第一届全国科学计算

并行算法論文集

科学计算并行算法交流会筹备组
1989.6

目　　录

椭圆型方程边值问题在 MIMD 计算机上的并行 ICCG 算法

王葸贤

(中国科学院计算中心)

§1 前　言

用系数矩阵的不完全分解作为"予处理矩阵"(Preconditioner)是迭代求解大型稀疏对称正定线性方程组的有效解法之一。它与共轭斜量结合即所谓的 ICCG 算法已在通常串行计算机上有广泛应用。近年来 ICCG 算法如何运用於具有局部存贮器(Local memory)的 MIMD 并行计算机也是感兴趣的课题之一。它的问题之一是对于同样规模的方程组,当处理机数目增多时,迭代收敛速度将严重下降。在[1]中采用了较特殊的技巧讨论了在二个或四个处理机的并行计算机上的算法,获得了较高的 Steed up ,但这一技巧很难推广到一般情况中去。本文并行化方法使用子结构法并给出一般方法使得对于在任意多个处理机上的收敛速度与在一个处理机上相同。其基本思想是对于子结构的"边界点"上尽可能采用完全分解。§2 中讨论 ICCG 的并行化方法。§3 中讨论其修正算法并给出计算实例。本文仅讨论了二阶椭圆型方程在方形域上模型问题,对于一般区域也可以进行类似处理。

§2 并行 ICCG 算法

我们考虑椭圆型偏微分方程的模型问题,具有第一或混合边界条件。

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial}{\partial x}\left(a(x,y)\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)-\dfrac{\partial}{\partial y}\left(b(x,y)\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)+c(x,y)u=f(x,y) \\ \qquad (x,y)\in\Omega=(0,1)\times(0,1) \\ \alpha(x,y)\dfrac{\partial u}{\partial n}+\beta(x,y)u=g(x,y) \qquad (x,y)\in\partial\Omega \end{cases} \tag{1}$$

这里 $c(x,y)\geqslant 0, a(x,y)>0, b(x,y)>0$。方程采用通常的五点差分格式进行离散化,得到下面的线性方程组

$$Au=f \tag{2}$$

这里 A 是一个对称的 M 矩阵。把矩阵 A 进行如下的分解

$$A=K-R \tag{3}$$

这里 K 为对称正定矩阵,R 为剩余矩阵,通常取 K 具有以下条件:

1)解方程 $Kv=b$ 要比解方程(2)容易,具有比较小的计算量

2)K 应尽可能近似 A,亦即 $K^{-1}A$ 的条件数应尽可能的小。这样的 K 称为"予处理矩阵"。一个带有予处理矩阵 K 的共轭斜量法(PCG 算法)如下:令 $u^{(0)}$ 为任意初始向量,$r^{(0)}=f-Au^{(0)}$ 为初始剩余向量,对 $k=0,1,2,\cdots$ 进行以下迭代,直至收敛。

$$\begin{cases} Kz^{(k)}=r^{(k)} \\ \beta_k=(z^{(k)},Kz^{(k)})/(z^{(k-1)},Kz^{(k-1)}) \qquad \beta_0=0 \\ p^{(k)}=z^{(k)}+\beta_k p^{(k-1)} \qquad p^{-1}=0 \\ \alpha_k=(z^{(k)},Kz^{(k)})/(p^{(k)},Ap^{(k)}) \\ u^{(k+1)}=u^{(k)}+\alpha_k p^{(k)} \\ r^{(k+1)}=r^{(k)}-\alpha_k p^{(k)} \end{cases} \tag{4}$$

在(4)中最主要的步骤是解第一式 $Kz^{(k)}=r^{(k)}$。而其余的则为矩阵与向量乘,或向量相加、内积等运算,这些都是比较容易并行化的,因此如何使第一式求解并行化是并行 PCG 算法的关键。Preconditioner K 的取法很多见[1—6],而 K 取成 A 的不完全分解则是有效的解法之一,这样的算法有时又称为 ICCG 算法。我们把区域 Ω 进行条剖分 $\Omega_1,\Omega_2,\cdots,\Omega_n$。把节点分成"内点"与"边界点",后者是指在两个相邻子区域的公共边界上节点。每个子区域内部剖分成 n 行。为使符号简化起见,我们假定 N=3,和第一边界条件,这样系数矩阵 A 具有如下形式

$$A=\left[\begin{array}{ccc:ccc} A_1 & & & C_{01}^T & & \\ & A_2 & & C_{11}^T & C_{02}^T & \\ & & A_3 & & C_{12}^T & \\ \hdashline C_{01} & C_{11} & & B_1 & & \\ & C_{02} & C_{12} & & B_2 & \end{array}\right] \tag{5}$$

其中 A_i 为块三对角矩阵,具有形式

$$A_i=\begin{bmatrix} D_{i1} & B_{i1}^T & & & \\ B_{i1} & D_{i2} & B_{i2}^T & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & B_{in-1} & D_{in} \end{bmatrix} \qquad (i=1,2,3) \tag{6}$$

$D_{ij}(j=1,\cdots,n)$,B_{ij} 为三对角矩阵,$B_{ij}(j=1,\cdots,n-1)C_{01},C_{11}$ 等均为对角矩阵。取 K 具有以下形式的 A 的不完全分解

$$K=P\Lambda^{-1}P^T \tag{7}$$

其中

$$P=\left[\begin{array}{ccc:cc} K_1 & & & & \\ & K_2 & & & \\ & & K_3 & & \\ \hdashline C_{01} & C_{11} & & \Delta 1 & \\ & C_{02} & C_{12} & & \Delta 2 \end{array}\right] \qquad \Lambda=\left[\begin{array}{ccc:cc} \Lambda_1 & & & & \\ & \Lambda_2 & & & \\ & & \Lambda_3 & & \\ \hdashline & & & \Delta 1 & \\ & & & & \Delta 2 \end{array}\right]$$

$$K_i=\begin{bmatrix} \Lambda_{i1} & & & \\ B_{i1} & \Lambda_{i2} & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & B_{in-1} & \Lambda_{in} \end{bmatrix} \qquad \Lambda_i=\begin{bmatrix} \Lambda_{i1} & & & \\ & \Lambda_{i2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \Lambda_{ni} \end{bmatrix}$$

这里

$$\begin{cases} \Lambda_{11} = D_{11} \\ \Lambda_{21} = D_{21} - B_{11}\,\Lambda_{11}^{-1}B_{11}^{T} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \Lambda_{n1} = D_{n1} - B_{n-11}\,\Lambda_{n-11}^{-1}B_{n-11}^{T} \end{cases} \tag{8}$$

$$\Delta_1 = B_1 - C_{01}\,\Lambda_{n1}^{-1}C_{01}^{T} - C_{11}\,\Lambda_{11+1}^{-1}C_{11}^{T} \tag{9}$$

对于未知向量 u 可作相应的剖分

$$u = (u_1, u_2, u_3, u_{1B}, u_{2B})^T \tag{10}$$

$u_i=(u_{i1}, u_{i2}, \cdots u_{in})$ $(i=1,2,3)$。我们把上面各式中 K_i，Λ_i 以及未知向量 u_i 和右端项 f_i 放在第 i 个处理器 P_i 的局部存贮器中，而边界部分的矩阵 Δ 及 C_{01}，C_{11} 和未知向量 u_{iB} 右端项 f_{iB} 也放在 P_i 的局部存贮器中。这样解 $Kz^{(k)}=r^{(k)}$ 可以分成以下三步进行。

第一步解

$$Py^{(k)} = r^{(k)} \tag{11}$$

亦即对 i=1,2,3并行计算

$$\begin{cases} y_{11}^{(k)} = \Lambda_{11}^{-1} r_{11}^{(k)} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_{n1}^{(k)} = \Lambda_{n1}^{-1}(r_{n1}^{(k)} - B_{n-11}y_{n-11}^{(k)}) \end{cases} \tag{12}$$

第二步在把 y_{i1} 从 P_{i+1} 送至 P_i 以后，即可对 i=1,2并行计算

$$y_{iB}^{(k)} = z_{iB}^{(k)} = \Delta_i^{-1}(r_{1i}^{(k)} - C_{0i}y_{n1}^{(k)} - C_{1i}y_{i+11}^{(k)}) \tag{13}$$

第三步在各个 P_i 中并行回代，即解

$$\Lambda^{-1}P^{T}z^{(k)} = y^{(k)} \tag{14}$$

亦即在把 $y_{iB}^{(k)}$ 从 P_{i-1} 送入 P_i 中以后，并行计算

$$\begin{cases} z_{n1}^{(k)} = y_{n1}^{(k)} - \Lambda_{n1}^{-1}C_{1i}^{T}y_{iB}^{(k)} \\ z_{n-1i}^{(k)} = y_{n-1i}^{(k)} - \Lambda_{n-1i}^{-1}B_{n-1i}^{T}z_{n1}^{(k)} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ z_{1i}^{(k)} = y_{1i}^{(k)} - \Lambda_{1i}^{-1}(B_{1i}^{T}z_{2i}^{(k)} - C_{1i-1}^{T}y_{i-1B}^{(k)}) \end{cases} \tag{15}$$

容易验证，上述 K 是对称正定矩阵，因而上述 ICCG 算法是收敛的。从以上算法中可以看出，对(4)每迭代一次，解第一式时需对边界上未知量作两次局部数据通讯，即相邻的处理器之间数据通讯，解其它各式时需计算二个向量内积 $(z^{(k)}, Kz^{(k)})$ 和 $(p^{(k)}, Ap^{(k)})$，需二次整体数据通讯，因此数据通讯量是不小的。

注1：上面各式中需计算若干个三对角子矩阵的逆，通常这样的逆矩阵是满阵，因而 K 和 P 不再有稀疏性，为节省存贮及运算量，我们采用[2]中办法用近似的逆矩阵来代替精确的逆矩阵，亦即用一三对角矩阵，其元素与精确的逆矩阵相应的元素相同，而其它元素为0，因此下面我们给出一个三对角矩阵精确求逆的递推公式，它是按主对角线以及各条与之平行的非主对角线上元素给出。

设矩阵

$$\Delta = \begin{bmatrix} a_1 & -b_1 & & \\ -b_1 & a_2 & -b_2 & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & -b_{n-1} & a_n \end{bmatrix} \tag{16}$$

其各阶主子式 $\det(\Delta_i)\neq 0$，但不需要 $b_i\neq 0$，这是与[2]中给出的公式所不同的。先考虑 Δ 如下的对称分解

$$\Delta = L^{T}DL \tag{17}$$

这里

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ -r_1 & 1 & & \\ & \ddots & & \\ & & -r_{n-1} & 1 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} d_n = a_n & r_{n-1} = b_{n-1}/d_n \\ d_{n-1} = a_{n-1} - d_n r_{n-1}^2 & r_{n-2} = b_{n-2}/d_{n-1} \\ \cdots\cdots\cdots & \\ d_1 = a_1 - d_2 r_1^2 & r_1 = b_1/d_2 \end{cases} \tag{18}$$

设 $\Delta^{-1} = L^{-1}D^{-1}(L^{-1})^{T} = (\delta_{ij})$ 容易计算 δ_{ij} 有如下的递推公式，其中主对角线上元素的递推公式为

$$\begin{cases} \delta_{11} = d_1^{-1} \\ \delta_{22} = d_2^{-1} + \delta_{11}r_1^2 \\ \cdots\cdots\cdots \\ \delta_{nn} = d_n^{-1} + \delta_{n-1\,n-1}r_{n-1}^2 \end{cases} \tag{19}$$

第(k−1)非主对角线上元素的递推公式为

$$\begin{cases} \delta_{1,k} = d_1^{-1}r_1\cdots r_{k-1} \\ \delta_{2,k+1} = d_2^{-1}r_2\cdots r_k + \delta_{1,k}r_1 \cdot r_k \\ \cdots\cdots\cdots \\ \delta_{n-k+1,n} = d_{n-k+1}^{-1}r_{n-k+1}\cdots r_{n-1} + \delta_{n-k,n-1}r_{n-k}r_{n-1} \end{cases} \tag{20}$$

对于非对称的三对角矩阵，在上述同样条件下，可以推得类似的递推公式。

§3 算法的一个修正及数值计算举例

上述算法中一个问题在于对同样的网格划分当处理器增加时，即每条子区域缩小，则其迭代收敛速度将严重下降，甚至于没有任何加速(Speed up)，数值例见下列表1。这是由于 K 的不完全分解在二个方面1)用近似逆矩阵代替了精确的三对角矩阵的逆矩阵。2)在边界部分有剩余矩阵 $R\neq 0$存在。当子区域 Ω_i 增多时，其边界部分也增加，为改善收敛速度，我们设法在边界部分是完全分解或更接近于完全分解，考虑下面的 Preconditioner $\bar{K}$

$$\bar{K} = \bar{P}\,\overline{\Lambda}^{-1}\bar{P}^{T} \tag{21}$$

其中

$$\bar{P} = \begin{bmatrix} K_1 & & & & \\ & K_2 & & & \\ & & K_3 & & \\ C_{01} & C_{11}C_{21}\cdots C_{n1} & & \overline{\Delta}_1 & \\ & & C_{02} & C_{12}C_{22}\cdots C_{n2} & \Delta_{12} \quad \overline{\Delta}_2 \end{bmatrix} \tag{22}$$

这里 K_i, C_{0i}, C_{1i} 与 §2 中相应的矩阵同。

$$\begin{cases} C_{ij} = -B_{ij}\Lambda_{ij}^{-1}C_{ij-1,i} & (i=1,2,\ \ j=2,3,\cdots n) \\ \overline{\Delta}_i = B_i - C_{01}\Lambda_{n1}^{-1}C_{01}^{T} - \sum_{j=1}^{n} C_{ij}\Lambda_{ij}^{-1}C_{ij}^{T} & (i=1,2) \\ \overline{\Delta}_{12} = -C_{02}\Lambda_{n2}^{-1}C_{01}^{T} \end{cases} \tag{23}$$

$$\overline{\Lambda} = \begin{bmatrix} \Lambda_1 & & & & \\ & \Lambda_2 & & & \\ & & \Lambda_3 & & \\ & & & \overline{\Delta}_1 & \\ & & & & \overline{\Delta}_2 \end{bmatrix} \tag{24}$$

在计算中矩阵的逆仍取三对角的近似逆矩阵，C_{ij}取近似例如只取主对角线一行或取三对角线。边界部分$\overline{\Delta}_{12}$可以略去，计算表明，这样仍可大大改善并行迭代收敛速度，而并不增加许多运算量.计算结果见表2。

数值计算举例

例1

$$\begin{cases} \varepsilon u_{xx} + u_{yy} = 0 (x,y) \in \Omega = (0,1) \times (0,1) \\ u = 0.1 \qquad (xy) \in \partial\Omega \end{cases}$$

取 h=1/32，剩余 $r=10^{-6}$，平均迭代收敛速度 $v=\left(\frac{r_m}{r_0}\right)^{1/m}$。N 为处理机个数，m 为使剩余从 r_0 降到 r 所需迭代次，在并行计算机 ipsc 上计算结果为下

	ε=1		ε=100	
N=	v=	m=	v=	m=
1	0.248	13	0.045	5
2	0.350	17	0.485	20
4	0.411	19	0.573	30
8	0.476	23	0.702	45

表1　§2中算法计算结果

例2　问题同上，取 h=1/16，N=2　ε=100　j为(23)中第一式 $c_{ij}\neq 0$，而 $c_{ij+1}=0$之值

j=	m=	v=	m=	v=
1	15	0.325	19	0.335
2	13	0.280	17	0.290
3	12	0.244	16	0.258
4	11	0.201	14	0.223
5	9	0.161	12	0.178
6	8	0.110	11	0.145
7	5	0.045	9	0.091
	3	0.0047	9	0.090

表2　§3中算法计算结果

注2：表2中头二列结果 $c_{ij}(j=1,\cdots,)$仅取主对角线元素，其余元素为0。后二列为逐点 ICCG 算法[7]且 c_{ij}与$\overline{\Delta}_{12}$取精确的矩阵的迭代收敛速度，最后一行为 N=1即通常串行算法的迭代收敛速度。

参 考 文 献

[1]G. Meurant, Multitasking the Conjugate Gradient Method on the CRAY X-MP/48, Parallel computing, 5(1987), 267-280

[2]P. Concus, G. H. Golub, G. Meurant, Block Precorditioning for the conjugate Gradient Methocl, SIAM J. sci. stat. comput. 6(1985), 220—252.

[3]J. A. Meijerink, H. A. van der vorst, An iterative solution Methocl for Linear System of which the coefficient Matrix is a symmetric M-Matrix, Math. comput. 31 (1977), 148—162.

[4]J. A. Meijerink, H. A. van der vorst, Guideline for the usage of Incomplete Decompositions in solving sets of Linear Equations, J. Comput. physics 44(1981), 134—155.

[5]J. H. Bramble, J. E. Passciak, A. H. schatz, the consrrjuction of Preconditioners for Elliptic Problem by substructring. I, Math Comput. 47(1980), 103-134.

[6]G. H. Golub, D. Mayers, The use of Pre—coditioning over Irregular Regions, Proc. Sixth Internat. conf. on computing Methods in Science and Engineering. 1984, 3—14.

[7]J. X. Wang A. Krechel, H. Plum, The Preconditioned conjugate Gradient (PCG) Algorithm on MIMD computers (to appear)

The Parallel ICCG Algorithm on MIMD Computer for Elliptic Problems

Wang Jinxian

(Computing Center, Academia Sinica)

Abstract

In this paper, we discuss a parallel ICCG Algorithm on MIMD computer by which we can obtain the same rate of convergence in any processors and in one processor.

色散方程的并行数值解法

南开大学　黎光禹　于广涛

摘　要

本文考察下述模型

$$U_t = aU_{xxx}, \qquad -\infty < x < \infty,\ 0 < t < T_0 \tag{1}$$

$$U(x,0) = \phi(x), \qquad -\infty < x < \infty \tag{2}$$

的周期解问题，其中a为常数。设周期为1。对上述问题的三层显格式的近似解作外推，可以使近似解的精度达到$O(h^6)+O(\tau^2 h^3)$。作并行处理之后，求解过程可以在流水线并行机上高效率地进行。

1. 引　言

孤波的产生，引起了数学工作者及数值工作者的兴趣。由于KDV方程$U_t+UU_x+U_{xxx}=0$的差分格式的建立，在某种程度上可以看成方程$U_t+UU_x=0$和$U_t+U_{xxx}=0$的叠加。对于$U_t+UU_x=0$大家比较熟悉，因此，对（1）－（2）如何建立高精度、高稳定性的差分格式，日渐成为人们感兴趣的问题。文献［1］、［2］提出的色散方程差分格式的三层显格式数值稳定性较差。文献［3］是在周期为1的情况下对周期解建立的三层（特殊情况下是两层）差分格式，虽然绝对稳定，截断误差阶高，局部截断误差为$O(\tau^2)+O(h^4)$，可惜是，不利于并行计算。文献［4］提出的绝对稳定的半显式格式，其精度不高且不利于并行计算。文献［5］中提出的三层显格式H_3^4：

$$\frac{(u^{n+1}_{m+\frac{1}{2}} - u^{n}_{m+\frac{1}{2}} + u^{n}_{m-\frac{1}{2}} - u^{n-1}_{m-\frac{1}{2}})}{2\tau} = a\,[p(u^{n},m+1) + 2p(u^{n},m) + p(u^{n},m-1)]/4h^3,$$

其中

$$p(u^n,m) = u^n_{m+\frac{3}{2}} - 3u^n_{m+\frac{1}{2}} + 3u^n_{m-\frac{1}{2}} - u^n_{m-\frac{3}{2}}.$$

当$a>0$时，稳定性条件$R=a\tau/h^3 \leqslant 1.1651$，局部截断误差$O(\tau h)+O(h^4)$。其稳定性范围较大，但是为了保证稳定性必须取$\tau=O(h^3)$，因此实际截断误差为$O(h^4)$。为了求出具有精度为$10^{-4}$的近似解，必须取$h=10^{-3}$，因而$\tau=10^{-9}$，这样，计算量将十分庞大。为了减少计算量，我们在$H_3^4$的基础上建立近似解的渐近展开式，利用外推的思想建立新的数值解法。在$R=|a|\tau/h^3 \leqslant 1.1651$的条件下，本文外推格式可以使截断误差达到$O(\tau^2h^2)+O(h^6)$，考虑到$\tau=O(h^3)$，截断误差实际上为$O(h^6)$。这样，若要求近似解的精度为$10^{-6}$，只需取$h=10^{-3/4}$，$\tau=h^3=10^{-9/4}=10^{-3}\cdot 10^{-1/4}$，可以估计出，本文格式的工作量大约为$H_3^6$的工作量的$10^{-3}$倍。

2. 引　理

为了估计近似解渐近展开式的余项，我们需要建立一个引理，为此，我们引用如下结果（参考文献［6］）：

对于写成向量形式的差分方程

$$A^{(k)}u^{k+1} = B^{(k)}u^{k+1} + \tau f^k \tag{3}$$

其中

$$u^k = [u_1^k, u_2^k, \cdots, u_M^k]^T, \quad f^k = [f_1^k, f_2^k, \cdots, f_M^k]^T,$$

$$A^{(k)} = [a^{(k)}_{j,m}]_{j,m=1}^{M}, \quad B^{(k)} = [b^{(k)}_{j,m}]_{j,m=1}^{M}.$$

引入最大模 $\|u^k\|_c = \max_{1\leqslant m\leqslant M}|u_m^k|$，则我们有：

定理1　设矩阵$A^{(k)}$的逆当$0<\tau<\tau_0$，$h=g(\tau)$关于k一致有界，且差分格式（3）关于初值稳定，则格式关于右端稳定。而且（3）的解有估计式：

$$\|u^k\| \leqslant M\left(\|u^0\| + \tau\sum_{k=0}^{J}\|f^k\|\right),$$

对任何k，$0\leqslant k\leqslant J$，$0\leqslant\tau\leqslant\tau_0$，其中$J=[T_0/\tau]$，M与τ、h、k、J无关。

于是，我们可以建立如下引理：

引理　对于三层显格式差分方程

$$\begin{cases} \dfrac{u^{n+1}_{m+\frac{1}{2}} - u^{n}_{m+\frac{1}{2}} + u^{n}_{m-\frac{1}{2}} - u^{n-1}_{m-\frac{1}{2}}}{2\tau} = \dfrac{a}{4h^3}[p(u^n,m+1) + 2p(u^n,m) + p(u^n,m-1)] + \sigma^n_{m+\frac{1}{2}} & (4) \\ m = \frac{1}{2}, \cdots, M-\frac{3}{2}; \quad n = 1, \cdots J. \qquad J = [T_0/\tau], \\ |u^1_{m+\frac{1}{2}}| \leqslant c_1\tau^2h^2 + c_2h^6, \quad c_1, c_2 > 0, \text{ 与 } \tau、h、m、n \text{ 无关}. \\ |u^0_{m+\frac{1}{2}}| = 0, \qquad m = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \cdots, M-\frac{3}{2} \end{cases}$$

其中$|\sigma^n_{m+\frac{1}{2}}| \leqslant c_1\tau^2h^2 + c_2h^6$，$c_1$、$c_2$与τ、h、m、n无关。

的解$u^n_{m+\frac{1}{2}}$当$R=|a|\tau/h^3\leqslant 1.1851$时，满足不等式

$$|u^n_{m+\frac{1}{2}}| \leqslant c_1\tau^2h^2 + c_2h^6, \quad n=1,2,\cdots,[T_0/\tau], \quad m=\frac{1}{2},\frac{3}{2},\cdots,M-\frac{3}{2}$$

证明：令$u^n=[u_1^n, u_2^n, \cdots, u_M^n]^T$，则（4）式可表示如下：

$$u^{n+1} = Bu^n + Cu^{n-1} + 2\tau\sigma^n$$

其中$\sigma^n=[\sigma_1^n, \sigma_2^n, \cdots, \sigma_{M-1}^n]^T$；B、C为仅和τ、h有关的矩阵。

令$v^n=u^{n-1}$，有：

$$\begin{aligned} u^{n+1} &= Bu^n + cv^n + 2\tau\sigma^n \\ v^{n+1} &= u^n \end{aligned}$$

可以写成：$\begin{pmatrix} u^{n+1} \\ v^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B & C \\ I & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u^n \\ v^n \end{pmatrix} + 2\tau\sigma^n$

令$W^{n+1}=(u^{n+1}, v^{n+1})^T$，上式可表示为：

$$W^{n+1} = HW^n + 2\tau\sigma^n, \qquad H = \begin{pmatrix} B & C \\ I & 0 \end{pmatrix}$$

当$R\leqslant 1.1851$时，由引理1：

$$\begin{aligned} \|W^n\| &\leqslant M\left(\|W^0\| + \tau\sum_{k=0}^{J}\|\sigma^k\|\right) \\ &\leqslant (c_1\tau^2h^2 + c_2h^6 + T_0c_1\tau^2h^2 + T_0c_2h^6)M \\ &\leqslant c_1\tau^2h^2 + c_2h^6 \qquad (J=[T_0/\tau]). \end{aligned}$$

引理得证。

3 渐近展开式的建立

下面，我们建立问题（1）－（2）的近似解的渐近展开式，为此，我们假定：

（1）问题（1）－（2）的初值充分光滑，因而它的解U足够光滑。

(2) 定义A为如下问题的解

$$\begin{cases} A_t = a\,A_{xxx} + \frac{3a}{8}u_{x^5} - \frac{1}{8}u_{tx^2}, & -\infty<x<\infty,\quad 0<t\leqslant T_0 \\ A(x,0)\equiv 0, & -\infty<x<\infty \end{cases} \tag{5}$$

则A存在唯一且足够光滑。类似地，我们逐个定义B、C、D、E和F为如下问题的解

$$\begin{cases} B_t = a\,B_{xxx} + \frac{1173a}{1920}u_{x^7} - \frac{1}{384}u_{tx^4} + \frac{3a}{8}A_{x^5} - \frac{1}{8}A_{tx^2} & -\infty<x<\infty,\ 0<t\leqslant T_0 \\ B(x,0)\equiv 0, & -\infty<x<\infty \end{cases} \tag{6}$$

$$\begin{cases} C_t = a\,C_{xxx} + \frac{10078a}{193536}u_{x^9} - \frac{1}{46080}u_{tx^6} + \frac{117a}{1920}A_{x^7} - \frac{1}{384}A_{tx^4} + \frac{3a}{8}B_{x^5} - \frac{1}{8}B_{tx^2} & -\infty<x<\infty,\ 0<t\leqslant T_0 \\ C(x,0)\equiv 0, & -\infty<x<\infty \end{cases} \tag{7}$$

$$\begin{cases} D_t = a\,D_{xxx} - \frac{1}{4}u_{tx} & -\infty<x<\infty,\ 0<t\leqslant T_0 \\ D(x,0)\equiv 0, & -\infty<x<\infty \end{cases} \tag{8}$$

$$\begin{cases} E_t = a\,E_{xxx} - \frac{1}{96}u_{tx^3} - \frac{1}{4}A_{tx} + \frac{3a}{8}D_{x^5} - \frac{1}{8}D_{tx^2} & -\infty<x<\infty,\ 0<t\leqslant T_0 \\ E(x,0)\equiv 0, & -\infty<x<\infty \end{cases} \tag{9}$$

$$\begin{cases} F_t = a\,F_{xxx} - \frac{1}{6}u_{tx} & -\infty<x<\infty,\ 0<t\leqslant T_0 \\ F(x,0)\equiv 0, & -\infty<x<\infty \end{cases} \tag{10}$$

则B、C、D、E和F存在唯一且足够光滑。

定 理 2 当$R=|a|\tau/h^2\leqslant 1.1651$时，问题(1)-(2)的解$u^n_{m+\frac{1}{2}}$可以作渐近展开

$$u^n_{m+\frac{1}{2}} = (u)^n_{m+\frac{1}{2}} + h^2(A)^n_{m+\frac{1}{2}} + h^4(B)^n_{m+\frac{1}{2}} + h^6(C)^n_{m+\frac{1}{2}} + \tau h\,(D)^n_{m+\frac{1}{2}} + \tau h^3(E)^n_{m+\frac{1}{2}} + \tau^2(F)^n_{m+\frac{1}{2}} + (\eta)^n_{m+\frac{1}{2}} \tag{11}$$

其中$(u)^n_{m+\frac{1}{2}}$为问题(1)-(2)的真解在$(x_{m+\frac{1}{2}},\ t_n)$处的值；$(A)^n_{m+\frac{1}{2}}$、$(B)^n_{m+\frac{1}{2}}$、$(C)^n_{m+\frac{1}{2}}$、$(D)^n_{m+\frac{1}{2}}$、$(E)^n_{m+\frac{1}{2}}$和$(F)^n_{m+\frac{1}{2}}$为前文定义的A、B、C、D、E和F在$(x_{m+\frac{1}{2}},t_n)$处的值。余项$\eta^n_{m+\frac{1}{2}}$满足不等式$|\eta^n_{m+\frac{1}{2}}|\leqslant c_1\tau^2h^2+c_2h^8$。

其中c_1、$c_2>0$，与τ、h、m、n无关。$m=\frac{1}{2},\cdots,M-\frac{1}{2}$；$n=1,2,\cdots,[T_0/\tau]$；

证 明：证明过程可以分三步

1. 假定(11)式成立，将它代入(4)式；对u、A、B、C、D、E、F在(x_m,t_n)作泰勒展开，建立关于τ、h的代数恒等式；
2. 考察τ、h的系数，建立余项$\eta^n_{m+\frac{1}{2}}$的方程；
3. 选取适当的初值$\eta^1_{m+\frac{1}{2}}$，利用前面引理，估计$\eta^n_{m+\frac{1}{2}}$。

将(11)式代入(4)式，整理可得：

$$h^2LA + Lu + h^4LB + h^6LC + \tau hLD + \tau h^3LE + \tau^2LF = 0 \tag{12}$$

其中，当Z足够光滑时，符号

$$Lz \equiv \frac{(z)^{n+1}_{m+\frac{1}{2}} - (z)^n_{m+\frac{1}{2}} + (z)^n_{m-\frac{1}{2}} - (z)^{n-1}_{m-\frac{1}{2}}}{2\tau} - a\left[(z)^n_{m+\frac{3}{2}} - (z)^n_{m+\frac{2}{2}} - 2(z)^n_{m+\frac{1}{2}} + 2(z)^n_{m-\frac{1}{2}} + (z)^n_{m-\frac{2}{2}} - (z)^n_{m-\frac{3}{2}}\right]/4h^3$$

又记$(Lz)^n_m$为表达式Lz在(x_m,t_n)处之值；对u在(x_m,t_n)作泰勒展开，可以表示为：

$$Lu = \left(u_t + \frac{h^2}{8}u_{tx^2} + \frac{h^4}{384}u_{tx^4} + \frac{h^6}{46080}u_{tx^6} + \frac{1}{4}\tau h\,u_{tx^2} + \frac{1}{96}\tau h^3u_{tx^4} + \frac{1}{8}\tau^2u_{x^3}\right)^n_m - a\left(u_{x^3} + \frac{3}{8}h^2u_{x^5} + \frac{117}{1920}h^4u_{x^7} + \frac{10078}{193536}h^6u_{x^9}\right)^n_m + o(h^8) + o(\tau^2h^3) + o(\tau h^5)$$

对A、B、C、D、E和F有类似结果，于是(12)式可以写成如下形式：

$$\left(u_t - a\,u_{xxx} + h^2\left(\frac{1}{8}u_{tx^2} + A_t - a\,A_{x^3} - \frac{3a}{8}u_{x^5}\right) + h^4\left(\frac{1}{384}u_{tx^4} + \frac{1}{8}A_{tx^2} + B_t - a\,B_{x^3} - \frac{3a}{8}A_{x^5} - \frac{117a}{1920}u_{x^7}\right) + h^6\left(\frac{1}{46080}u_{tx^6} + \frac{1}{384}A_{tx^4} + \frac{1}{8}B_{tx^2} + C_t - a\,C_{x^3} - \frac{3a}{8}B_{x^5} - \frac{117a}{1920}A_{x^7} - \frac{10078a}{193536}u_{x^9}\right) + \tau h\left(\frac{1}{4}u_{tx^2} + D_t - a\,D_{xxx}\right) + \tau h^3\left(\frac{1}{96}A_{tx^2} + \frac{1}{96}u_{tx^4} + E_t - a\,E_{x^3} + \frac{1}{8}D_{tx^2} - \frac{3a}{8}D_{x^5} - a\,E_{x^3}\right) + \tau^2\left(\frac{1}{8}u_{t^2} + F_t - a\,E_{x^3}\right)\right)^n_m + \frac{1}{2\tau}\left(\eta^{n+1}_{m+\frac{1}{2}} - \eta^n_{m+\frac{1}{2}} + \eta^n_{m-\frac{1}{2}} - \eta^{n-1}_{m-\frac{1}{2}}\right) - \frac{a}{4h^3}\left[p(\eta^n, m+1) + 2p(\eta^n, m) + p(\eta^n, m-1)\right] + o(h^8) + o(\tau h^3) + o(\tau h^5) = 0$$

将(5)-(10)式代入上式，不难得出：

$$\frac{\eta^{n+1}_{m+\frac{1}{2}} - \eta^n_{m+\frac{1}{2}} + \eta^n_{m-\frac{1}{2}} - \eta^{n-1}_{m-\frac{1}{2}}}{2\tau} - \frac{a\left[p(\eta^n, m+1) + 2p(\eta^n, m) + p(\eta^n, m-1)\right]}{4h^3} + o(h^8) + o(\tau h^3) + o(\tau h^5) = 0$$

又由(11)式，余项$\eta^n_{m+\frac{1}{2}}$当$n=1$时，应当取值：

$$\eta^1_{m+\frac{1}{2}} = u^1_{m+\frac{1}{2}} - (u)^1_{m+\frac{1}{2}} - h^2(A)^1_{m+\frac{1}{2}} - h^4(B)^1_{m+\frac{1}{2}} - h^6(C)^1_{m+\frac{1}{2}} - \tau h\,(D)^1_{m+\frac{1}{2}} - \tau h^3(E)^1_{m+\frac{1}{2}} - \tau^2(F)^1_{m+\frac{1}{2}}$$

利用u、A、B、C、D、E和F的光滑性，在$(x_{m+\frac{1}{2}},0)$处作泰勒展开，得到：

$$\begin{aligned} (u)^1_{m+\frac{1}{2}} &= \phi(x_{m+\frac{1}{2}}) + a\tau\phi_{x^3}(x_{m+\frac{1}{2}}) + \frac{a^2\tau^2}{2}\phi_{x^6}(x_{m+\frac{1}{2}}) + o(\tau^3) \\ h^2(A)^1_{m+\frac{1}{2}} &= \frac{a}{4}\tau h^2\phi_{x^5}(x_{m+\frac{1}{2}}) + o(\tau^2h^2) \\ h^4(B)^1_{m+\frac{1}{2}} &= \frac{a\tau}{16}h^4\phi_{x^7}(x_{m+\frac{1}{2}}) + o(\tau^2h^4) \\ h^6(C)^1_{m+\frac{1}{2}} &= o + o(\tau h^6) \\ \tau h\,(D)^1_{m+\frac{1}{2}} &= -\frac{a^2}{8}\tau^2h\,\phi_{x^4}(x_{m+\frac{1}{2}}) + o(\tau^3h) \\ \tau h^3(E)^1_{m+\frac{1}{2}} &= o + o(\tau^2h^3) \\ \tau^2(F)^1_{m+\frac{1}{2}} &= o + o(\tau^3) \end{aligned}$$

令：$u^1_{m+\frac{1}{2}} = \phi(x_{m+\frac{1}{2}}) + a\tau\phi_{x^3}(x_{m+\frac{1}{2}}) + \frac{a}{4}\tau h^2\phi_{x^5}(x_{m+\frac{1}{2}}) + \frac{a^2\tau^2}{2}\phi_{x^6}(x_{m+\frac{1}{2}}) + \frac{29a}{160}\tau h^4\phi_{x^7}(x_{m+\frac{1}{2}}) - \frac{a^2}{4}\tau^2h\,\phi_{x^7}(x_{m+\frac{1}{2}})$

则显然有

$$|\eta^1_{m+\frac{1}{2}}| \leqslant c_1\tau^2h^2 + c_2h^\beta$$

由于 $u^0_{m+\frac{1}{2}} = (u)^0_{m+\frac{1}{2}}$，$(A)^0_{m+\frac{1}{2}} = (B)^0_{m+\frac{1}{2}} = (C)^0_{m+\frac{1}{2}} = (D)^0_{m+\frac{1}{2}} = (E)^0_{m+\frac{1}{2}} = (F)^0_{m+\frac{1}{2}} = 0$，故 $\eta^0_{m+\frac{1}{2}} = 0 \quad m = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \cdots, N-\frac{3}{2}$；

所以：$\eta^n_{m+\frac{1}{2}}$ 是差分方程

$$\begin{cases} \dfrac{\eta^{n+1}_{m+\frac{1}{2}} - \eta^n_{m+\frac{1}{2}} + \eta^n_{m-\frac{1}{2}} - \eta^{n-1}_{m-\frac{1}{2}}}{2\tau} - \dfrac{a[p(\eta^n, m+1) + 2p(\eta^n, m)}{\omega h^3} \\ + p(\eta^n, m-1)] + o(h^\beta) + o(\tau^2h^2) + o(\tau h^\beta) = 0 \\ \eta^1_{m+\frac{1}{2}} = \phi(x_{m+\frac{1}{2}}) + a\tau\phi_x(x_{m+\frac{1}{2}}) + \frac{a}{6}\tau h^2\phi_{xx}(x_{m+\frac{1}{2}}) + \frac{a^2\tau^2}{2}\phi_{xx}(x_{m+\frac{1}{2}}) \\ + \frac{92}{1260}\tau h^4\phi_x(x_{m+\frac{1}{2}}) - \frac{a^2}{6}\tau^2h\phi_x(x_{m+\frac{1}{2}}) \\ \eta^0_{m+\frac{1}{2}} = 0 \qquad m = \frac{1}{2}, \cdots, N-\frac{3}{2} \qquad , \ n = 1, \cdots J. \end{cases}$$

的解，满足前文引理条件，故有 $|\eta^n_{m+\frac{1}{2}}| \leqslant c_1\tau^2h^2 + c_2h^\beta$

其中 c_1、c_2 与 τ、h、m、n 无关，c_1、$c_2 > 0$．$m = \frac{1}{2}, \cdots, N-\frac{3}{2}$，$n = 1, 2, \cdots, J$．#

4. 外推的推广

本段讨论（11）式在计算机上的实施，在实际计算中，为保证差分格式的稳定性，应当取 τ/h = 常数 $c \leqslant 1.1851/|a|$．基本想法是利用多重网格，消去A、B、C、D、E和F，以达到提高近似解精度的目的。假设 $(u)^n_{m+\frac{1}{2}}$，$(u)^{6n}_{3(m+\frac{1}{2})}$，$(u)^{2n}_{3(m+\frac{1}{2})}$，$(u)^{6n}_{1(m+\frac{1}{2})}$ 代表分别为 (τ, h)、$(\frac{\tau}{2}, \frac{h}{2})$、$(\frac{\tau}{3^2}, \frac{h}{3})$、$(\frac{\tau}{6^2}, \frac{h}{6})$ 的问题（1）－（2）的解在同一节点处的值，对A、B、C、D、E和F有类似的表示，由（11）式可以有：

$$\begin{bmatrix} u^n_{m+\frac{1}{2}} \\ u^{6n}_{3(m+\frac{1}{2})} \\ u^{2n}_{3(m+\frac{1}{2})} \\ u^{6n}_{1(m+\frac{1}{2})} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & h^2 & h^4 & h^6 & \tau h & \tau h^3 & \tau^2 \\ 1 & \frac{1}{3^2}h^2 & \frac{1}{3^4}h^4 & \frac{1}{3^6}h^6 & \frac{1}{3^2}\tau h & \frac{1}{3^4}\tau h^3 & \frac{1}{3^4}\tau^2 \\ 1 & \frac{1}{3^2}h^2 & \frac{1}{3^4}h^4 & \frac{1}{3^6}h^6 & \frac{1}{3^2}\tau h & \frac{1}{3^6}\tau h^3 & \frac{1}{3^6}\tau^2 \\ 1 & \frac{1}{6^2}h^2 & \frac{1}{6^4}h^4 & \frac{1}{6^6}h^6 & \frac{1}{6^2}\tau h & \frac{1}{6^4}\tau h^3 & \frac{1}{6^4}\tau^2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} (u)^n_{m+\frac{1}{2}} \\ (A)^n_{m+\frac{1}{2}} \\ (B)^n_{m+\frac{1}{2}} \\ (C)^n_{m+\frac{1}{2}} \\ (D)^n_{m+\frac{1}{2}} \\ (E)^n_{m+\frac{1}{2}} \\ (F)^n_{m+\frac{1}{2}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \eta^n_{m+\frac{1}{2}} \\ \eta^{6n}_{1(m+\frac{1}{2})} \\ \eta^{2n}_{3(m+\frac{1}{2})} \\ \eta^{6n}_{1(m+\frac{1}{2})} \end{bmatrix}$$

将上述矩阵的第一、二、三、四行分别乘以 $-\frac{1}{360}$、$\frac{16}{45}$、$-\frac{729}{280}$ 和 $\frac{1024}{315}$，然后将它们相加可以得到：

$$\frac{1024}{315}\eta^{6n}_{1(m+\frac{1}{2})} - \frac{729}{280}\eta^{2n}_{3(m+\frac{1}{2})} + \frac{16}{45}\eta^{6n}_{1(m+\frac{1}{2})} - \eta^n_{m+\frac{1}{2}} / + (u)^n_{m+\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1024}{315}u^{6n}_{1(m+\frac{1}{2})} - \frac{729}{280}u^{2n}_{3(m+\frac{1}{2})} + \frac{16}{45}u^{6n}_{1(m+\frac{1}{2})} - \frac{1}{360}u^n_{m+\frac{1}{2}}$$

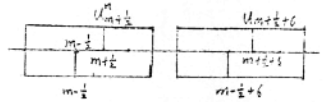
于是我们得到一个新的近似解：

$$\bar{u}^n_{m+\frac{1}{2}} = \frac{1024}{315}u^{6n}_{1(m+\frac{1}{2})} - \frac{729}{280}u^{2n}_{3(m+\frac{1}{2})} + \frac{16}{45}u^{6n}_{1(m+\frac{1}{2})} - \frac{1}{360}u^n_{m+\frac{1}{2}}$$

它具有的精度为 $|(u)^n_{m+\frac{1}{2}} - \bar{u}^n_{m+\frac{1}{2}}| < O(h^\beta)$．

5. 并行处理

为了使流水线并行机能够高效率过工作，必须：1）向量越长越好；2）数据流不致于中断或阻塞；为此，应该使数据的相关性尽可能减少。



$m = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \cdots, N-\frac{3}{2}$；

$n = 1, 2, \cdots, [T_0/\tau]$；

如图所示，计算 $u^n_{m+\frac{1}{2}}$ 和 $u^n_{m+\frac{1}{2}+6}$ 时所用数据完全无关。因此，计算次序可以按如下安排：

u^n_4，u^n_{10}，…，$u^n_{4+6K_1}$，　$(4+6k_1 \leqslant N < 10+6k_1)$

u^n_5，u^n_{11}，…，$u^n_{5+6K_2}$，　$(5+6k_2 \leqslant N < 11+6k_2)$

u^n_6，u^n_{12}，…，$u^n_{6+6K_3}$，　$(6+6k_3 \leqslant N < 12+6k_3)$

u^n_7，u^n_{13}，…，$u^n_{7+6K_4}$，　$(7+6k_4 \leqslant N < 13+6k_4)$

u^n_8，u^n_{14}，…，$u^n_{8+6K_5}$，　$(8+6k_5 \leqslant N < 14+6k_5)$

u^n_9，u^n_{15}，…，$u^n_{9+6K_6}$，　$(9+6k_6 \leqslant N < 15+6k_6)$

因此，可设置向量如下：

$V^n_{\frac{1}{2}} = (u^n_0, \cdots, u^n_5, \cdots, u^n_{N-3})^T$．

$V^n_{\frac{3}{2}} = (u^n_3, \cdots, u^n_4, \cdots, u^n_{N-4})^T$．

$V^n_{\frac{5}{2}} = (u^n_2, \cdots, u^n_3, \cdots, u^n_{N-5})^T$．

$V^n_{\frac{7}{2}} = (u^n_1, \cdots, u^n_2, \cdots, u^n_{N-6})^T$．

$V^n_{\frac{9}{2}} = (u^n_5, \cdots, u^n_6, \cdots, u^n_{N-2})^T$．

$V^n_{\frac{11}{2}} = (u^n_6, \cdots, u^n_7, \cdots, u^n_{N-1})^T$．

则计算过程可按下式向量化地进行：（令 $\gamma = a\tau/2h^3$）

$$V^{n+1}_{\frac{1}{2}} = \gamma V^n_{\frac{5}{2}} - \gamma V^n_{\frac{7}{2}} + (1-2\gamma)V^n_{\frac{1}{2}} + (2\gamma-1)V^n_{\frac{3}{2}} + \gamma V^n_{\frac{3}{2}} - \gamma V^n_{\frac{5}{2}} + V^{n-1}_{\frac{1}{2}}$$

至此，我们还需要作一点说明。考虑到（1）－（2）问题解的周期性，我们只需要求出在一个周期 $x_0 \leqslant x \leqslant x_0+l$ 中的数值解。考虑我们的计算公式，可以看出在 t 方向上每前进一步，左端的三个节点，右端的两个节点上的近似解不能由公式算出，即每前进一步就会少算五个点。但我们可以在下述区域上求解：　$0 \leqslant T \leqslant T_0$。

$$-3h[T/\tau]+x_0 \leqslant x \leqslant (x_0+l)+2h[T/\tau].$$

我们还有，$u(x,0)=u(x+l,0)$，即 $\phi(x)=\phi(x+l)$。这样，我们可以求出矩形区域：　$x_0 \leqslant x \leqslant x_0+l$，$0 \leqslant T \leqslant T_0$ 中各节点上的近似解。

6. 评注

由于：1）在本文中，$u^n_{m+\frac{1}{2}}$ 的渐近展开式中包含了两个参数 τ 和 h 的混合项；2）在本文中，不是逐步地外推，而是同时消去所有低阶项，取相应的近似解的线性组合作为新的外推解，因此，本文中提出的方法，与通常的Richardson外推法相比，似有不同之处。实际上，我们还可以对近似解的选取以及线性组合的构造作进一步的探索。

参 考 文 献

[1] 秦孟兆，色散方程 $u_t=a\,u_{xxx}$ 的差分格式，计算数学，6：1（1984），1-13

[2] 黎益，李兆杰，关于色散方程 $u_t=a\,u_{xxx}$ 的两个显式差分格式，计算数学，8：3（1986），257-268

[3] 曾文平，解色散方程 $u_t=a\,u_{xxx}$ 的一族绝对稳定的高精度差分格式，计算数学，9：4（1987），403-410.

[4] 曾文平，关于色散方程 $u_t=a\,u_{xxx}$ 的一类绝对稳定的半显式格式，计算数学，10：3（1988），248-252.

[5] 邹华谟，一类具高稳定性的三层显式格式 H^{σ}_{3}，计算数学，8：3（1986），329-331.

[6] 蒋叔豪，孙庆新，偏微分方程数值解，（1985），浙江大学出版社。

对称区域分裂法的两个注解

刘　波　　吕　涛

（成都科分院数理室）

摘　要

文献[1]，[2]，[3] 给出解线性初，边值问题的对称区域分裂法，本文对具有对称区域的本征值问题和经变换后方程形状发生变化的线性边值问题给出区域分裂算法，从而发展了文献[1]，[2]，[3] 的思想。

1　本征值问题

对实际中具有对称区域的数学物理初、边值问题，若用Schwarz 交替法解这类问题需要若干次迭代才能得到很好的近似解[4]。文献[1]，[2]对线性和算子问题用对称区域分裂法将问题化为 4 个子问题，用 4 次迭代给出精确解。文献[3] 基于对称区域上任何函数均可分解为奇，偶对称函数之和，用对称区域分裂法将问题化为俩个独立子问题，用俩次迭代给出精确解，因而有很好的并行性。这里，我们给出本征值问题的对称区域分解法的结果。让我们先看一个例子。

例 1：考虑 1 维本征值问题

$$\begin{cases} -u''=\lambda u & \text{in } (-1,1) \\ u(-1)=u(1)=0 \end{cases} \tag{1}$$

易知方程(1)的所有本征值为 $\lambda=(n\pi/2)^2, n=0,\pm1,\pm2,\cdots\cdots$，并且都是简单的，方程(1) 对应的本征函数为 $\sin(\frac{n\pi}{2}(x+1)), n=0,\pm1,\pm2,\cdots\cdots$，与(1) 对应的区域分裂法有如下子问题：

$$\begin{cases} -u''=\lambda u & \text{in } (0,1) \\ u(1)=u'(0)=0 \end{cases} \tag{2}$$

$$\begin{cases} -u''=\lambda u & \text{in } (0,1) \\ u(0)=u(1)=0 \end{cases} \tag{3}$$

易知 $\lambda=\pi^2$ 所对应的本征函数 $\sin(\pi x)$ 是奇函数，它是方程(3) 而非方程(2)的解。$\lambda=(\frac{1}{2}\pi)^2$ 所对应的本征函数 $\cos(\frac{1}{2}\pi x)$ 是偶函数，它是方程(2)而非方程(3)的解。

对本征值问题，对称区域分裂法的结果又是怎样的呢？假定 Ω 是一对称开域，$\overline{\Omega}=\overline{\Omega_1}\cup\overline{\Omega_2}$，$\Omega_1\cap\Omega_2=\phi$，$\Gamma=\partial\Omega_1\cap\Omega=\partial\Omega_2\cap\Omega$，$\Gamma_1=\partial\Omega_1\cap\partial\Omega$，$\Gamma_2=\partial\Omega_2\cap\partial\Omega$，且 Ω_1 和 Ω_2 关于 Γ 轴对称，定义变换 $T:\overline{\Omega}\to\overline{\Omega}$，$\bar{x}=(\bar{x}_1,\cdots\cdots,\bar{x}_N)=Tx$ 使得 x 关于 Γ 是对称点，显然 $T^2=I$，$D=(\delta_1,\cdots\cdots\delta_N)$，$\bar{D}=(\delta_{\bar{1}},\cdots\cdots\delta_{\bar{N}})$。

定义 1：称微分算子 $L(x,D)$ 或边界算子 $B(x,D)$ 是偶对称的，若对于任何 $u(x)$ 形式上有 $L(x,D)u(x)=L(\bar{x},\bar{D})u(\bar{x})$ 或 $B(x,D)u(x)=B(\bar{x},\bar{D})u(\bar{x})$。

实际中的偶对称微分算子是到处可见的，例如：Laplace算子与变换 $T(x,y)=(y,x)$ 或 $T(x,y)=(-x,-y)$。可见[1]-[3]。考虑二阶椭圆线性边值问题：

$$\begin{cases} L(x,D)u=\lambda u & \text{in } \Omega \\ B(x,D)u=0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}, \tag{4}$$

方程(4) 的对称区域分裂算法是解如下子问题：

国家自然基金资助课题。

$$\begin{cases} L(x,D)u_+ = \lambda u_+ & \text{in } \Omega_1, \\ B(x,D)u_+ = 0 & \text{on } \partial\Omega_1\backslash\Gamma', \quad \dfrac{\partial u_+}{\partial n} = 0 \quad \text{on } \Gamma'. \end{cases} \tag{5}$$

$$\begin{cases} L(x,D)u_- = \lambda u_- & \text{in } \Omega_1, \\ B(x,D)u_- = 0 & \text{on } \Gamma_1, \quad u_- = 0 \quad \text{on } \Gamma'. \end{cases} \tag{6}$$

令$N(\lambda I - A)$为本征值问题(4)对应于λ的本征函数空间，$N(\lambda I - A_1)$为本征值问题(5)对应于λ的本征函数经过偶延拓后的空间，$N(\lambda I - A_2)$为本征值问题(6)对应于λ的本征函数经过奇延拓后的空间，则我们有如下结果

定理1：假定微分算子$L(x,D)$，$B(x,D)$是偶对称的，则λ是方程(4)的本征值的充要条件是λ是方程(5)或方程(6)的本征值，且

$$N(\lambda I - A) = N(\lambda I - A_1) \oplus N(\lambda I - A_2) \tag{7}$$

证明：设λ是方程(4)的本征值，$\varphi_k(x)$是方程(4)对应于λ的一个非零本征函数，由$L(x,D)$和$B(x,D)$的偶对称性知$\varphi_k(\bar{x})$，$\bar{x} = Tx$也是方程(4)对应于λ的本征函数，显然$(\varphi_k(x) + \varphi_k(\bar{x}))/2$，$(\varphi_k(x) - \varphi_k(\bar{x}))/2$不能同时为零，类似于[3]定理1的证明知$\lambda$是方程(5)和(6)的本征值，且$N(\lambda I - A) \subseteq N(\lambda I - A_1) + N(\lambda I - A_2)$。反之亦然，注意到 $N(\lambda I - A_1) \cap N(\lambda I - A_2) = \{\theta\}$。从而知(7)成立。

注1：对于2 m阶方程以及初边值问题，定理1的结论同样成立。参见[1]--[3]。同[3]对于一些非规则区域上的本征值问题，我们可用对称区域分裂法扩展到规则区域上去求解。

注2：本征值问题不同于线性或非线性问题的一个重要特点是：我们用对称区域分裂法解时还可以降低本征函数空间的维数，从而使本征问题易解，节约可观的工作量。例如，λ是原问题(4)的重本征值，但对应的分解问题(5),(6)可能是简单本征值。当然，若预先得到本征函数的奇偶性，则只要解一个方程即可。

例2：考虑单位圆上的本征值问题（三维以上单位球面上的本征值问题见[3]P52）

$$\frac{\partial^2 U}{\partial\theta^2} = \lambda u \tag{8}$$

易知$\lambda = -1$是方程(8)的本征值，对应的本征函数空间的维数为$C_2^1 - C_0^1 = 2$ [5]§2，$\cos(\theta)$,$\sin(\theta)$是其一组基，显然$\cos(\theta)$,$\sin(\theta)$分别是方程

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u_+}{\partial\theta^2} = \lambda u_+ & \theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), \\ u_+(-\frac{\pi}{2}) = u_+(\frac{\pi}{2}) = 0 \end{cases} \tag{9}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u_-}{\partial\theta^2} = \lambda u_- & \theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), \\ U_-'(-\frac{\pi}{2}) = U_-'(\frac{\pi}{2}) = 0 \end{cases} \tag{10}$$

的本征函数.

2 圆弧对称情形

文献[3]中提到用圆弧对称的方法将无界区域问题化为有界区域问题，再用对称区域分裂法解。众所周知，二维调和函数经过反演变换后仍为调和函数，因此，对边界是非齐次的无界区域调和方程可以化到有界区域中去求解[3]。但对大多数问题来说，由于变换的非线性或非正交性，微分方程很难在保持其不变性。例如：三维空间中的调和函数与反演变换。因此，无法用文献[1]－[3]的方法去求解。不过我们发现若同时变换方程和未知函数，则同样可以用文献[3]的思想去求解的。

考虑二或三维无界域问题：极坐标或球坐标的Poisson方程

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega, \\ u = g & \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \tag{11}$$

其中$\Omega \subset R^n$，$n=2,3$。是一个锥或角域其顶点在原点。我们假定方程(11)的解存在。则问题(11)的区域分裂算法为：置$\Gamma = \{r = 1\} \cap \Omega$，$\Omega_1 = \Omega \cap \{r < 1\}$，$\Omega_2 = \Omega \cap \{r > 1\}$。定义反演变换$T: \Omega_1 \longrightarrow \Omega_2$，$T(r,\theta,\varphi) = (r^{-1},\theta,\varphi)$。和变换$T_2 f(r,\theta,\varphi) = r^{2-n} f(r^{-1},\theta,\varphi)$，$T_3 g(r,\theta,\varphi) = r^{3-n} g(r^{-1},\theta,\varphi)$。$f_+ = \frac{1}{2}(f + T_2 f)$，$f_- = \frac{1}{2}(f - T_2 f)$，$g_+ = \frac{1}{2}(g + T_3 g)$，$g_- = \frac{1}{2}(g - T_3 g)$。

第一步：在Ω_1上解如下问题

$$\begin{cases} -\Delta u_- = f_- & \text{in } \Omega_1, \\ u_- = g_- & \text{on } \partial\Omega_1\backslash\Gamma; \quad u_- = 0 \quad \text{on } \Gamma. \end{cases} \tag{12}$$

$$\begin{cases} -\Delta u_+ = f_+ & \text{in } \Omega_1, \\ u_+ = g_+ & \text{on } \partial\Omega_1\backslash\Gamma; \quad \dfrac{\partial u_+}{\partial n} = 0 \quad \text{on } \Gamma, \ n=2. \\ 2\dfrac{\partial u_+}{\partial n} - u_+ = 0 \quad \text{on } \Gamma, \ n=3 \end{cases} \tag{13}$$

第二步：置

$$w(r,\theta,\varphi) = \begin{cases} (u_+ + u_-)/2 & (r,\theta,\varphi) \in \Omega_1, \\ u_+ & (r,\theta,\varphi) \in \Gamma \\ r^{n-2}(u_+(r^{-1},\theta,\varphi) - u_-(r^{-1},\theta,\varphi))/2 & (r,\theta,\varphi) \in \Omega_2. \end{cases} \tag{14}$$

其中n_1为Ω_1的外法向，同文献[3]一样上面的算法只须两次迭代，一步并行过程。并且算法是在同一区域上进行，因而离散方程具有同一系数矩阵，大大减少了工作量和存储。

定理2：$w(r,\theta,\varphi)$是方程(11)的唯一解。

证明：我们只就三维问题进行讨论，二维情形类似。首先注意到 $T^2 = I$，$T_2^2 = I$，$T_3^2 = I$，$T_2 f_+ = f_+$，$T_2 f_- = -f_-$，$T_3 g_+ = g_+$，$T_3 g_- = -g_-$。Laplace算子在球坐标(r,θ,φ)下的形式为：$\Delta = \frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial}{\partial r}) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\Delta(\theta,\varphi)$。设$u^*$是方程(11)的解，显然$u_+^* = (u^* + T_3 u^*)/2$ 满足方程

$$\begin{cases} -\Delta u_+^* = f_+ & \text{in } \Omega_1, \\ u_+^* = g_+ & \text{on } \partial\Omega_1\backslash\Gamma, \quad u_+^* = u_2^* \quad \text{on } \Gamma. \end{cases} \tag{15}$$

$$\begin{cases} -\Delta u_2^* = f_+ & \text{in } \Omega_2, \\ u_2^* = g_+ & \text{on } \partial\Omega_2\backslash\Gamma, \quad u_2^* = u_+^* \quad \text{on } \Gamma. \end{cases} \tag{16}$$

$v_+(\rho,\theta,\varphi) = r u_+^*(r,\theta,\varphi)$，$r = \frac{1}{\rho}$为反演变换，则有 $\frac{\partial v_+}{\partial r} = (u_+^*(r,\theta,\varphi) + r\frac{\partial u_+^*}{\partial r})\cdot\frac{d\rho}{dr} = -\rho^2 u_+^*(r,\theta,\varphi) - \rho\frac{\partial u_+^*}{\partial\rho}$，$\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial v_+}{\partial r}) = -(\rho^2(u_+^*(r,\theta,\varphi) + r\frac{\partial u_+^*}{\partial r}))\cdot\frac{d\rho}{dr} = \rho^4(\frac{\partial^2 u_+^*}{\partial\rho^2} + 2\frac{\partial u_+^*}{\partial\rho})$。故 $-\Delta v_+(\rho,\theta,\varphi) = \{\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho^2\frac{\partial v_+}{\partial\rho}) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial v_+}{\partial\theta}) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 v_+}{\partial\varphi^2}\} = r^5(-\Delta u_+^*(r,\theta,\varphi)) = r^5 f_+(r,\theta,\varphi) = \rho^{-5} f_+(\rho^{-1},\theta,\varphi) = T_2 f_+(\rho,\theta,\varphi) = f_+(\rho,\theta,\varphi)$，$v_+(\rho,\theta,\varphi) = \rho^{-1} u_+^*(\rho^{-1},\theta,\varphi) = \rho^{-1} g_+(\rho^{-1},\theta,\varphi) = T_3 g_+ = g_+(\rho,\theta,\varphi)$ on $\partial\Omega_2\backslash\Gamma$，$v_+(1,\cdot) = u_+^*(1,\theta,\varphi)$ on Γ。易知 $u_+^*(\rho,\theta,\varphi) = v_+(\rho,\theta,\varphi) = r u_+^*(r,\theta,\varphi)$。将等式两边在$r=1$处Taylor展开并比较一次项的系数知$u_+^*$满足(13)式。接下来同[3]定理1的证明一样知结论成立。

注3：上面的方法和结论推广到某些有界区域时也成立。例如，区域Ω为部分环形域$\Omega = \{(x,y);\ a<x(y(b<x,\ b)a,\ a^2(x^2+y^2(a^2\}$，则只要适当延拓成大区域使之关于圆弧$x^2+y^2=1$及反演变换是对称的即可。

注4：上面关于Poisson方程的方法和结论可以推广到其它方程。例如，n维空间中的方程

$$\begin{cases} (1-x\cdot x')^2\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + 2(n-2)(1-x\cdot x')\sum_{i=1}^{N} x_i\frac{\partial u}{\partial x_i} = f & \text{in } \Omega. \\ u = g & \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \tag{21}$$

其中$\Omega = \{(x_1,\cdots\cdots,x_N);\ x_i>0,\ i=1,\ \cdots\ n-1,\ \sum_{i=1}^{N} x_i^2 a^2)1\}$，$x=(x_1,\cdots\cdots,x_N)\in R^N$。同[3]的证明一样，方程(21)可以经过反演变换将问题化为有界域问题（参见[5] 6和 9），从而可采用对称区域法[1]-[3]求解。

注5：对于发展方程来讲上面的方法同样成立．参见文献[1][2].

参考文献

[1] Rao Chwan-Xia: Symmetric domain decomposition: an exact procedure for solveing linear PDE's. in Kang Li-Shan (ed): Parallel Algorithms and Domain Decomposition. Univ. of Wuhan press (1987) 161-176.

[2] Shao Jian-Ping, Kang Li-Shan: Symmetric domain decomposition for linear operator equations. as same as in [1]. 177-185

[3] 吕涛： 对称区域分裂法的改进与推广．并行算法论文集．国防科工委军用共性软件专业组编． (1988)

[4] P.E.Bjrstad and O.B.Widlund: Solving elliptic problems on regions partitioned into substructures. SIAM J. Numer. Anal. vol. 23 (1986)

[5] 华罗庚： 从单位圆谈起．科学出版社． (1977)

Poisson 方程 Neumann 边值问题的区域分裂快速解法

陆益君　王能超

（华中理工大学数学系）

摘　要

本文提出矩形区域上求解 Poisson 方程 Neumann 边值问题的一种区域分裂快速直接算法。基于特殊的块三对角矩阵逆的 Chebyshev 多项式表示，可以获得了容量矩阵的特征分解， 由此不必求出容量矩阵， 而只需通过快速 Fourier 变换和三对角方程组的求解即得容量方程组的解．子区域上 Poisson方程 Dirichlet 边值问题的求解可独立地进行．文中，我们对算法的可行性作了理论分析，并且具体考察了算法在超立方多处理机系统上的执行方案，给出了算法的复杂性分析．通过与基于 Fourier 分析的矩阵分解法相比较，证实了区域分裂快速直接法是一种有效的超立方算法．

1. 引　　言

区域分裂法是并行多处理机系统上数值求解偏微分边值问题的有效方法．区域分裂有重迭与不重迭两种情形．本文只考虑不重迭情形．通过区域分裂，由椭圆形边值问题离散而成的代数方程组被约简成容量方程组（包含较小未知数的线性方程组）和子区域上子问题的求解．一般地，按处理共享储器结构求解容量方程组的有效方法[4,5]，因为它不象直接求出容量矩阵（容量矩阵的形成将花费很大代价）．T.F.Chan 和 D.C.Resasco[2,3]考察了矩形区域上求解 Poisson方程 Dirichlet边值问题的区域分裂法， 通过对容量矩阵特征对的分析，他们提出了一种不求出容量矩阵而能获得容量方程组之解的快速直接法，但其中的分析法具有局限性，难以应用于其它边值问题．

本文给出矩形区域上具有Neumann边值条件的Poisson方程的区域分裂快速解法．基于特殊块三对角矩阵逆的 Chebyshev 多项式表示，我们获得了容量矩阵的特征分解，从而可不必求出容量矩阵而得到容量方程组的解．文中所给分析方法具有较普遍的适用性．

在多处理机系统中， 各处理机之间过于频繁的数据通讯是影响算法效率的根本原因，即通讯开销成为设计多处理机上并行算法时应予考虑的重要方面．本文通过对所提算法在超立方机上的执行分析，以及与基于 Fourier 分析的矩阵分解法的比较，确认区域分裂快速解法是一种高效的超立方算法．

本文的轮廓如下． 第二节描述区域分裂快速算法（包括一般的区域分裂法，容量矩阵的特征对分析，和区域分裂快速直接法），第三节讨论算法的可行性，第四节分析区域分裂快速解法和基本 Fourier 分析的矩阵分解法在超立方机上的执行复杂性，从而给出比较结论．

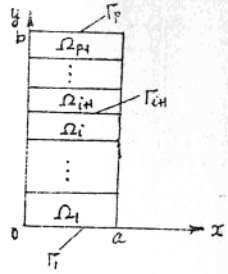
2　区域分裂快速解法

2.1 一般的区域分裂法．

考虑 Poisson 方程的 Neumann 边值问题

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \text{in } \Omega, \quad \Omega=\{(x,y)\mid 0<x<a,\ 0<y<b\} \\ \partial u/\partial n = g, & \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.1}$$

如右图所示，将 Ω 剖分成 $p-1$ 个矩形区域 Ω_i （$i=1,\cdots,p-1$），记子区域Ω_i与Ω_{i+1}的界面为Γ_{i+1}，Ω_1与$y=0$之界面记为Γ_1，Ω_{p-1}与$y=b$之界面记为Γ_p.



[6]段文（7）的方法对（2.1）作5点差分格式离散.

设x方向和y方向的网格步长分别为h_x和h_y，$h_x=a/n$，$h_y=a/m$，子区域Ω_i在y方向所包含的内网格点数为m_i，则

$$\sum_{(i)}^{P-1} m_{(i)}+P=M+1$$

若网格节点编号规则为：先编子区域上的节点，后编界面上的节点，且每个子区域（界面）上节点的编号顺序为从下到上，从左到右. 这样，离散后的方程组写成

$$\begin{bmatrix} L_\Omega & R \\ Q & L_\Gamma \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_\Omega \\ u_\Gamma \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} F_\Omega \\ F_\Gamma \end{bmatrix}$$

其中

$$L_\Omega=\begin{bmatrix} L_{\Omega_1} & & \\ & \ddots & \\ & & L_{\Omega_{P-1}} \end{bmatrix},\quad R=\begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & R_{P-2,P-1} & R_{P-1,P} \end{bmatrix},\quad Q=\begin{bmatrix} 2R_{11}^T & & & \\ R_{12}^T & R_{22}^T & & \\ & \ddots & \ddots & R_{P-1,P}^T \\ & & 2R_{P-1,P} & \end{bmatrix}$$

$$L_\Gamma=\begin{bmatrix} L_{\Gamma_1} & & \\ & \ddots & \\ & & L_{\Gamma_p} \end{bmatrix},\quad L_{\Omega_i}=\begin{bmatrix} T & -I & & \\ -I & T & -I & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & -I & T \end{bmatrix},\quad L_{\Gamma_i}=T,\quad R_{ii}=\begin{bmatrix} -I \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},\quad R_{i,i+1}=\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -I \end{bmatrix}$$

$$T=\begin{bmatrix} 2\delta-2 & & & \\ -1 & 2\delta-1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2\delta-2 \end{bmatrix},\quad (\rho=h_y/h_x,\ \ \delta=(1+\rho^2)/\rho^2)$$

u_Ω、u_Γ与F_Ω、F_Γ的含义自明.

对（2.2）作块 Gauss 消元，可得

$$Cu_\Gamma=b \tag{2.3}$$

其中

$$b=F_\Gamma-QL_\Omega^{-1}F_\Omega \tag{2.4}$$

$$C=L_\Gamma-QL_\Omega^{-1}R \tag{2.5}$$

算法是：

$$b=\begin{bmatrix} b_{\Gamma_1} \\ \vdots \\ b_{\Gamma_p} \end{bmatrix},\quad b_{\Gamma_i}=\begin{cases} F_{\Gamma_1}-2R_{11}^TL_{\Omega_1}^{-1}F_{\Omega_1} & (i=1) \\ F_{\Gamma_i}-R_{i-1,i}^TL_{\Omega_{i-1}}^{-1}F_{\Omega_{i-1}}-R_{ii}^TL_{\Omega_i}^{-1}F_{\Omega_i} & (i=2,\cdots,P-1) \\ F_{\Gamma_P}-2R_{P-1,P}L_{\Omega_{P-1}}^{-1}F_{\Omega_{P-1}} & (i=P) \end{cases} \tag{2.6}$$

$$C=\begin{bmatrix} B_1 & 2C_1 & & \\ A_2 & B_2 & C_2 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & A_{P-1} & B_{P-1} & C_{P-1} \\ & & & 2A_P & B_P \end{bmatrix},$$

$$A_i=-R_{i-1,i}^TL_{\Omega_{i-1}}^{-1}R_{i-1,i}\quad (i=2,\cdots,P) \tag{2.7a}$$

$$B_i=\begin{cases} L_{\Gamma_1}-2R_{11}^TL_{\Omega_1}^{-1}R_{11} & \\ L_{\Gamma_i}-R_{i-1,i}^TL_{\Omega_{i-1}}^{-1}R_{i-1,i}-R_{ii}^TL_{\Omega_i}^{-1}R_{ii} & (i=2,\cdots,P-1) \\ L_{\Gamma_P}-2R_{P-1,P}^TL_{\Omega_{P-1}}^{-1}R_{P-1,P} & (i=P) \end{cases} \tag{2.7b}$$

$$C_i=-R_{ii}^TL_{\Omega_i}^{-1}R_{i,i+1}\quad (i=1,\cdots,P-1) \tag{2.7c}$$

方程组（2.3）称作容量方程组，系数矩阵 C 称作容量矩阵. 我们知道一旦求出（2.3）的解u_Γ，即可通过如下$p-1$个子问题

$$L_{\Omega_i}u_{\Omega_i}=F_{\Omega_i}-R_{ii}u_{\Gamma_i}-R_{i,i+1}u_{\Gamma_{i+1}}\quad (i=1,2,\cdots,P-1) \tag{2.8}$$

的求解而得各子区域上的解u_{Ω_i}. （2.8）的求解可利用快速直接法. 因此问题的关键是求解（2.3）. 通常，由（2.7a）～（2.7c）求出容量矩阵将花费很大代价，一般避免直接形成容量矩阵而求解（2.3）的有效策略是采用预处理共轭梯度法（参看〔4〕〔8〕）. 但对于本文所考虑的问题，我们可求出矩阵Ai、Bi和Ci的特征分解，因而可以获得一种不形成C而求解（2.3）的快速直接法.

2.2 矩阵Aj、Bj和Cj的特征分解

首先，引进修正的 Chebyshev 多项式$S_k(x)$，其定义为

$$S_0(x)=1,\quad S_1(x)=x,\quad S_k(x)=xS_{k-1}(x)-S_{k-1}(x)\quad (k\geq 2)$$

$S_n(x)$有如下不同的表示形式

$$S_k(x)=\begin{cases} \sin(k+1)\theta/\sin\theta, & \cos\theta=x/2,\quad 0\leq x<2; \\ k+1, & x=2; \\ \sh(k+1)\theta/\sh\theta, & \ch\theta=x/2,\quad x>2, \end{cases} \tag{2.9}$$

$$S_k(x)=\frac{\gamma^{(k+1)}-\gamma^{-(k+1)}}{\gamma-\gamma^{-1}},\quad \gamma=\frac{x}{2}+\sqrt{(x/2)^2-1},\quad x\geq 2, \tag{2.10}$$

$$S_k(x)=\prod_{l=1}^{k}(x-r_k(l)),\quad r_k(l)=2\cos\left(\frac{l\pi}{k+1}\right).$$

若规定$S_{-1}(x)=0$，则$S_k(x)$ $(k=-1,0,1,\cdots)$ 具有性质

$$S_i(x)S_{j+k}(x)-S_{i-k-1}(x)S_{j-1}(x)=S_j(x)S_{i+j}(x),\quad -1\leq k\leq i,\ j\geq 0, \tag{2.11}$$

关于修正的 Chebyshev 多项式的其余性质可参看〔1〕〔5〕.

令 kxk 块三对角矩阵

$$M_k=\begin{bmatrix} H & -I & & \\ -I & H & -I & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & -I & H \end{bmatrix}$$

，其中H为方阵.

我们有

引理1 矩阵M_k非奇异的充要条件是$S_k(H)$非奇异. 此时，M_k^{-1}可表示成分块形式 $M_k^{-1}=(M_{ij})$，其中

$$M_{ij}=\begin{cases} S_k^{-1}(H)S_{i-1}(H)S_{k-j}(H), & j\geq i; \\ S_k^{-1}(H)S_{j-1}(H)S_{k-i}(H), & i\geq j. \end{cases} \tag{2.12}$$

证明：参看〔1〕.

令 $\sigma_j = 4\rho^2 \sin^2 j\pi/2n$，$t_j = (1+\sigma_j/2 - \sqrt{\sigma_j+\sigma_j^2/4})^2$ (2.13)

$$W=(W_0 W_1 \cdots W_n)$$

$$W_i=\begin{cases}\frac{1}{2}(1,\cdots 1)^T & (i=0),\\ (1,\cos i\pi/n,\cos 2i\pi/n,\cdots,\cos(n-1)i\pi/n,\cos i\pi)^T & (i=1,\cdots n-1),\\ \frac{1}{2}(1,-1,\cdots,(-1)^n)^T & (i=n).\end{cases} \quad (2.14)$$

则有

定理1 矩阵Ai、Bi和Ci具有相同的特征向量Wi(i=0,...,n)，且

$$W^{-1}A_iW=D_i=diag\{\alpha_{i0}\ \alpha_{i1}\cdots\alpha_{in}\}$$

$$W^{-1}B_iW=\Lambda_i=diag\{\beta_{i0}\ \beta_{i1}\cdots\beta_{in}\}$$

$$W^{-1}C_iW=E_i=diag\{\gamma_{i0}\ \gamma_{i1}\cdots\gamma_{in}\}$$

其中

$$\alpha_{i0}=1/s_{m(i-1)+1}\ (i=2,\cdots p),\quad \alpha_{ij}=-t_j^{m(i-1)/2}(1-t_j)/(1-t_j^{m(i-1)+1}) \quad (1\le j\le n)\ (i=2,\cdots p). \quad (2.16a)$$

$$\beta_{i0}=\begin{cases}2/(m(1)+1) & (i=1)\\ \frac{m(i-1)+m(i)+2}{(m(i-1)+1)(m(i)+1)} & (i=2,\cdots p-1)\\ 2/(m(p)+1) & (i=p)\end{cases}\qquad \beta_{ij}=\begin{cases}\frac{2(1+t_j^{m(1)+1})}{1+t_j^{m(1)+1}}\sqrt{\sigma_j+\sigma_j^2/4} & (i=1)\\ \left(\frac{1+t_j^{m(i-1)+1}}{1-t_j^{m(i-1)+1}}+\frac{1+t_j^{m(i)+1}}{1+t_j^{m(i)+1}}\right)\sqrt{\sigma_j+\sigma_j^2/4} & (i=2,\cdots p-1)\\ \frac{2(1+t_j^{m(p-1)+1})}{1-t_j^{m(p-1)+1}}\sqrt{\sigma_j+\sigma_j^2/4} & (i=p)\end{cases} \quad (1\le j\le n) \quad (2.16b)$$

$$\gamma_{ij}=\alpha_{i(n-j)}\quad (i=1,\cdots p+1;\ j=0,1,\cdots,n) \quad (2.16c)$$

证明：令n+1=T 则 $L_{\Gamma_i}=M_{m(i)}$，$L_{\Gamma_i}=M_i$。

于是由(2.7b)、(2.11)及引理1，得知

当 2≤i≤p-1 时，

$$B_i=T-[0\cdots0-I]M_{m(i+1)}^{-1}\begin{bmatrix}0\\0\\-I\end{bmatrix}-[-I\,0\cdots0]M_{m(i)}^{-1}\begin{bmatrix}-I\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$=T-S_{m(i+1)}^{-1}(T)S_{m(i+1)+1}(T)-S_{m(i)}^{-1}(T)S_{m(i)+1}(T)$$

$$=S_{m(i+1)}^{-1}(T)S_{m(i+1)+m(i)+1}(T)S_{m(i)}^{-1}(T)$$

当 i=1 时，

$$B_1=T-2[-I\,0\cdots0]M_{m(1)}^{-1}\begin{bmatrix}-I\\0\\0\end{bmatrix}=T-2S_{m(1)}^{-1}(T)S_{m(1)+1}(T)$$

$$=S_{m(1)}^{-1}(T)S_{2m(1)+1}(T)S_{m(1)}^{-1}(T)$$

当 i=p 时，

$$B_p=T-2[0\cdots0-I]M_{m(p+1)}^{-1}\begin{bmatrix}0\\0\\-I\end{bmatrix}$$

$$=T-2S_{m(p+1)}^{-1}(T)S_{m(p+1)+1}(T)$$

$$=S_{m(p+1)}^{-1}(T)S_{2m(p+1)+1}(T)S_{m(p+1)}^{-1}(T),$$

$$A_i=-S_{m(i+1)}^{-1}(T)\quad (i=2,\cdots p),$$

$$C_i=-S_{m(i-1)}^{-1}(T)\quad (i=1,\cdots p-1),$$

由此可知，所有Ai、Bi和Ci都具有与T相同的特征向量，且它们的特征值都是T的特征值之有理函数。由(14)知，T的特征值为

$$\lambda_j=2(1+2\rho^2\sin^2 j\pi/2n),\quad j=0,\cdots,n.$$

相应的特征向量Wj由(214)给出。不难得到矩阵Ai、Bi和Ci的特征值分别为

$$\alpha_{ij}=1/S_{m(i-1)}(\lambda_j)\quad (i=2,\cdots p);\quad \gamma_{ij}=1/S_{m(i)}(\lambda_j)=\alpha_{(i+1)j}\quad (i=1,\cdots p-1);$$

$$\beta_{ij}=\begin{cases}S_{2m(1)+1}(\lambda_j)/S_{m(1)}^2(\lambda_j) & (i=1),\\ S_{m(i-1)+m(i)+1}(\lambda_j)/S_{m(i-1)}(\lambda_j)S_{m(i)}(\lambda_j) & (i=2,\cdots p-1),\\ S_{2m(p)+1}(\lambda_j)/S_{m(p-1)}^2(\lambda_j) & (i=p).\end{cases}$$

利用(2.9)、(2.10)和(2.13)对上述式子化简即得(216a)～(216c)。证毕

2.3 区域分裂快速直接法

根据定理1，我们可将方程组(2.3)变换成

$$\begin{bmatrix}\Lambda_1 & 2E_1 & & \\ D_2 & \Lambda_2 & E_2 & \\ & \ddots & \ddots & E_{p-1}\\ & & 2D_p & \Lambda_p\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\widetilde{u}_{\Gamma_1}\\ \widetilde{u}_{\Gamma_2}\\ \vdots\\ \widetilde{u}_{\Gamma_p}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\widetilde{b}_{\Gamma_1}\\ \widetilde{b}_{\Gamma_2}\\ \vdots\\ \widetilde{b}_{\Gamma_p}\end{bmatrix} \quad (2.17)$$

这里

$$u_{\Gamma_i}=W\widetilde{u}_{\Gamma_i}\quad (i=1,\cdots,p) \quad (2.18)$$

$$\widetilde{b}_{\Gamma_i}=W^{-1}b_{\Gamma_i}\quad (i=1,\cdots,p) \quad (2.19)$$

(217)可分离成如下(n+1)个独立的三对角方程组

$$\begin{bmatrix}\beta_{1j} & 2\gamma_{1j} & & \\ \alpha_{2j} & \beta_{2j} & \gamma_{2j} & \\ & \ddots & \ddots & \gamma_{p-1,j}\\ & & 2\alpha_{pj} & \beta_{pj}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\widetilde{u}_{1j}\\ \widetilde{u}_{2j}\\ \vdots\\ \widetilde{u}_{pj}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\widetilde{b}_{1j}\\ \widetilde{b}_{2j}\\ \vdots\\ \widetilde{b}_{pj}\end{bmatrix}\quad (j=0,1,\cdots n) \quad (2.20)$$

其中

$$\widetilde{u}_{\Gamma_i}=(\widetilde{u}_{i0}\ \widetilde{u}_{i1}\cdots\widetilde{u}_{in})^T,\quad \widetilde{b}_{\Gamma_i}=(\widetilde{b}_{i0}\ \widetilde{b}_{i1}\cdots\widetilde{b}_{in})^T\quad (i=1,\cdots p)$$

到此，我们不必求出容量矩阵C，而只须通过(220)的求解并利用(219)和(218)作两次FPT即可求出界面上的解upi (i=1,...,p)。

综上所述，我们将并行求解矩形区域上 Poisson 方程 Dirichlet 初值问题的区域分裂快速直接法描述如下。

算法DDFPS

步1：按(26)求右端项b，即

$$\text{①求解}\quad L_{\Omega_i}v_{\Omega_i}=F_{\Omega_i}\quad (i=1,2,\cdots p+1)$$

$$\text{②计算}\quad b_{\Gamma_i}=\begin{cases}F_{\Gamma_1}-2R_1^Tv_{\Omega_1} & (i=1),\\ F_{\Gamma_i}-R_i^Tv_{\Omega_{i-1}}-R_i^Tv_{\Omega_i} & (i=2,\cdots p-1),\\ F_{\Gamma_p}-2R_{p+1}^Tv_{\Omega_{p+1}} & (i=p).\end{cases} \quad (2.21)$$

步2: 由（2.19）利用FFT求$\tilde{b}_{pi}$ (i=1,...,p)；

步3: 对 j=0,1,...,n求解三对角方程组（2.20）；

步4: 由（2.18）利用FFT求u_{pi} (i=1,2,...,p)；

步5: 对 i=1,2,...,p-1 求解子问题（2.8）.

3. 算法分析

方程组（2.21）和（2.8）都是块三对角方程组，由系数矩阵的结构可知，Fourier 分析法或循环约简法都可顺利进行下去（参看[11]），因此算法DDFPS成立的关键是方程组（2.20）的顺利求解. 循环约简法是求解（2.20）的一种行之有效的好的算法，但它的成立需有一定的条件. 本节即考察求解（2.20）的循环约简法的可行性.

首先，我们有

定理2 当j=0 时，

$$|\beta_{1j}|=2|\gamma_{1j}|,\quad |\beta_{Pj}|=2|\alpha_{Pj}|. \tag{3.1}$$

$$|\beta_{ij}|=|\alpha_{ij}|+|\gamma_{ij}| \quad (i=2,\cdots,P-1). \tag{3.2}$$

当 j=1,2,...,n 时

$$2|\gamma_{1j}|<|\beta_{1j}|,\quad 2|\alpha_{Pj}|<|\beta_{Pj}|. \tag{3.3}$$

$$|\alpha_{ij}|+|\gamma_{ij}|<|\beta_{ij}| \quad (i=2,\cdots,P-1). \tag{3.4}$$

证明: 由（2.16a）～（2.16c）易知，当 j=0 时（3.2）显然成立

当 $1\leqslant j\leqslant n$ 时，有

$$2|\gamma_{1j}|/|\beta_{1j}|=\frac{2t_j^{(m(1)+1)/2}}{1+t_j^{m(1)+1}}$$

又 $t_j=\left(1+\sigma_j/2-\sqrt{\sigma_j+\sigma_j^2/4}\right)^2<1$ 于是 $1+t_j^{m(1)+1}>2t_j^{(m(1)+1)/2}$

故 $2|\gamma_{1j}|<|\beta_{1j}|$. 同理 $2|\alpha_{Pj}|<|\beta_{Pj}|$.

当 $1\leqslant j\leqslant n$, $2\leqslant i\leqslant P-1$ 时，有

$$\frac{|\alpha_{ij}|+|\gamma_{ij}|}{|\beta_{ij}|}=\frac{t_j^{(m(i-1)+1)/2}+t_j^{(m(i)+1)/2}}{1+t_j^{(m(i-1)+m(i)+2)/2}}$$

同样由 $t_j<1$ 知（3.4）成立. 证毕.

据定理2，当 $1\leqslant j\leqslant n$ 时，方程组（2.20）的系数矩阵严格对角占优，故循环约简法有定义. 但当 j=0 时，（2.20）即

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{m(1)+1} & \frac{-2}{m(1)+1} & & & \\ \frac{-1}{m(1)+1} & \frac{m(1)+m(2)+2}{(m(1)+1)(m(2)+1)} & \frac{-1}{m(2)+1} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \frac{-2}{m(p-1)+1} & \frac{2}{m(p-1)+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{u}_{10} \\ \tilde{u}_{20} \\ \vdots \\ \tilde{u}_{p0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{b}_{10} \\ \tilde{b}_{20} \\ \vdots \\ \tilde{b}_{p0} \end{bmatrix} \tag{3.6}$$

这是一个奇异线性方程组，下面重点讨论（3.6）的可解性及解法.

引理2 设问题（2.1）中的 f、g 皆为连续函数，则（2.1）有解的必要条件为

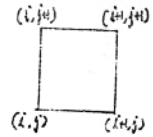
$$\iint_\Delta f\,dxdy+\int_{\partial\Omega} g\,ds=0 \tag{3.7}$$

证明: 利用 Green 第二公式即得.

◇ $f_I=f_{00}+f_{0O}+f_{OM}+f_{OO}$, $f_{II}=\sum_{i=1}^{I}(f_{i0}+f_{iM})$, $f_{III}=\sum_{j=1}^{M}(f_{0j}+f_{Oj})$,

$g_I=g_{00}+g_{0O}+g_{OM}+g_{OO}$, $g_{II}=\sum_{i=1}^{I}(g_{i0}+g_{iM})$, $g_{III}=\sum_{j=1}^{M}(g_{0j}+g_{Oj})$,

其中 $f_{ij}=f(ihx,jhy)$, $g_{ij}=g(ihx,jhy)$.



利用第2节所作的网格剖分，对（3.7）的左端进行数值积分，其法为

$$\iint_\Delta f\,dxdy=\sum_{ij}\iint_{(\square)_{ij}} f\,dx\,dy$$

其中$(\square)_{ij}$表示右图所示的小矩形，于是

$$\iint_{(\square)_{ij}} f\,dxdy\approx\frac{hxhy}{4}\left(f_{ij}+f_{i+1,j}+f_{i,j+1}+f_{i+1,j+1}\right).$$

同时对 $\int_{\partial\Omega} g\,ds$ 沿边界 $\partial\Omega$ 利用复化梯形公式，由此可得

引理3 $hxhy(f_0+2f_I+2f_{II}+4\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{M}f_{ij})/4+hx(g_I+2g_{II})/2+hy(g_{II}+g_{III})/2=0$ (3.8)

定理3 $(\tilde{b}_{10}+\tilde{b}_{P0})/2+\sum_{i=2}^{P-1}\tilde{b}_{i0}=0$ (3.9)

证明. 置 $F_{i,j}=\begin{bmatrix} F_{i1} \\ \vdots \\ F_{i,m(i)} \end{bmatrix}$，其中$F_{ij}$表示子区域$\Omega_{ij}$上函数方程组中第j条水平线段上的右端向量.

为简洁起见，记 $S_i=S_i(1)$，由(2.6)及引理1，得

$$b_{i0}=\begin{cases} F_{I1}+2S_{m(1)}^{-1}\sum_{j=1}^{m(1)}S_{m(1)-j}F_{1j} & (i=1), \\ F_{Ii}+S_{m(i)}^{-1}\sum_{j=1}^{m(i-1)}S_{j-1}F_{i-1,j}+S_{m(i)}^{-1}\sum_{j=1}^{m(i)}S_{m(i)-j}F_{ij} & (i=2,\cdots,P-1), \\ F_{IP}+2S_{m(P-1)}^{-1}\sum_{j=1}^{m(P-1)}S_{j-1}F_{P-1,j} & (i=P). \end{cases}$$

对上述各式两端同时左乘W^{-1}，并取出两端的第一个分量，我们有

$$\tilde{b}_{i0}=\begin{cases} Q_0^TF_{I1}+\frac{2}{m(1)+1}\sum_{j=1}^{m(1)}(m(1)-j+1)Q_0^TF_{1j} & (i=1), \\ Q_0^TF_{Ii}+\frac{1}{m(i-1)+1}\sum_{j=1}^{m(i-1)}jQ_0^TF_{i-1,j}+\frac{1}{m(i)+1}\sum_{j=1}^{m(i)}(m(i)-j+1)Q_0^TF_{ij} & (i=2,\cdots,P-1), \\ Q_0^TF_{IP}+\frac{2}{m(P-1)+1}\sum_{j=1}^{m(P-1)}jQ_0^TF_{P-1,j} & (i=P), \end{cases}$$

这里，Q_0为W^{-1}的第一个行向量.

因此 $\frac{1}{2}(\tilde{b}_{10}+\tilde{b}_{P0})+\sum_{i=2}^{P-1}\tilde{b}_{i0}=\frac{1}{2}(Q_0^TF_{I1}+Q_0^TF_{IP})+\sum_{i=2}^{P-1}(Q_0^TF_{Ii})+\sum_{i=1}^{P-1}\sum_{j=1}^{m(i)}Q_0^TF_{ij}$.

按第2节对问题（2.1）所作的离散规则，我们有

上式右端$=\frac{2\rho}{\pi}\left\{\frac{hxhy}{4}\left(f_I+2f_{II}+2f_{III}+4\sum_{i=1}^{I-1}\sum_{j=1}^{M-1}f_{ij}\right)+\frac{hx}{2}(g_I+2g_{II})+\frac{hy}{2}(g_{II}+g_{III})\right\}$

由引理3知（3.9）成立. 证毕.

根据定理3，我们有理由认为方程组（3.6）中的任一方程都可由其它方程的线性组合而得，又（3.6）的系数矩阵的秩为 p-1，因此可令 up 为某个常数，并求出其余的解（此时，奇偶约简法成立），这样就得到（3.6）的一个特解。另一方面，我们知道问题（2.1）在满足条件（3.7）时解不唯一，但所有解都只相差一个任意常数。利用定理3易证，离散方程组（2.2）的解也不唯一，事实上其解可表示为 $\begin{bmatrix}u_{a2}\\ \vdots\\ u_{ar}\end{bmatrix}+Kc$ 其中 $a=(1,1,\ldots,1)^T$，c 为任意常数），这恰好与理续情形的结论吻合，因此我们只须求出（2.2）的一个特解，这也是只须求出（3.6）的一个特解的理由。

4. 超立方执行及复杂性

本节考察第2节给出的区域分裂快速直接法DDFPS以及基于 Fourier 分析的矩阵分解法 MD 在超立方机上的执行，并分析它们的复杂性，从而揭出比较结论。

记 k 维超立方机所包含的处理机台数为 P，即 P=2，矩形区域Ω被均匀分裂成 P 个矩形子区域，即 $\Omega(i)=\Omega_i$ (i=1,2,...,P)，依次将子区域Ωi和界面Γi (i=1,...,P-1) 与 k 位二元反射 Gray 码 Gk=(G1,...,G2^k)的前 P-1 个相对应，Ωp、Γp、Ωp+1 与第 p 个相对应，从而将相应的离散问题映射到各处理机中。设一次算术运算的时间为τ，相邻处理机之间传送长为 l 的向量所需时间为 α + lβ （参看〔10〕〔13〕）。

假定输入到编号为 gi 的处理机 pi (i=1,...,P) 中的数据还包括W，W^4，aij，bij，Yij (j=0,1,...,n)。因算法DDFPT和算法MD都需要首先计算相同个数的右端项，故在以下讨论中均不计这些求值时间。

I. DDFPS 按算术运算和通讯费用的多少和算法执行的顺序，对于算法DDFPS的步1，处理机Pi需作

1. 求解一个m阶块三对角方程组（2.2.1）。
2. 传送长为(n+1)的向量给 Pi+1。
3. 2(n+1)次算术运算。（第 p 台处理机需4(n+1)次运算）

由于求解（2.2.1）可采用矩阵分解法，即首先将（2.2.1）通过m次长为 (n+1)的实FFT变成m个m阶三对角方程组，这些方程组解出后再通过m次长为(n+1)的实FFT即可求得（2.2.1）的解，但由于bpi的计算只需用到（2.2.1）的部分解，因此后来的FFT实际上只需作两次，由上述讨论得步1的运行时间为

$$T_1=(m(n+1)\log_2(n+1)+5m(n+1)+2(n+1)\log_2(n+1)+2(n+1))\tau+\alpha+(n+1)\beta$$

易知，步2和步4的时间都是 $2(n+1)\log_2(n+1)\tau$。

设在超立方机上用奇偶消元法（参看〔12〕）求解一个 P 阶三对角方程组的时间为Toee(p)（其中包括通讯时间，具体表达式可参看〔12〕），则T3=(n+1)Toee(P)+8τ。实际上，当执行完步2后，对每个 j，前 p-1台处理各包含方程组（2.2.0）中的一个方程，而第 p 台处理机包含（2.2.0）中 的第 p 和第 p+1 个方程，用第 p+1 方程对前个方程消元后，可形成 P阶三对角方程组，每台处理机各包含一个方程，求出解后作一次迭代即可求得 up+1,j，执行步5时，，首先需在处理机Pi-1和Pi之间传送一个长为 (n+1) 的向量，接下来Pi的工作为

1. 作 2(n+1) 次算术运算；
2. 解一个m阶块三对角方程组。

因此 T5=T1

综上所述，算法DDFPS在超立方机上的运行时间为

$$T_{DDFPS}=\sum_{i=1}^{5}T_i=(2m(n+1)\log_2(n+1)+10m(n+1)+8(n+1)\log_2(n+1)+2n+10)\tau+(n+1)T_{OEE}(P)+2(\alpha+(n+1)\beta). \quad (4.1)$$

II. MD

仍按按照第2节开头所讲的网格剖分，同样采用5点差分格式逼近（2.1），但网格节点按通常顺序，即从下到上，从左到右）排列，则离散后的方程组为

$$\begin{bmatrix}T-2I & & & & \\ -I & T & -I & & \\ & \ddots & & & \\ & & -I & T & -I \\ & & & -2I & T\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_0\\ u_1\\ \vdots\\ u_{M-1}\\ u_M\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}F_0\\ F_1\\ \vdots\\ F_{M-1}\\ F_M\end{bmatrix} \quad (4.2)$$

这里 $M=\sum_{i=0}^{P}m+(P+1)=(m+1)P+1$，我们将网格节点分成 P 组，第一组包含最初 m+2 条水平网格线段上的点，以下的 P-1 组各依次包含 (n+1) 条水平网格线段上的节点，将这 p 个组依次与 k 位二元反射 Gray 码相对应，从而使对应于这些网点的方程配置在各相应的处理机中。

按运算工作及算法执行的顺序，我们将熟知的求解（4.2）的矩阵分解法归结为

1. 每台处理机各作 (n+1)个长为 n+1 的实FFT.（其中处理机P1须作 (m+2)个）；
2. 整个超立方机求解 (n+1)个 (M+1)阶三对角方程组；
3. 每台处理机各作 (n+1)个长为 (n+1) 的实FFT（处理机P1作(m+2)个）。

因此步1和步3的时间皆为(m+2)(n+1)$\log_2$(n+1)τ.

对于步2，考察一个(M+1)阶三对角方程组的求解，由于第一台处理机包含最初的 (m+2) 个方程，其余的各包含 (n+1) 个方程，因此我们可利用在讨论DDFPS时所采用的方法，使P1中的方程个数降为 (n+1) 个，接着利用文[12]中提述的算法CF-OEE（或参看文〔11〕）求解这个 M 阶三对角方程组，它分为分段 Gauss 消元，用奇偶消元法解 P 阶三对角方程组和回代求解三大步，时间为

$$(17m+2)\tau+T_{OEE}(P)+2\alpha+5\beta,$$

故步2的执行时间为

$$(n+1)\left[(17m+2)\tau+8\tau+T_{OEE}(P)+2\alpha+5\beta\right].$$

综上所述，超立方机上求解（4.2）的矩阵分解法的运行时间为

$$T_{MD}=\{2m(n+1)\log_2(n+1)+17m(n+1)+4(n+1)\log_2(n+1)+10(n+1))\tau+(n+1)T_{OEE}(P)+(n+1)(2\alpha+5\beta). \quad (4.3)$$

比较（4.1）和（4.3），不难发现，DDFPS与MD的算术运算时间虽稍逊一筹（前者较少），但前者的通讯时间比后者少 2nα+3(n+1)β.

5. 结束语

我们在引言中已经指出，在超立方机（或多处理机）系统上，尽可能地降低通讯费用是设计并行算法时应予考虑的重要方面，当然算术运算时间也要尽可能 少。本文给出的区域分裂快解法与原有的快速直接法相比，其算术运算量没有增加，但通讯时间明显减少，因此是一种有效的超立方算法。

本文第二节给出的分析容量矩阵特征值和特征向量的方法同样适用于Poisson方程的其它的边值问题，并且可以获得相应的区域分裂快速解法，具体结论将另文叙述。

参考文献

(1) R.Bank and D.Rose, Marching algorithms for elliptic boundary value Problems I : The constant coefficient case, SIAM J. Numer. Anal.,Vol.14, No.5(1977), 792-828.

(2) T.F.Chan, Analysis of Preconditioners for domain decomPosition,SIAM J. Numer. Anal.,Vol.24, No.2(1987), 514-526.

(3) T.F.Chan and D.C.Resasco, A domain-decomPosed fast Poisson solver,SIAM J.Sci.Stat.ComPut., Vol.6, No.1(1987), 514-526.

(4) M.Dryja, A caPacitance matrix method for Dirichlet Problem on Polygonal region, Numer.Math., 39(1982), 51-64.

(5) L.Fox and I.B.Parker, Chebyshev Polynomials in numerical analysis, Oxford Univ. Press, London,1968.

(6) D.Heller, Some aspects of the cyclic reduction algorithm for block tridiagonal linear system, SIAM J.Numer. Anal., Vol.13, No.1(1976) 484-496.

[7] 黄光远，关于椭圆型方程Neumann问题的数值解法，应用数学与计算数学，第1卷，第2期，PP121-130(1964).

[8] S.L.Johnsson, Solving tridiagonal systems on ensemble architectures, SIAM J.Sci.Stat.Comput., Vol.8, No.3(1987),354-392.

[9] D.E.Keyes and W.D.Gropp, A comparison of domain decomposition techniques for elliptic partial differential equations and their implementation,SIAM J.Sci.Stat.Comput.,8(1987), S166-S202.

[10] 陆金甫，超立方机上一般递推问题的并行求解，数值计算与计算机应用.

[11] 陆金甫，奇偶约简法成立的充分条件，计算数学.

[12] Lu Yijun, Hypercube algorithms for solving tridiagonal linear system of equations, J.Comput.Math.

[13] C.McBryan and E.Van.DeVelde, Hypercube algorithms and implementations, SIAM J.Sci.Stat.Comput., 2(1987), 227-287.

[14] P.N.Swarztraube, The methods of cyclic reduction, Fourier analysis and the FACR algorithm for the discrete solution of Poisson's equation on a rectangle, SIAM Review, Vol.19, No.3(1977), 490-501.

A DOMAIN-DECOMPOSED FAST ALGORITHM FOR SOLVING POISSON'S EQUATION WITH NEUMANN BOUNDARY CONDITION

Lu Yi.Jun Wang Nen.Chao
(Huazhong Univ. of Sci. and Tech.)

ABSTRACT-- In this paper, a domain-decomposed fast direct algorithm for solving Poisson's equation with Neumann boundary condition on a rectangle is proposed. Based on the Chebyshev polynomial representation of inverting block tridiagonal matrix, the eigenvalues and eigenvectors of the capacitance matrix can be obtained. thus the solution of the capacitance equations are computed by FFT and the solution of tridiagonal linear equations, without computing or inverting the capacitance matrix. The solution of Poisson's equations with Dirichlet boundary condition on subdomains can be computed independently. Theoretical analysis of the feasibility of the algorithm is given. The implementing scheme of the algorithm on hypercube multiprocessor is discussed and its complexity conclusion is obtained. Finally, the comparison between the algorithm and the matrix decomposition method based on Fourier analysis verifies that the domain decomposed fast direct algorithm is an efficient hypercube algorithm.

双曲型守恒律的区域分裂算法

王 忠 德
（南京航空学院数理力学系）

摘 要

本文通过修改 Muscl 型格式，提出了一类解双曲型守恒律方程的区域分裂算法，并应用到解气体动力学方程。这一类算法是一致二阶精度ＥＮＯ的，当捕捉间断解时具有高分辨率，并且易于实现。

§1．引言　本文主要研究如下双曲型守恒律的初值问题（ＩＶＰ）的数值解：

(1.1)　$U_t + f(u)_x = 0$ ，　$U(x,0) = U_0(x)$ ，$x \in \mathbb{R}$，

$t \geq 0$ 这里 $U \in R^m$，f：$\mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ 。$U_0(x)$ 是周期的或具有紧支集的逐段光滑函数。

区域分裂法已在用并行计算机解流体力学、天气预报和结构分析中的偏微分方程中起着越来越重要的作用。近几年来，大多数研究工作主要是应用区域分裂法解椭圆型偏微分方程，而很少涉及双曲型问题，特别是非线性双曲型问题。

本文的主要工作是提出了一类解ＩＶＰ（1.1）的带重叠和不带重叠混合的区域分裂算法，这类方法是一致二阶精度ＥＮＯ的，并能正确分辨接触间断解。全文工作安排如下：第二节，提出一类解ＩＶＰ（1.1）的区域分裂法，第三节，应用这类算法解气体动力学中的 Euler 方程。

§2．一类新的区域分裂算法

让 $\{I_j \times [t_n, t_{n+1}]\}$，这里 $I_j = [X_{j-1/2}, X_{j+1/2}]$，$X_\alpha = \alpha h$，$t_\kappa = k\tau$，是 $R \times R^+$ 的一个剖分，V_j^n 为ＩＶＰ（1.1）的数值逼近。

A. Harten 在文［2］中，考虑了一类逼近 Godunov 型格式

(2.1a)　$V_j^{n+1} = A(I_j)\, E(\tau)\, L(\cdot; V^n)$

(2.1b)　$L(x; \bar{w}) = \bar{w}_j + s_j (x - x_j)$ ，　$x \in I_j$

的 Muscl 型格式：

(2.2a)　$V_j^{n+1} = V_j^n - \lambda (\hat{f}_{j+1/2} - \hat{f}_{j-1/2})$

(2.2b)　$\hat{f}_{j+1/2} = f^R(v_{j+1/2}, v_{j+1/2})$

其中

(2.2c)　$V_{j+1/2}^L = V_j^n + h(1 - \lambda a_j^n) s_j^n / 2$

$V_{j+1/2}^R = V_{j+1}^n - h(1 + \lambda a_{j+1}^n) s_{j+1}^n / 2$

S_j 满足：

(2.2d)　$S_j = W_x(X_j) + o(h^2)$

这类格式是一致二阶精度ＥＮＯ的，但不能正确分辨接触间断解，为此，A. Harten［2］修改逐段线性重新构造（2.16）如下：

记

(2.3a)　$\sigma_j = |d/dx\, L(x_j; \bar{w})|$

$F_j(z) = 1/h\left\{\int_{x_{j-1/2}}^{z} L_{j-1}(x; \bar{w})dx + \int_{z}^{x_{j+1/2}} L_{j+1}(x; \bar{w})dx\right\} - \bar{w}_j$

如果

(2.3b)　$F_j(x_{j-1/2}) \cdot F(x_{j+1/2}) \leq 0$

和

$\sigma_j > \sigma_{j-1}$ ，$\sigma_j \geq \sigma_{j+1}$

则定义

(2.3c)　$\hat{L}_j(x; \bar{w}) = \begin{cases} L_{j-1}(x; \bar{w}), & x_{j-1/2} < x < \theta_j \\ L_{j+1}(x; \bar{w}), & \theta_j < x < x_{j+1/2} \end{cases}$

（θ_j 为 $F(z)=0$ 在 I_j 中的一个根）

否则

(2.3d)　$\hat{L}_j(x; \bar{w}) = L_j(x; \bar{w})$

*本文属航空、航天部科学基金资助课题。

并修正数值通量（2．2b）如下：

（2．4）　$\hat{f}_{j+1/2} = \hat{f}^{ENO}_{j+1/2} + \hat{g}_{j+1/2}$

修正后的这类一致二阶精度ENO格式，能正确分辩接触间断，具有子分辩率。

我们利用（2．3）直接对 $\hat{f}^{ENO}_{j+1/2}$ 略作修改，而不加校正项 $\hat{g}_{j+1/2}$ 这一修改方法比A．Harten的修改方法简洁的多。结合这一修改，我们提出解IVP（1．1）的区域分裂算法如下：

设已给定了 V^n_j，V^{n+1}_j 由如下方法计算：

（1）　在每一时间 $t_n = n\tau$，我们考虑实线 R^+ 上的一个区域分裂（不带重叠）$\{I^n_{j,K}\}_{j,K\in N}$，$I^n_{j,K}=[x^n_{j,K}, x^n_{j,K+1}]$，$I^n_{j,K}$ 的端点确定如下：若在 I_j 中，$\sigma_j>\sigma_{j-1}$，$\sigma_j \geq \sigma_{j+1}$ 和 $F_j(x_{j+1/2})-F_j(x_{j-1/2}) \leq 0$　，则令 $x^n_{j,K} = \theta_j$（θ_j 为 $F_j(x)=0$ 在 I_j 中的一个根）。

（2）　在每一子区域 $I^n_{j,K}$ 上，我们利用（2．2），并应用带重叠的区域分裂法进行计算，其中 $V^n_{K+1/2}$，$V^n_{K-1/2}$ 分别修改如下：

（2．5）　$V^n_{K+1/2} = V^n_{K+1} + h\,(\sigma_{K+1/2}\Delta_0 V_K - \lambda a^n_{K+1})\,S^n_{K+1}/2$

（2．6）　$V^n_{K-1/2} = V^n_{K-1} - h\,(\sigma_{K-1/2}\Delta_0 V_K + \lambda a^n_{K-1})\,S^n_{K-1}/2$

其余不变。

（3）　$I^n_{j,K}$ 和 R^+ 上的整体解按如下方法构成：

设 I_1，I_2 是区间I的一个剖分，V_1，V_2 和V分别为 I_1，I_2 和I上的解，若 I_1，I_2 不带重叠，则 $V = V_j$，$X \in I_j$（$j=1,2$）　若 I_1，I_2 带重叠，则 $V = \begin{cases} V_1, & x \in I_1 - I_1 \cap I_2 \\ V_2, & x \in I_1 \cap I_2 \end{cases}$

§3．　在解气体动力学方程中的应用

考虑气体动力学中的Euler方程

（3．1a）　$U_t + f(u)_x = 0$

（3．1b）　$U = (f, m, E)^T$

（3．1c）　$f(u) = qu + (0, p, qp)^T$

（3．1d）　$P = (\gamma - 1)(E - 1/2\, p q^2)$

这里p，q，p和E分别是密度，速度压力和总能，$m = pq$ 是质量，我们取 $\gamma = 1.4$

设（2．1）的特征值为 $\{a^K_{j+1/2}\}_{K=1}^3$ 相应的左，右特征向量分别为 $\{l^K_{j+1/2}\}_{K=1}^3$，$\{R^K_{j+1/2}\}_{K=1}^3$；

记 $\alpha^K_{j+1/2}$ 为 $\Delta_0 V_{j+1/2} = V_{j+1} - V_j$ 关于右特征向量系 $\{R^K_{j+1/2}\}$ 的第K个分量。

我们给出§2中用到的几个关键公式如下：

（1）　选取（2．2b）中的 $h^R(V_j, V_{j+1})$ 为

（3．2）　$h^R(v_j, v_{j+1}) = 1/2\,[f(v_j) + f(v_{j+1}) - \sum_{K=1}^{3} |a^K_{j+1/2}| \alpha^K_{j+1/2} R^K_{j+1/2}]$

（2）　选取满足（2．2d）中S；如下

（3．3a）　$s^K_j = (s^1_{j+1/2}, s^2_j, s^3_j)^T$

（3．3b）　$s^K_j = m(s^K_j, s^K_{j-1})$

（3．3c）　$s^K_{j+1} = 1/h\,(a^K_{j+1/2} - 1/2\, D^K_{j+1/2} w)$

（3．3d）　$s^K_{j+1} = 1/h\,(a^K_{j+1/2} + 1/2\, D^K_{j+1/2} w)$

（3．3e）　$D^K_{j+1/2} w = m(a^K_{j+1/2} - a^K_{j-1/2}, a^K_{j+3/2} - a^K_{j+1/2})$

$$m(x,y) = \begin{cases} sign(x)\min(|x|,|y|), & sgn(x) = sgn(y) = s \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

（3）　$F_j(x)$，σ_j；定义如下

（3．4a）　$F_j(x) = 1/h\,l_1(v^n_j)\{\int_{x_{j+1/2}}^{x} L_{j+1}(x; v^n)\,dx + \int_{x}^{x_{j+1/2}} L_j(x; v^n)\,dx - h v^n_j\}$

（3．4b）　$F_j(x_{j-1/2}) = l_2(v^n_j)(v^n_{j+1} - v^n_j - h s_{j+1})$

$F_j(x_{j+1/2}) = l_2(v^n_j)(v^n_{j-1} - v^n_j + h s_{j-1})$

（3．5）　$\sigma_j = |l_2(v^n_j) \cdot s_j|$

参考文献

[1] Juan Camilo Meza and W.W. Symes, "Domain Decomposition Algorithms for liner Hyperbolic Equations" Techical Repert 87-20, August 28, 1987. Rice Vniversity.

[2] A.Harten, "ENO Scheme With subcell Resdution." ICASE Report No.87-56

Domain Delomposition Method for Hyperbolic Conservation Laws

Wang Zhongde
(Dept. of Math. and Mechanics
Nanjing Aeronantical Institute)

ABSTRACT

In this paper, we propose a class of Domain Decomposition Method for sowing hyperbolic Conservation laws by madifying MUSCL-type schemes, and apply them to solve the equations of Gas dynamics. This methods are uniformaly second-order accurate ENO. When Capturing the Contact discontinuities, they achive subcell resolution and are easy to make into practice.