网状球壳是正交异性的。式(1)中斜向杆系的间距 Δ_C 可用 Δ_θ 或 Δ_ϕ 来表示，对于四向I型和II型网壳分别为：

$$\Delta_C = \Delta_\theta \sin \alpha = \Delta_\phi \cos \alpha$$

$$\Delta_C = 2\Delta_\theta \sin \alpha = 2\Delta_\phi \cos \alpha$$

在式(2)中，令相应的 $\delta_\phi = D_\phi = 0$ 或 $\delta_\theta = D_\theta = 0$ 或 $\delta_C = D_C = 0$ ，则可得到三向I型网壳、三向II型网壳、两向斜交网壳及两向正交网壳的等代刚度。

在保证网壳几何不变性的条件下，纬向杆或斜向杆的两端可设计成铰接（经向杆一般不为铰接），此时只要在式(1)中令 J_θ 或 J_C 为零即可。

对于第二类网壳中的三向Kn型网壳，其网格的展开投影图如图4所示。此图表示被几条经线所分割的扇形曲面内任一纬度处的网格形式，斜杆的倾角 α_{cj} 不会相等。如把径向杆以倾角 $\alpha_{c0} = \frac{\pi}{2}$ 的斜杆计，则网壳的等代刚度可近似表达为：

$$B_{\phi\phi} = \frac{2}{m+1} \sum_0^m E \delta_{cj} \sin^4 \alpha_{cj}$$

$$D_{\phi\phi} = \frac{2}{m+1} \sum_0^m D_{cj} \sin^4 \alpha_{cj}$$

$$B_{\theta\theta} = E \left(\delta_\theta + \frac{2}{m+1} \sum_0^m \delta_{cj} \cos^4 \alpha_{cj} \right)$$

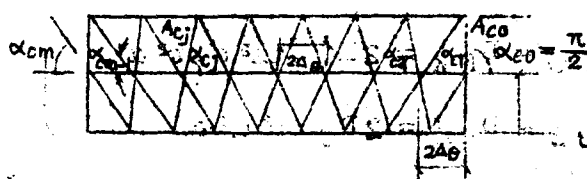


图 4 三向 Kn 型网壳的网格体系

$$D_{\theta\theta} = D_{\theta} + \frac{2}{m+1} \sum_0^m D_{cj} \cos^2 \alpha_{cj} \quad (3)$$

$$B_{\theta\theta} = B_{\theta\theta} = B_{KK} = \frac{2}{m+1} \sum_0^m E \delta_{cj} \sin^2 \alpha_{cj} \cos^2 \alpha_{cj}$$

$$B_{\theta\theta} = D_{\theta\theta} = D_{KK} = \frac{2}{m+1} \sum_0^m D_{cj} \sin^2 \alpha_{cj} \cos^2 \alpha_{cj}$$

式中

$$E \delta_{cj} = \frac{EA_{cj}}{2\Delta_{\theta} \sin \alpha_{cj}}, \quad D_{cj} = \frac{EJ_{cj}}{2\Delta_{\theta} \sin \alpha_{cj}} \quad (4)$$

对于平面为正三角形网格的三向网壳，可按扁网壳计算，是一种各向同性体，其等代泊桑系数为 $\frac{1}{3}$ ，等代刚度的表达式为：

$$\left. \begin{aligned} B_{\theta\theta} = B_{\theta\theta} = 3B_{\theta\theta} = 3B_{\theta\theta} = 3B_{KK} &= \frac{9}{8} E \delta \\ D_{\theta\theta} = D_{\theta\theta} = 3D_{\theta\theta} = 3D_{\theta\theta} = 3D_{KK} &= \frac{9}{8} D \\ E \delta &= \frac{2EA}{\sqrt{3} l} \\ D &= \frac{2EJ}{\sqrt{3} l} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

其中 l 为杆长。

对于短程线型网壳，其等代刚度也可按式(5)近似计算。

三、基本方程式的建立

网状球壳等代为正交异性球壳后，便可按一般壳体理论的分析方法来建立基本方程式，所不同的是等代刚度不是常量，而是随 $\varnothing$ 角而变。设内力和位移的正向由图 5 所示，则球壳的几何方程、物理方程和平衡方程为（暂先假定外荷载为零）：

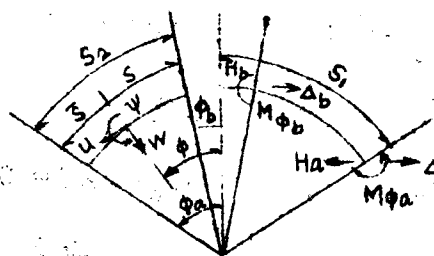
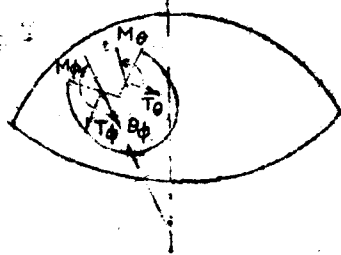


图 5 球壳内力、
位移正向示意图



$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{\varnothing} &= \frac{1}{R} \left(\frac{du}{d\varnothing} - w \right), & \chi_{\varnothing} &= -\frac{1}{R} \frac{d}{d\varnothing} \psi \\ \varepsilon_{\theta} &= \frac{1}{R} (u \operatorname{ctg} \varnothing - w), & \chi_{\theta} &= -\frac{c \operatorname{tg} \varnothing}{R} \psi \\ \psi &= \frac{1}{R} \left(u + \frac{dw}{d\varnothing} \right) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

$$\left. \begin{aligned} T_{\varnothing} &= B_{\varnothing\varnothing}\varepsilon_{\varnothing} + B_{\varnothing\theta}\varepsilon_{\theta} \\ M_{\varnothing} &= D_{\varnothing\varnothing}\chi_{\varnothing} + D_{\varnothing\theta}\chi_{\theta} \\ T_{\theta} &= B_{\theta\theta}\varepsilon_{\varnothing} + B_{\theta\theta}\varepsilon_{\theta} \\ M_{\theta} &= D_{\theta\theta}\chi_{\varnothing} + D_{\theta\theta}\chi_{\theta} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{d\varnothing} (T_{\varnothing} \sin \varnothing) - T_{\theta} \cos \varnothing - \theta_{\varnothing} \sin \varnothing &= 0 \\ \frac{d}{d\varnothing} (Q_{\varnothing} \sin \varnothing) + T_{\varnothing} + T_{\theta} &= 0 \\ \frac{d}{d\varnothing} (M_{\varnothing} \sin \varnothing) - M_{\theta} \cos \varnothing - Q_{\varnothing} R \sin \varnothing &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

根据球壳整体的平衡条件

$$2\pi R \sin \varnothing (T_{\varnothing} \sin \varnothing + Q_{\varnothing} \cos \varnothing) = 0 \quad (9)$$

及式(8)的第二式可建立 $T_{\varnothing}$ 、 T_{θ} 与 $Q_{\varnothing}$ 的关系式

$$T_{\varnothing} = -Q_{\varnothing} \operatorname{ctg} \varnothing, \quad T_{\theta} = -\frac{dQ_{\varnothing}}{d\varnothing} \quad (10)$$

式(8)的第三个平衡方程式在代入了式(7)后, 可以用 $\theta_{\varnothing}$ 和 ψ 来表示

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \psi}{d\varnothing^2} + \left(\frac{1}{D_{\varnothing\varnothing}} \frac{dD_{\varnothing\varnothing}}{d\varnothing} + \operatorname{ctg} \varnothing \right) \frac{d\psi}{d\varnothing} \\ - \left[\frac{D_{\theta\theta}}{D_{\varnothing\varnothing}} \operatorname{ctg}^2 \varnothing + \frac{D_{\varnothing\theta}}{D_{\varnothing\varnothing}} \right. \\ \left. - \frac{\operatorname{ctg} \varnothing}{D_{\varnothing\varnothing}} \frac{dD_{\varnothing\theta}}{d\varnothing} \right] \psi = -\frac{R^2 Q_{\varnothing}}{T_{\varnothing\varnothing}} \end{aligned} \quad (11)$$

另一个由 $Q_{\varnothing}$ 和 ψ 表示的协调方程式可由式(6)、(7)、(10)消去 u 、

W, ε_ϕ , ε_θ , T_ϕ , T_θ 而求得:

$$\begin{aligned}
 & \frac{d^2 Q_\phi}{d\phi^2} + \left(\frac{B_{\phi\phi} B_{\theta\theta} - B_{\phi\theta}^2}{B_{\phi\phi}} \frac{d}{d\phi} \left(\frac{B_{\phi\phi}}{B_{\phi\phi} B_{\theta\theta} - B_{\phi\theta}^2} \right) \right. \\
 & \left. + \operatorname{ctg} \phi \right) \frac{dQ_\phi}{d\phi} - \left(\frac{B_{\theta\theta}}{B_{\phi\phi}} \operatorname{ctg}^2 \phi - \frac{B_{\phi\theta}}{B_{\phi\phi}} \right. \\
 & \left. + \frac{B_{\phi\phi} B_{\theta\theta} - B_{\phi\theta}^2}{B_{\phi\phi}} \operatorname{ctg} \phi \frac{d}{d\phi} \left(\frac{B_{\phi\theta}}{B_{\phi\phi} B_{\theta\theta} - B_{\phi\theta}^2} \right) \right) Q_\phi \\
 & = \frac{B_{\phi\phi} B_{\theta\theta} - B_{\phi\theta}^2}{B_{\phi\phi}} \psi \quad (12)
 \end{aligned}$$

式(11)、(12)即是网状球壳连续化求解的基本齐次方程

式。当 $B_{\phi\phi} = B_{\theta\theta} = \frac{E\delta}{1-\nu^2}$, $B_{\phi\theta} = \frac{\nu E\delta}{1-\nu^2}$, $D_{\phi\phi} = D_{\theta\theta} = D$
 $= \frac{E\delta^3}{12(1-\nu^2)}$ 及 $D_{\phi\theta} = \frac{\nu E\delta^3}{12(1-\nu^2)}$ 时, 则式(11)、(12)

便退化为各向同性变厚度光面壳的经典方程式〔7〕,

$$\left. \begin{aligned}
 & \frac{d^2 \psi}{d\phi^2} + \left(\frac{3}{\delta} \frac{d\delta}{d\phi} + \operatorname{ctg} \phi \right) \frac{d\psi}{d\phi} \\
 & - \left(\operatorname{ctg}^2 \phi + \nu - \frac{3\nu}{\delta} \frac{d\delta}{d\phi} \right) \psi = - \frac{R^2 Q_\phi}{D} \\
 & \frac{d^2 Q_\phi}{d\phi^2} + \left(-\frac{1}{\delta} \frac{d\delta}{d\phi} + \operatorname{ctg} \phi \right) \frac{dQ_\phi}{d\phi} \\
 & - \left(\operatorname{ctg}^2 \phi - \nu - \frac{\nu}{\delta} \operatorname{ctg} \phi \frac{d\delta}{d\phi} \right) Q_\phi = E\delta \psi
 \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

四、基本方程式的求解和内力位移计算公式

要精确求解基本方程式(11)、(12)是比较困难的, 故这

是采用近似解法。网壳结构等代为连续体后，通常都属于薄壳的范畴，下列不等式成立

$$\frac{d^2 Q_\phi}{d\phi^2} \gg \frac{dQ_\phi}{d\phi} \gg Q_\phi, \quad \frac{d^2 \psi}{d\phi^2} \gg \frac{d\psi}{d\phi} \gg \psi$$

则在式(11)、(12)中略去小量后可得：

$$\frac{d^2 \psi}{d\phi^2} \approx -\frac{R^2 Q_\phi}{D_{\phi\phi}}, \quad \frac{d^2 Q_\phi}{d\phi^2} \approx E \delta_{\theta\theta} \psi \quad (14)$$

$$E \delta_{\theta\theta} = \frac{B_{\phi\phi} B_{\theta\theta} - B_{\phi\theta}^2}{B_{\phi\phi}} \quad (15)$$

式中 $\delta_{\theta\theta}$ 为网状球壳在纬向的广义等代厚度。当 $B_{\phi\theta} = 0$ 时，便有 $\delta_{\theta\theta} = \delta_\theta$ 。将式(14)合并，并用 $S = R\phi$ 代入，可得到下列四阶常微分方程式

$$\frac{d^4 Q_\phi}{dS^4} + \frac{4}{C^4} Q_\phi = 0 \quad (16)$$

其中 $C = \sqrt[4]{2R \sqrt{\frac{D_{\phi\phi}}{\delta_{\theta\theta}}}}$ (17)

式(16)的解为

$$Q_\phi = \bar{A}_1 \bar{\eta}_1 + \bar{A}_2 \bar{\eta}_2 + A_1 \eta_1 + A_2 \eta_2 \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \bar{\eta}_1 &= e^{-\frac{\bar{S}}{C}} \cos \frac{\bar{S}}{C}, & \eta_1 &= e^{-\frac{S}{C}} \cos \frac{S}{C} \\ \bar{\eta}_2 &= e^{-\frac{\bar{S}}{C}} \sin \frac{\bar{S}}{C}, & \eta_2 &= e^{-\frac{S}{C}} \sin \frac{S}{C} \end{aligned} \quad (19)$$

弧线长度 S ， $\bar{S}$ 分别自壳体的上、下端算起，待定常数 $\bar{A}_1$ 、 $\bar{A}_2$ 、 A_1 及 A_2 可由边界条件和连接条件来确定。

至此，便可由下列关系式

$$\bar{\eta}_3 = \bar{\eta}_1 + \bar{\eta}_2, \quad \eta_3 = \eta_1 + \eta_2$$

$$\eta_4 = \bar{\eta}_1 - \bar{\eta}_2, \quad \eta_4 = \eta_1 - \eta_2, \quad d\bar{s} = -ds$$

并根据式(6)、(7)、(10), 求得各内力和位移的表达式

$$Q_\phi = \bar{A}_1 \bar{\eta}_1 + \bar{A}_2 \bar{\eta}_2 + A_1 \eta_1 + A_2 \eta_2$$

$$T_\phi = -ctg\phi (\bar{A}_1 \bar{\eta}_1 + \bar{A}_2 \bar{\eta}_2 + A_1 \eta_1 + A_2 \eta_2) + T_\phi^*$$

$$T_\theta = -\frac{R}{C} (\bar{A}_1 \bar{\eta}_3 - \bar{A}_2 \bar{\eta}_4 - A_1 \eta_3 + A_2 \eta_4) + T_\theta^*$$

$$H = Q_\phi \sin\phi - T_\phi \cos\phi = \frac{1}{\sin\phi} (\bar{\eta}_1 \bar{A}_1 + \bar{\eta}_2 \bar{A}_2 + A_1 \eta_1 + A_2 \eta_2) - T_\phi^* \cos\phi$$

$$M_\phi = \frac{C}{2} (\bar{A}_1 \bar{\eta}_4 + \bar{A}_2 \bar{\eta}_3 - A_1 \eta_4 - A_2 \eta_3) + \frac{C^2 D_{\phi\theta} ctg\phi}{2RD_{\phi\phi}} (-\bar{A}_1 \bar{\eta}_2 + \bar{A}_2 \bar{\eta}_1 - A_1 \eta_2 + A_2 \eta_1)$$

$$M_\theta = \frac{C}{2} \frac{D_{\phi\theta}}{D_{\phi\phi}} (\bar{A}_1 \bar{\eta}_4 + \bar{A}_2 \bar{\eta}_3 - A_1 \eta_4 - A_2 \eta_3) - \frac{C^2 D_{\theta\theta} ctg\phi}{2RD_{\phi\phi}} (\bar{A}_1 \bar{\eta}_2 - \bar{A}_2 \bar{\eta}_1 + A_1 \eta_2 - A_2 \eta_1)$$

$$\psi = \frac{C^2}{2D_{\phi\phi}} (\bar{A}_1 \bar{\eta}_2 - \bar{A}_2 \bar{\eta}_1 + A_1 \eta_2 - A_2 \eta_1) + \psi^*$$

$$\Delta = \frac{R^2 \sin^2\phi}{E\delta_{\theta\theta} C} ((-\bar{A}_1 \bar{\eta}_3 + \bar{A}_2 \bar{\eta}_4 + A_1 \eta_3 - A_2 \eta_4) + \frac{CB_{\phi\theta}}{RB_{\phi\phi}} ctg\phi (\bar{A}_1 \bar{\eta}_1 + \bar{A}_2 \bar{\eta}_2 + A_1 \eta_1 + A_2 \eta_2)) + \Delta^*$$

$$\begin{aligned}
 w = & \frac{C}{E\delta_{\theta\theta}} \left\{ \frac{R^2}{C^2} (\bar{A}_1 \bar{\eta}_3 - \bar{A}_2 \bar{\eta}_4 - A_1 \eta_3 + A_2 \eta_4) \right. \\
 & + \frac{R \operatorname{ctg} \phi}{C} (\bar{A}_1 \bar{\eta}_1 + \bar{A}_2 \bar{\eta}_2 + A_1 \eta_1 + A_2 \eta_2) \\
 & + \frac{B \phi \theta}{2B \phi \phi} (-\bar{A}_1 \bar{\eta}_4 - \bar{A}_2 \bar{\eta}_3 + A_1 \eta_4 + A_2 \eta_3) \Big\} \\
 & + \bar{A}_3 \cos \phi + w^0
 \end{aligned}$$

(20)

在求得以上各式时，网壳的等代刚度近似按常量计。式中的法向位移 w 是由

$$\Delta = u \cos \phi - w \sin \phi, \quad \psi = \frac{1}{R} \left(u + \frac{dw}{d\phi} \right)$$

消去 u 可得

$$\frac{dw}{d\phi} + w \operatorname{ctg} \phi = R\psi - \frac{\Delta}{\cos \phi} \quad (21)$$

再积分后求得。待定常数 $\bar{A}_3$ ，可由 w 的边界条件确定。

式(20)中 T_ϕ^* 、 T_θ^* 、 ψ^* 、 Δ^* 及 w^0 为特解，可取无矩理论的薄膜内力和位移。

五、薄膜内力和薄膜位移

开口球壳在自重 g 、均布荷载 q 及环线荷载 p 作用下，薄膜内力的计算公式为^[8]（见图6）：

$$\begin{aligned}
 T_\phi^* = & -gR \frac{\cos \phi_b - \cos \phi}{\sin^2 \phi} - \frac{qR}{2} \left(1 - \frac{\sin^2 \phi_b}{\sin^2 \phi} \right) \\
 & - p \frac{\sin \phi_b}{\sin^2 \phi}
 \end{aligned}$$

$$T_{\theta}^* = gR \left(\frac{\cos \phi_b - \cos \phi}{\sin^2 \phi} - \cos \phi \right) + \frac{qR}{2} \left(1 - \frac{\sin^2 \phi_b}{\sin^2 \phi} - 2 \cos^2 \phi \right) + p \frac{\sin \phi_b}{\sin^2 \phi} \quad (22)$$

当 $\phi_b = 0$ ，除环线荷载项外，即为闭口壳的计算公式。

薄膜位移要考虑等代薄膜刚度的影响，在忽略等代刚度沿径线的变化率时，由式(6)、(7)、(21)可求得为：

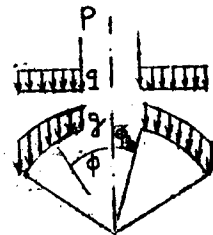


图6 球壳的荷载

$$\begin{aligned} \psi^* &= \frac{1}{B_{\phi\phi} B_{\theta\theta} - B_{\phi\theta}^2} \left\{ (B_{\theta\theta} + B_{\phi\phi}) T_{\phi}^* - (B_{\phi\phi} + B_{\theta\theta}) T_{\theta}^* \right\} \cot \phi \\ &\quad + B_{\phi\theta} \frac{dT_{\phi}^*}{d\phi} - B_{\phi\phi} \frac{dT_{\theta}^*}{d\phi} \quad (23) \\ \Delta^* &= \frac{B_{\phi\phi} T_{\theta}^* - B_{\phi\theta} T_{\phi}^*}{B_{\phi\phi} B_{\theta\theta} - B_{\phi\theta}^2} R \sin \phi \\ w^* &= \cos \phi \int \left(R \psi^* - \frac{\Delta^*}{\cos \phi} \right) \frac{d\phi}{\cos \phi} \end{aligned}$$

六、边界条件和连接条件

结合网壳的实际情况，兹把常遇的边界条件和连接条件分述如下。

(一) 网壳下端，即 $\phi = \phi_a$ 、 $\bar{S} = 0$ 、 $S = S_1$ 或 S_2 ， S_1 和 S_2 分别为闭口壳和开口壳的径线弧长，其边界条件可分为：

(1) 简支边: $\Delta_a = 0, \quad M_{\phi a} = 0。$

(2) 固定边: $\Delta_a = 0, \quad \psi_a = 0。$

(3) 弹性支承 (有圈梁时): $\Delta_a = \Delta_a^F, \quad \psi_a = \psi_a^F。$

其中 Δ_a^F, ψ_a^F 为圈梁在与网壳交接处的水平位移和转角, 如图7所示, 其表达式为:

$$\left. \begin{aligned} \Delta_a^F &= \frac{R^2 \sin^2 \phi_a}{EF_a} (Q_{\phi a} \sin \phi_a - T_{\phi a} \cos \phi_a \\ &\quad + h_a^F) + e_a \psi_a^F \\ \psi_a^F &= \frac{R^2 \sin^2 \phi_a}{EJ_a} (M_{\phi a} + (Q_{\phi a} \sin \phi_a \\ &\quad - T_{\phi a} \cos \phi_a) e_a + m_a^F) \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

式中 h_a^F 和 m_a^F 为单独作用在圈梁形心轴处的水平线荷载和线扭矩, EF_a 和 EJ_a 为圈梁的刚度,

e_a 为偏心距。实际工程中一般都

设置圈梁, 故下面详细分析一下。

把式(20)代入式(24), 并经

整理后, 此两个边界条件方程式

可用表1的矩阵形式来表示。表

1中 $K_1 \sim K_4$ 为函数 $\eta_1 \sim \eta_4$

在该边界处的值, 系数 $\bar{m} \bar{n}$ 见表2。

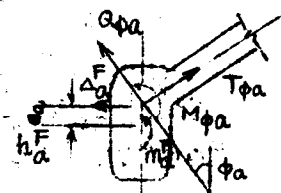


图7 网壳下端弹性支承

(二) 网壳上端, 即 $\phi = \phi_b, S = S_2, S = 0$ 处, 其边界条件可分为:

(1) 自由边: $H_b = 0, \quad M_{\phi b} = 0。$

(2) 弹性支承: $\Delta_b = \Delta_b^F, \quad \psi_b = \psi_b^F。$

其中 Δ_b^F 、 ψ_b^F 为内圈梁在与网壳交接处的水平位移和转角。由图 8a、b 可知，对竖放和斜放的内圈梁，其 Δ_b^F 、 ψ_b^F 分别为：

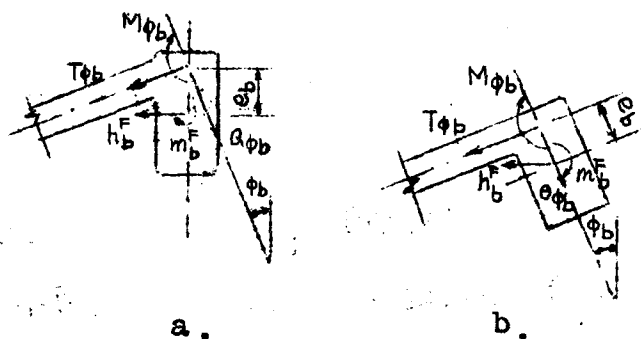


图 8 网壳上端弹性支承

$$\left. \begin{aligned} \Delta_b^F &= \frac{R^2 \sin^2 \phi_b}{EF_b} (T_{\phi_b} \cos \phi_b - Q_{\phi_b} \sin \phi_b \\ &\quad + h_b^F) + e_b \psi_b^F \\ \psi_b^F &= \frac{R^2 \sin^2 \phi_b}{EJ_b} (-M_{\phi_b} + (T_{\phi_b} \cos \phi_b \\ &\quad - Q_{\phi_b} \sin \phi_b) e_b + m_b^F) \end{aligned} \right\} (25a)$$

$$\left. \begin{aligned} \Delta_b^F &= \frac{R^2 \sin^2 \phi_b}{EF_b} (T_{\phi_b} \cos \phi_b - Q_{\phi_b} \sin \phi_b \\ &\quad + h_b^F) + e_b \psi_b^F \cos \phi_b \\ \psi_b^F &= \frac{R^2 \sin^2 \phi_b}{EJ_{b0}} (-M_{\phi_b} + e_b T_{\phi_b} + m_b^F) \end{aligned} \right\} (25b)$$

式中 h_b^F 和 m_b^F 为单独作用在内圈梁形心轴处的水平线荷载和线扭矩， EF_b 和 EJ_b 为内圈梁的刚度， e_b 为偏心距， J_{b0} 为圈梁

斜放时的等效惯性矩，它和主惯性矩 J_{bx} 、 J_{by} 有如下关系式

$$\frac{1}{J_{bo}} = \frac{\cos^2 \phi_b}{J_{bx}} + \frac{\sin^2 \phi_b}{J_{by}} \quad (26)$$

同理，内圈梁弹性支承时边界条件的展开式详见表 1 的后两行方程式， $\bar{K}_1 \sim \bar{K}_4$ 为函数 $\bar{\eta}_1 \sim \bar{\eta}_4$ 在该边界处的值，系数 m_n 见表 2。

如果网状球壳的最大 C 值小于 $\frac{S_1}{3}$ 或 $\frac{S_2}{3}$ ，以及对于无限大网壳，则壳中具有明显的边界效应特性，求解时可不计远端的影响。此时，表 1 中带有 K_1 、 K_1 ($i=1 \sim 4$) 的各项可略去不计，待定常数 $\bar{A}_1$ 、 $\bar{A}_2$ 、 A_1 、 A_2 便可分别由下式确定。

$$\left. \begin{aligned} \bar{A}_1 &= \frac{\bar{N}_1(1+\bar{m}_{22})+\bar{N}_2(1+\bar{m}_{12})}{(1+\bar{m}_{11})(1+\bar{m}_{22})+(1+\bar{m}_{12}^2)} \\ \bar{A}_2 &= \frac{-\bar{N}_1(1+\bar{m}_{12})+\bar{N}_2(1+\bar{m}_{11})}{(1+\bar{m}_{11})(1+\bar{m}_{22})+(1+\bar{m}_{12}^2)} \\ A_1 &= \frac{N_1(1+m_{22})+N_2(1+m_{12})}{(1+m_{11})(1+m_{22})+(1+m_{12}^2)} \\ A_2 &= \frac{-N_1(1+m_{12})+N_2(1+m_{11})}{(1+m_{11})(1+m_{22})+(1+m_{12}^2)} \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

式中 $\bar{N}_1$ 、 $\bar{N}_2$ 、 N_1 、 N_2 为表 1 中右端自由项的相应项乘积之和。如果需求网壳的法向位移 w ，可在壳体下端补充一个边界条件

$$w_a = -\Delta_a \sin \phi_a \quad (28)$$

以确定待定常数 $\bar{A}_3$ 。

(三) 壳段 i 与壳段 $i+1$ 的连接条件。当有刚度突变或荷载