成人高等院校试用教材

现代管理数学教程

（下 册）

乡镇企业管理系
数学教研室编著

北京农业管理干部学院

现代管理数学教程（下册）目录

第三篇　概　率　论

概率论主要是研究现实世界中随机现象的规律性，它理论严谨应用广泛，是发展迅速的一个管现数学分支。目前，概率论的理论与方法已被广泛地应用于现代工业管理、农业管理、科研管理、交通管理、医院管理和军事科学等领域之中，内容及其丰富。

第一章　随机事件与概率概念

§1　随机事件的概念

一、必然现象与必然事件

现实世界里，有许多现象，我们究全可以予先知道它们在一定的条件下必然会出现。例如"没有水，种籽不能发芽"；"在标准大气压下，水加热到100℃时，必然会沸腾"等等是一定会出现的。这种在一定条件下，必然出现的现象。称为必然事件。发之在一定条件下，必然不出现的现象，称为不可能事件。例如"没有水分，种籽发芽"。"在标准大气压下，水加热到100℃时，不会沸腾"等等是必然不会出现的。如果在一定的条件下，某个现象是必然事件。那末在同样的条件下，那个现象的反面就必然是不可能事件。

二、随机现象与随机事件

现实世界里，还有许多现象，它们在一定的条件下，可能出现也可能不出现。这种随机现象称为随机事件，简称事件。例如"人们走进百货商店，购买东西"，"检查3件商品的质量。出现一件次品"，"明年北京地区夏季雨量在700～800毫米之间"

等等都是相应条件下的随机事件。随机事件的特点是：在这事前出现以前，我们无法确切地判断它会出现还是不会出现。

例1、观察人们走进百货商店，他究竟购买东西，还是未购买东西，我们不能事先作出肯定的回答，他可能购买，也可能不购买所以说。"人们走进百货商店，购买东西是是随机事件。

例2、观测某县每年第二代三化 蛾高峰日，可能是5月26日，也可能是5月28日或其他日子，在高峰日未出现前不能肯定是那一日。所以说。"观察某县二代三化 蛾高峰日是5月26日这一天"也是一个随机事件。

以后用U表示必然事件，用V表示不可能事件，用大写拉丁字母A、B、C等表示随机事件。

三、随机试验与基本事件

我们对随机事件的观察，总是在一定的条件下进行的，把每次观察看作一个试验，而观察的结果就是试验的结果。对于某类事件在同一条件实现下多次进行试验必然得到同一的结果。例如。"在标准大气压下，水加热到100℃时，必然会沸腾"这种试验，不管谁来做它。只要是"在标准大气压下，把水加热到100℃"这同一条件实现了，都能得到到一的结果。"水必然沸腾"。可是象检查了商品的质量这类事能，它究竟会出现几件次品，在未验查以前，我们不能做出肯定的回答，这是因为它可能出现"1件商品""2件商品"，"3件商品"，"没有次品"等许多结果。一个试验，如果它的结果不一定相同，且可以在同一条件实现下重复进行这种试验称为随机试验，以后我们所说的试验都是指随机试验。

如果随机试验的结果有许多个，每一个可能出现的结果称为基本事件，记为W。基本事件的全体称为基本事件组，记为U＝(W)。

在具体问题中，要弄清基本事件组是由那些基本事件构成的。我们来举一些例子。

例3、检查3件商品的质量，出现了次品数看作一试验。用w_i表示出现i件次品。$i=0,1,2,3$。这里共有四个基本事件所以基本事件组$U=(w_0,w_1,w_2,w_3)$既基本事件组是由没有次品，1件次品，2件次品，3件次品所构成的。

例4、计算电话交换台在一小时内接到呼唤的次数看作一试验用w_i表示接到i次呼唤，$i=0,1,2,\cdots$。这里共有可数个基本事件，那末$U=w_0,w_1,w_2,\cdots$），即基本事件组是由0次呼唤，1次呼唤，2次呼唤，… 所构成的。

例5、测量某物体的长度同样看作一试验。用w_i表示第i次测量的结果。用a，b分别表示物体可能长度的上下限，那末$U=(a,b)$，即基本事件组是由实轴的某一区间所构成的。

基本事件是事件中最简单的一种，一般的事件总是由若干个基本事件共同构成的。譬如，在例3中，事件A：“出现奇数件次品”是由两个基本事件“出现1件次品”“出现3件次品”共同构成的故$A=(w_1,w_3)$。同样，对事件B：“出现至多有2件次品”是由三个基本事件“没有出现次品”“出现一件次品”“出现2件次品”共同构成的，故$B=(w_0,w_1,w_2)$。

这样，我们从一个随机试验出发，得到它的基本组$U=(w)$，这个随机实验可能出现的一切随机事件（包括基本事件和一般的事件），不是别的，无非是基本事件组$U=(w)$中，若干个基本事件共同构成的。

§2　概率的定义与统计规律性

一、统计规律性

随机现象在大量重复观测中呈现的规律性，叫做规计规律性，掌握了规计规律性便可让它为人类服务。例如某些病虫测报站的同志对第二代三化 蛾高峰日的多年观测，也发现了其迟或早与第一代蛾高峰日的迟早密切相关的规律。掌握了三化 高峰日的规律性便可作统计预报。

对于随机事件，我们知道它在条件具备时可能出现也可能不出现，仅仅知道这一点是不够的。这只是随机事件所具有的偶然性的一面，其实它也有规律性的一面，随机事件出现的规律，可以通过反复试验观察到。为了说明这一点，我们来看下面的例子。

例1，乡镇企业生产某种商品，一般是合格品，偶尔也可能是次品，故"生产的商品是合格品"是一随机事件。为了观察这个随机事件出现的规律。可将生产情况记录如下，这里每生产一件商品就相当进行一次试验。

表1—1

生产件数	5	10	60	150	600	900	1200	1800
合格品数	5	7	53	131	548	820	1091	1631
频　率	1	0.7	0.883	0.873	0.913	0.911	0.909	0.906

例2、为了观察棉花种籽发芽的情况，从一大批棉花种籽中抽取若干批种籽，分别做发芽试验。每批种籽的粒数逐步增大并把每批种籽发芽的情况记录如下。

表1～2

试验种籽数	2	5	10	100	200	500	1000	10000
发芽种籽数	1	2	6	49	103	262	517	5103
频　　率	0.5	0.4	0.6	0.49	0.515	0.524	0.517	0.5103

在观察某一随机事件时，设进行了 n 次试验，其中事件A出现了 m 次，则比值 $\frac{m}{n}$ 叫做 n 次试验中事件A出现的频率，记作 $w(A)$，即：$w(A)=\frac{m}{n}$ …（1—1）

从上面的两个试验记录中可以看到，在每次重复试验中，同一事件的频率有波动，带有偶然性，但在多次重复试验中，频率却经常稳定在一个固定的数值附近。从例4看，频率稳定在0.9；从例5看频率稳定在0.51。而且随着试验次数的增大，这种稳定在一个数值附近的趋势越来越显著，这是一个非常重要的事实，通常把这一事实说成频率具有稳定性。

二、概率的定义

频率的稳定性揭示出一个随机事件出现的可能性有一定的大小频率稳定在较大数值时，表明相应事件出现的可能性大。频率稳定在较小数值时，表明相应事件出现的可能性小。而频率所稳定的这个固定数值就是相应事件出现可能性大小的一个客观的定量的度量这个数值就称为相应事件的概率。我们写出概率的定义如下：

概率定义：设进行了 n 次试验，其中事件A出现了 m 次，如果随着试验次数 n 的增大，事件A出现的频率 $\frac{m}{n}$ 稳定在某个数值P那末我们定义事件A的概率为

$$P(A)=P \cdots\cdots(1—2)$$

在例1中，用A表示事件"生产的商品是合格品"，则 $P(A)=0.9$；在例2中，用B表示事件"棉花种籽能发芽"则 $P(B)=0.51$。

在有些实际问题中，当概率不易求出时，往往通过频率求出概率的近似值。

必然事件和不可能事件是随机事件的两个特例。必然事件的频率永远为 1 ，不可能事件的频率永远为 0 ，所以必然事件的概率等于 1 ，可不可事件的概率等于 0 ，即

$$P=(U)=1 \qquad P(V)=0$$

§ 3 概率的计算定则

一、等可能型问题

通过反复试验观察事件的频率，不仅能了解概率概念的实际含义，同时也可以作为求概率近似值的一个具体方法。然而，在特殊类型的问题中，并不需要进行反复试验。根据对试验的条件作具体分析，就可直接得出事件的概率。现在来讨论一类特殊的随机试验它的特征是：

1、试验结果的个数是有限的，即基本事件的全体 $U=\{w_1, w_2, \cdots, w_n\}$。

2、每一个基本事件出现的可能性相等。这时，就称所讨论的问题是等可能型。

例如，把一枚五分硬币随便掷在桌上，试验只能出现两个结果“正面向上”和“背面向上”，即共有两个基本事件。 于硬币是匀称的，这两个基本事件出现的可能性是相等的。如果真的进行很多次试验，必然大约有一半试验结果出现“正面向上”因而“正面向上”这一事件的频率稳定在 $\frac{1}{2}$ 附近，故它的概率为 $\frac{1}{2}$。这样，通过对问题进行具体分析，我们得到了与反复试验相同的结论。

二、概率计算定则

在等可能型的问题中，我们有下面概率的计算定则。

概率计算定则，如果总的基本事件个数为 n ，事件 A 由其中 m

个基本事件组成，那末事件A的概率，应用公式

$$P(A)=\frac{m}{n}\cdots(1-3)$$

直接计算，这种概率的直接计算方法，叫做概率的计算定则。它的特点是：计算事件A的概率P（A）的问题就化为计算事件A中包含的基本事件的个数m与总的基本事件的个数n之比值这一问题。

三、排列与组合

概率的计算定则的公式虽很简便，但在基本事件较多或问题比较复杂时，要算出m和n却不是一件容易的事。为此，我们将简单介绍计算m和n时，常用到的一些排列与组合的知识。

先看下面例子：

例1、某农场为了考察三个外地优良品种A，B，C，计划在甲、乙、丙、丁戊共五种类型的土地上分别进行引种试验，问共需安排多少个试验小区？

这里，共有A、B、C三个优良品种，而每个品种又都要在甲乙、丙、丁、戊这五种类型的土地上进行引种试验。所以共需要排$3\times5=15$个试验小区。

即如果我们安排第一件事情有m种方法。安排第二件事情有n种方法。那末相继安排这两件事一共有$m\times n$种方法。

一般地，如果有K件事情A_1，A_2，…A_k，完成A_1的有n_1种方法，完成A_2的有n_2种方法，…，完成A_k的n_k种方法则依次完成这K件事情一共有$n_1\times n_2\times\cdots\times n_k$种方法。

例2　有三个数1，2，3把它排列成3位数，问有几种不同的排法？

容易知道，一共有6种不同的排法，它们是123，132，

213，231，312，321。

一般地试问n个不同的元素共有n种排列？每个排列共有n个位置，第一个位置可以是这n个元素中的任何一个。共有n种方法第二个位置可以是剩下这$n-1$个元素中的任何一个，共有$n-1$种方法；…，因此，共有

$$n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1=n! \quad \cdots(1-4)$$

种不同的排列，称为全排列，记为P_n。

如果从n个不同的元素$a_1,a_2,\cdots,a_n$中任取m（$m\quad n$）个加以排列，则每个排列共有m个位置，第一个位置上可以有n种方法；第二个位置上有$n-1$种方法。…第m个位置上有$n-m+1$种方法。因此，共有

$$n(n-1)\cdots(n-m+1)=\frac{n!}{(n-m)!} \quad \cdots(1-5)$$

种不同的排列，称为选排列，记为A_n^m。

在排列中，我们又考虑了排列的元素，而且还考虑了这些元素的不同次序。例如AB与BA虽有相同的元素，但因次序不同，仍看成两个不同的排列。

例3、设有甲、乙、丙、丁四个球队参加比赛，第一轮采用单循环赛方式。问第一轮需要安排几场比赛？

一共需要安排六场比赛，它们是：甲～乙，甲～丙，甲～丁，乙～丙，乙～丁、丙～丁。

这实际上就是从4个元素（队）中选2个进行组合的问题。

一般地，如果从n个不同的元素$a_1,a_2,\cdots a_n$中任取m（$m\leq n$）个而不论它们的次序，我们就得到了一种组合；两个组合只

要有相同的元素，不论次序如何，都认为是一样的，例如，A B与B A是同一组合，由于一种组合对应于$m!$种排列。所以，共有

$$\frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m!}=\frac{n!}{m!(n-m)!}\cdots(1-6)$$

种不同的组合，记为C_n^m。

应用时，特别要注意排列与组合不同之处，组合只与所取得的元素有关，而与元素的次序无关；而排列则不仅与所取的元素有关且与元素的次序也有关。

四、概率计算方法

现在举一些例子来说明如何计算等可能型中事件A的概率。

计算的步骤是：首先求出总的基本事件的个数n，其次求出事件A的基本事件个数m，按概率的计算定则，事件A的概率

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{(\text{A的基本事件个数})}{(\text{总的基本事件个数})}\cdots(1-7)$$

例4，　设有50张考签，分别加以标号1，2，3，…，50一学生任意抽一张进行考试。假定每张考签抽到的可能性是一样的求"抽到前10号考签"这一事件A的概率。

解：50张考签每次抽一张一共有50种抽法，总的基本事件个数$n=50$，组成A的基本事件个数$m=10$，所以，所求的概率　$P(A)=\frac{10}{50}=\frac{1}{5}$

例5、一块各面均涂有油漆的正方体被锯成1000个同样大小的小正方体。得这些小正方体均匀地搅混在一起，试求任意取出

的一小正方体其两面涂有油漆的概率。

解：设"任意取出的一小正方体其两面涂有油漆"为事件A，这里，一共有1000个小正方体，总的基本事件个数$n=1000$由于正方体共有12个棱边，在其中的每一个棱边上各有8个两面涂有油漆的小正方形。所以组成A的基本事件个数$m=12\times 8=96$，于是，所求的概率

$$P(A)=\frac{96}{1000}=0.096$$

例6、一批50件产品中有2件是次品。从这批产品中任取11件，求其中恰有1件次品的概率。

解：设"从这批产品中任取11件，其中恰有一件次品"为事件A。

从这批50件产品中任取11件共有C_{50}^{11}种取法，每一种取法是一个基本事件，故总的基本事件个数$n=C_{50}^{11}$。由于是任意抽取，所以每一个基本事件的出现是等可能的。

组成A的基本事件个数是：先由2件次品中任取1件。再以48件正品中任取11－1件搭配而成，共有个数$m=C_2^1\cdot C_{48}^{11-1}$。而此，所求事件A的概率

$$P(A)=\frac{C_2^1\cdot C_{48}^{11-1}}{C_{50}^{11}}=0.35$$

§4 概率的基本性质

一、事件之间的关系

除了对等可能型的问题进行分析，运用概率的计算定则直接计

算事件的概率外，还可以运用事件之间的关系及概率的基本性质间接计算事件的概率。我们先引进事件之间的几种主要关系以及作用在事件上的运算。

如果事件A出现必然导致事件B出现，那末称事件A是事件B的子事件，记作$A \subset B$或$B \supset A$。例如，在验收某一批园柱形产品时，"直径不合格"必然导致"产品不合格"，所以，"直径不合格"是"产品不合格"的子事件。

如果$A \subset B$且$B \subset C$，那末$A \subset C$；如果$A \subset B$且$B \subset A$，那么称事件A与B相等，记作$A = B$。

事件A与B的和事件是指这样的事件，它的出现就是事件A与B至少有一个出现，把它记作$A + B$。例如，在验收质量指标为"直径和长度"的园柱形产品时，"产品不合格"这一事件便是"直径不合格"与"长度不合格"这两个事件的和。

事件A与B的积事件是指这样的事件，它的出现就是事件A与B同时出现，把它记作AB，例如，验收上面提到的园柱形产品时"产品合格"这一事件便是"直径合格"与"长度合格"这两个事件的积。

对于多于两个事件的情形，也可以类似地规定它们的和事件及积事件。

如果A与B的积事件为不可能事件，即$AB = V$，那么称A与B两事件互斥。如果n个事件A_1，A_2，…A_n中任意两个都互斥，那末称这n个事件两两互斥。对于两两互斥的n个事件A_1，A_2…A_n，可以把和事件记作$A_1 + A_2 + \cdots + A_n$。

如果事件A_1，A_2，…A_n两两互斥。且每次试验必有其一出现则称A_1，A_2，…，A_n构成事件的完备组。而它的诸事件之和等于

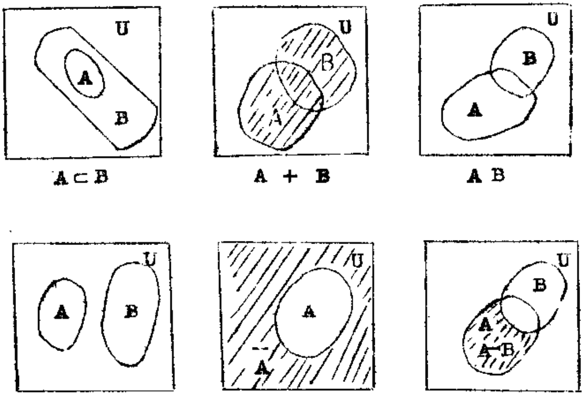
必然事件U，即$A_1+A_2+\cdots+A_n=U$

如果两个事件A与B满足$A+B=U$，$AB=V$，那末称A与B两事件互逆或对立，并称A是B的逆事件（或对立事件），或B是A的逆事件，通常把事件A的逆事件记作$\overline{A}$。例如，“接到大于10次呼唤”与“接到不大于10次呼唤”是互逆事件。

从事件A中减去事件B后的差事件是指这样的事件，它的出现就是事件A出现而事件B不出现。把它记作$A-B$。例如，“接到6次呼唤”便是从“接到不小于6次呼唤”这事件中减去“接到不小于7次呼唤”事件后的差事件。

显然，事件A的逆事件$\overline{A}$就是从必然事件U中减去事件A后的差事件，即　　$\overline{A}=U-A$

事件之间的关系及运算可以用下列图形表示：



$A\subset B$　　$A+B$　　AB

A与B互斥　　$\overline{A}$　　$A-B$

$A+B$、AB、$A-B$、$\overline{A}$分别为图中阴影部分。

有了和事件、积事件、互斥事件，对立事件等概念以后，我们就能对概率的基本性质作进一步讨论了。

二、概率的基本性质与加法定理

性质 1　必然事件的概率等于 1，不可能事件的概率等于 0

$$P(U)=1, \quad P(V)=0$$

性质 2　任一随机事件 A 的概率总是介于 0 与 1 之间。

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

这是由于频率 $\frac{m}{n}$ 总是介于 0 与 1 之间，所以相应的概率 P(A) 也总是一正小数。

性质 3　对于互斥的两个事件的和的概率，等于这两个事件的概率的和。

$$P(A+B)=P(A)+P(B) \cdots (1-8)$$

这是由于事件 A 与事件 B 互斥，所以 A，B，C 的频率 $\frac{m_1}{n}$，$\frac{m_2}{n}$，$\frac{m}{n}$ 满足等式（其中 C = A + B）

$$\frac{m}{n}=\frac{m_1}{n}+\frac{m_2}{n}$$

相应的概率应该满足

$$P(A+B)=P(A)+P(B)$$

这一性质又可推广到两两互斥的有限个事件的情形，有

性质 4　对于两两互斥的有限个事件的和的概率，等于这些事件的概率的和

$$P(A_1+A_2+\cdots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots P(A_n)\cdots (1-9)$$

习惯上把这个性质叫做概率的有限可加性，并把性质 3，性质 4 统称为概率的加法定理。