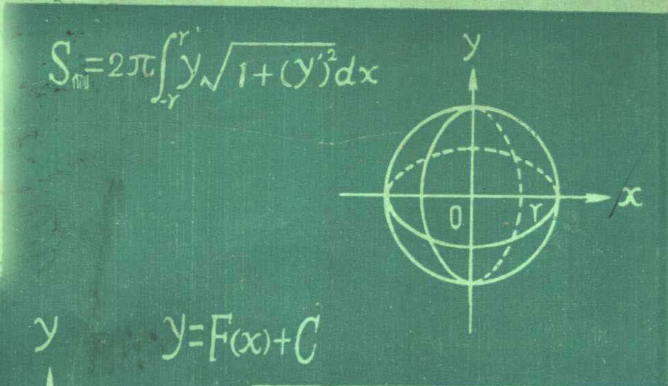
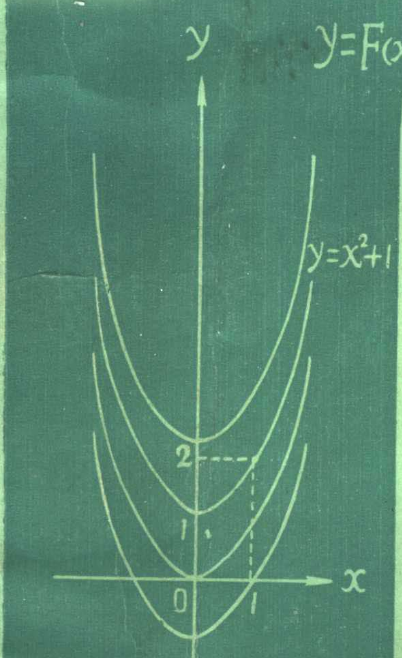




中学
微积分基础

江 西 人 民 出 版 社

中学微积分基础

江西人民出版社
一九八二年·南昌

中 学 微 积 分 基 础

江 西 人 民 出 版 社出版　（南昌市第四交通路铁道东路）
江 西 新 华 印 刷厂印刷　江西省新华书店发行

开本 787×1092 毫米　1/32　印张 3.375　字数 124.000　1982 年 10 月第 1 版
1982 年 10 月第 1 次印刷 印数：1—11940 统一书号：7110 3[illegible]8 定价：0.50 元

编 者 的 话

《中学微积分基础》原是大学里的《数学分析》课程中一元微积分最基本的内容，它包括导数和微分的基本概念以及简单应用，不定积分和定积分的基本概念以及简单应用，这些知识下放到中学学习，对学生毕业后升入高等学校继续深造或者从事社会主义四化建设都将创造有利的条件。

我们觉得中学生学习微积分基础知识并无多大的困难，但是要学好它，就必须以掌握极限的基本概念和熟练极限的基本运算为前提条件。因此，本书开头就以较大篇幅编写了必要的极限知识，以扫除学习中可以预见到的障碍。

本书取材不超越中学数学教学大纲范围，只是大纲的具体体现和课本的必要补充，不追求抽象理论的阐述，而着重在解决问题能力的训练。希望它将成为在校和离校的中学生所喜爱的自学指导书。本书由黄贤汶主编，执笔的还有肖应鹍、洪南，尽管我们尽了很大努力，但是由于水平有限，诚恳地希望关心本书的同志提出宝贵意见。

编 者

1981年12月

目　　录

第一章　数列和函数的极限

初接触极限理论的人，都有共同感觉，学起来困难，用起来生疏，原因是极限的基本概念抽象，研究方法特殊，这就是矛盾所在。但是，极限理论又贯穿在整个微积分的内容之中，因而在开始学习微积分时，决不能回避矛盾，要全力以赴地克服困难，变生疏为熟练，争取解决矛盾，扫除以后学习中的障碍。

一、数列的极限

数列是整标函数，研究数列极限是研究函数极限的基础和前奏，要集中精力把数列极限的概念弄懂弄通。

§1　数列极限的定义

先看两个数列：

$$\{a_n\}\ 2.9,\ 2.999,\ 2.99999,\cdots,2.\overbrace{9\cdots9}^{(2n-1)\text{个}9},\cdots$$

$$\{b_n\}\ 3.01,\ 3.0001,\ 3.000001,\cdots,\ 3.\overbrace{0\cdots0}^{(2n-1)\text{个}0}1,\cdots$$

为了统一起来研究这两个数列的极限，不妨把它们合并成一个数列$\{u_n\}$，使它的通项公式为

$$u_n = 3 + (-1)^n \frac{1}{10^n}.$$

从这个通项公式的结构特征和它的发展趋势，可以断言，这个数列的极限为 3，即

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 3.$$

单凭直观解决问题，毕竟不是十全十美的方法，更科学的方法莫如先观察一下这个数列的通项与 3 的差的绝对值

$$|u_n - 3| = \left|3 + (-1)\frac{1}{10^n} - 3\right| = \frac{1}{10^n}.$$

这个值，我们高兴指定它多小，它就可以多小。

例如，指定它小于千分之三，只要从数列的第三项起的各项，项项都可以办到，即

$$|u_3 - 3| = \frac{1}{10^3} < \frac{3}{10^3},$$

$$|u_4 - 3| = \frac{1}{10^4} < \frac{3}{10^3},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

也就是说，存在自然数 2，当 $n>2$ 时，u_n 的一切值都满足不等式

$$|u_n - 3| < \frac{3}{10^3}.$$

又如，指定它小于万分之七，只要从数列的第四项起的各项，项项都可以办到，即

$$|u_4 - 3| = \frac{1}{10^4} < \frac{7}{10^4},$$

$$|u_5 - 3| = \frac{1}{10^5} < \frac{7}{10^4},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

也就是说，存在自然数3，当 $n>3$ 时，u_n 的一切值都满足不等式

$$|u_n-3|<\frac{7}{10^4}.$$

这种具体化“指定”的工作可以继续做下去，其目的在于寻找规律，便于使具体化过渡到抽象化，以便用数学语言描述数列的极限。

〔定义〕对于指定的任何正数 ε，恒存在这样的自然数 N，当 $n>N$ 时，u_n 的一切值都满足不等式

$$|u_n-A|<\varepsilon$$

时，则称数列$\{u_n\}$的极限等于A，或者说它收敛于 A. 即

$$\lim_{n\to\infty}u_n=A.$$

掌握数列极限的定义，应该注意到：

① 定义中的 ε 是任意指定的正数，一般是比较小的正数，高兴指定多小就可以多小的正数；尽管如此，它毕竟是个常量，而决不能认为它是变量.

② 定义中的自然数 N，是由指定的正数 ε 来确定的，一般 ε 愈小，N 就愈大，但它决不是唯一的；对于一个指定的正数 ε，如果自然数 N 满足定义的要求，那末一切比 N 大的自然数 $N+1$、$N+2$、…都满足定义的要求。

③ 定义中的不等式

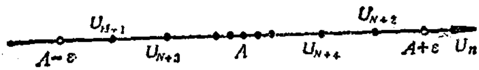
$$|u_n-A|<\varepsilon$$

等价于

$$A-\varepsilon<u_n<A+\varepsilon,$$

所谓数列$\{u_n\}$以 A 为极限，就是说恒存在自然数 N，当 $n>N$ 时，数列的项 u_{N+1}、u_{N+2}、…都落入开区间（$A-\varepsilon$，$A+\varepsilon$）即极限点 A 的 ε 邻域内，且当 n 充分大时，表示 u_n 的点便凝聚在

点A的近旁。基于这种认识，我们可以在数轴上对数列极限的定义作出直观的几何解释：



例1　设$\triangle AB_nC_n$的底边$B_nC_n=a$，高$AD=h$。n等分AD，并从各分点作直线平行于B_nC_n分别交AB_n和AC_n于B_i和$C_i(i=1,2,\cdots,n-1)$。

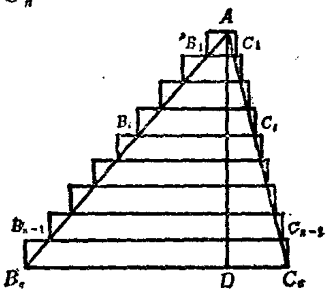
(1) 求以B_iC_i为底，$\frac{h}{n}$为高的矩形的面积的总和S_n；

(2) 求证$\triangle AB_nC_n$的面积$S=\frac{1}{2}ah$。

解：(1) $\triangle AB_iC_i \backsim \triangle AB_nC_n$

$$\Rightarrow \quad \frac{B_iC_i}{\frac{i}{n}AD}=\frac{B_nC_n}{AD}$$

$$\Rightarrow \quad B_iC_i=\frac{a}{n}i.$$



$$S_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{a}{n}i\cdot\frac{h}{n}$$

$$=\frac{1}{n^2}ah\sum_{i=1}^{n}i=\frac{n(n+1)}{2n^2}ah=\frac{n+1}{n}\cdot\frac{1}{2}ah.$$

证：(2) 注意到S是S_n当$n\to\infty$时的极限，因此要证明题断，只须证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1.$$

为此，对于指定的正数ε，建立不等式

$$\left|\frac{n+1}{n}-1\right|<\varepsilon$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n}<\varepsilon \Rightarrow n>\frac{1}{\varepsilon}.$$

取 $$N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]^{*},$$

由于存在自然数N，当$n>N$时，不等式

$$\left|\frac{n+1}{n}-1\right|<\varepsilon$$

恒成立，根据数列极限的定义，故证得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1.$$

于是 $$S=\frac{1}{2}ah\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=\frac{1}{2}ah.$$

数列极限定义学习完毕以后，应该明确以下几点：

① 常数列$c,c,c,\cdots,c,\cdots$的极限就是常数c的本身。这是因为对于指定的任何正数ε不等式$0=|c-c|<\varepsilon$对于一切自然数n都成立。

② 极限为0的变量b_n叫做“无穷小量”。就是对于指定

---

* 在这个例子的解法过程中，用到了“在方括号内填一个数”的符号，这是什么意思呢？例如[X]表示不大于X的最大整数。就是：

若 $$\varepsilon=\frac{1}{100}\Rightarrow\frac{1}{\varepsilon}=100,$$

则 $$\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]=100.$$

若 $$\varepsilon=\frac{3}{1000}\Rightarrow\frac{1}{\varepsilon}=333\frac{1}{3},$$

则 $$\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]=333.$$

的任何正数ε，恒存在自然数N，当$n>N$时，使不等式

$$|b_n-0|<\varepsilon\Rightarrow|b_n|<\varepsilon$$

成立。

但是应该注意，任何异于0的具体确定的量，它无论怎样小都不能称为无穷小量。无穷小量首先是变量，其次是在变化发展过程中它的值愈来愈接近于0并且以0为极限。

③ 设α_n是无穷小量，数列$\{a_n\}$的极限为A，则下面两个等式是等价的：

$$\lim_{n\to\infty}a_n=A\Leftrightarrow a_n=A+\alpha_n.$$

这个等式对于研究极限理论有时起着简化作用。

④"无穷小量"的对立面就是"无穷大量"。绝对值总能够比指定的任何大的正数都大的变量，叫做无穷大量，它是没有极限的变量。不能把它看作是"很大的量"，它只是在变化过程中才能变到大于指定的数值。无穷大量有正负之分：

$\{a_n\}$ $-3,-1,1,3,\cdots,2n-5,\cdots$

可以看出，$a_n=2n-5$是正无穷大量，数列$\{a_n\}$是发散的。

$\{b_n\}$ $4,1,-4,-11,\cdots,5-n^2,\cdots$

可以看出，$b_n=5-n^2$是负无穷大量，数列$\{b_n\}$也是发散的。

例2 给定数列变量$a_n=\dfrac{n^2-51}{n}$.

(1) a_n何时大于14?

(2) a_n何时大于50?

(3) 证明a_n是正无穷大量。

解：(1) 建立不等式：

$$\frac{n^2-51}{n}>14\Rightarrow n^2-14n-51>0$$

$$\Rightarrow(n+3)(n-17)>0\Rightarrow n>17.$$

当 $n>17$ 时，a_n 的一切值都大于14。

解：(2) 建立不等式：

$$\frac{n^2-51}{n}>50\Rightarrow n^2-50n-51>0$$

$$\Rightarrow(n+1)(n-51)>0\Rightarrow n>51.$$

当 $n>51$ 时，a_n 的一切值都大于50。

证：(3) 对于指定的任何大的正数 M，建立不等式：

$$\frac{n^2-51}{n}>M\Rightarrow n^2-Mn-51>0$$

$$\Rightarrow\left(n-\frac{M-\sqrt{M^2+204}}{2}\right)\left(n-\frac{M+\sqrt{M^2+204}}{2}\right)>0;$$

可令
$$N=\left[\frac{M+\sqrt{M^2+204}}{2}\right],$$

当 $n>N$ 时，下面的不等式恒成立：

$$\frac{n^2-51}{n}>M,$$

故证得 $a_n=\dfrac{n^2-51}{n}$ 是正无穷大量。

⑤ 无穷大(小)量与无穷大(小)量的积仍然是无穷大(小)量，无穷大(小)量与常量的积也还是无穷大(小)量。无穷小量与无穷小量的和(差)仍然是无穷小量，同号无穷大量的和也还是无穷大量。

⑥ 一个数列没有极限则已，如果有极限，那末极限就是唯一的。

例如 $1,0,1,0,\cdots,\dfrac{1+(-1)^{n+1}}{2},\cdots$

可以看出，数列变量

$$a_n=\frac{1+(-1)^{n+1}}{2}=\begin{cases}=1(\text{当 } n \text{ 为奇数})\\=0(\text{当 } n \text{ 为偶数})\end{cases}$$

显然不是无穷大量，也不是无穷小量；但在变化过程中，它的值摇摆不定，时而为1，当而为0，因而找不出自然数N满足数列极限的定义，所以说这样的数列是没有极限的。

§2 极限四则运算的法则

对极限四则运算的三条重要法则，不仅结论必须掌握，而且证明也应有所了解。

如果数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$都是收敛的，且有

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A,\ \lim_{n\to\infty} b_n = B,$$

则可推出如下三个法则。

〔法则一〕 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = A \pm B$。

证：根据已知条件，我们可以推出：

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A \Rightarrow a_n = A + \alpha_n;$$

$$\lim_{n\to\infty} b_n = B \Rightarrow b_n = B + \beta_n,$$

其中α_n和β_n都是无穷小量。

$$\therefore\quad a_n \pm b_n = (A \pm B) + (\alpha_n \pm \beta_n).$$

由于$\alpha_n \pm \beta_n$仍然是无穷小量，故证得

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = A \pm B.$$

〔法则二〕 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = A \cdot B$。

证：$a_n \cdot b_n = (A + \alpha_n)(B + \beta_n)$

$$= A\cdot B + A\cdot\beta_n + B\cdot\alpha_n + \alpha_n\cdot\beta_n.$$

由于 $A\beta_n$、$B\alpha_n$、$\alpha_n\beta_n$ 都是无穷小量，故证得

$$\lim_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)=A\cdot B.$$

〔特例〕如果 b_n 是常量 k，则

$$\lim_{n\to\infty}(k\cdot a_n)=k\cdot A.$$

〔法则三〕 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)=\dfrac{A}{B}\ (b_n\neq 0, B\neq 0)$.

证：
$$\left|\frac{1}{b_n}-\frac{1}{B}\right|=\left|\frac{1}{B+\beta_n}-\frac{1}{B}\right|$$
$$=\frac{|\beta_n|}{|B+\beta_n|\cdot|B|}$$

由于 β_n 和 $\dfrac{\beta_n}{B^2}$ 都是无穷小量，因而

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{b_n}-\frac{1}{B}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{|\beta_n|}{|B+\beta_n|\cdot|B|}=0,$$

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{b_n}\right)=\frac{1}{B}.$$

注意到
$$\frac{a_n}{b_n}=a_n\left(\frac{1}{b_n}\right),$$

故证得
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left[a_n\left(\frac{1}{b_n}\right)\right]$$
$$=\lim_{n\to\infty}a_n\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{b_n}\right)$$
$$=A\cdot\frac{1}{B}=\frac{A}{B}.$$

上面的三条数列极限四则运算法则表明，如果两个数列都有极限，那末，这两个数列各对应项的和、差、积、商组成的数

列的极限，分别等于这两个数列的极限的和、差、积、商（作为除数的数列，各项都不能为 0，极限也不能为 0）。

例如对下面两个数列

$$\{a_n\}\quad 1+\frac{1}{1},1+\frac{1}{2},1+\frac{1}{3},\cdots,1+\frac{1}{n},\cdots$$

就是
$$\frac{2}{1},\ \frac{3}{2},\ \frac{4}{3},\cdots,\frac{n+1}{n},\cdots$$

$$\{b_n\}\quad 1-\frac{1}{2},\ 1-\frac{1}{3},\ 1-\frac{1}{4},\ \cdots,\ 1-\frac{1}{n+1},\ \cdots$$

就是
$$\frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\cdots,\frac{n}{n+1},\ \cdots$$

由于$\frac{1}{n}$和$\frac{1}{n+1}$都是无穷小量，可以看出

$$\lim_{n\to 1} a_n=1,\qquad \lim_{n\to\infty} b_n=1.$$

$$\{a_n+b_n\}\quad 2+\frac{1}{1\cdot 2},\ 2+\frac{1}{2\cdot 3},2+\frac{1}{3\cdot 4},\cdots,2+\frac{1}{n(n+1)},\cdots$$

由于$\frac{1}{n(n+1)}$是无穷小量，故知

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\ 2=\lim_{n\to\infty} a_n+\lim_{n\to\infty} b_n.$$

$$\{a_n-b_n\}\quad \frac{3}{1\cdot 2},\ \frac{5}{2\cdot 3},\ \frac{7}{3\cdot 4},\cdots,\frac{2n+1}{n(n+1)},\ \cdots$$

由于 $\frac{2n+1}{n(n+1)}=\frac{\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n}}$是无穷小量，故知

$$\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=0=\lim_{n\to\infty} a_n-\lim_{n\to\infty} b_n.$$

$$\{a_n\cdot b_n\}\quad 1,\ 1,\ 1,\ \cdots,\ 1,\ \cdots$$

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)=1=\lim_{n\to\infty} a_n\cdot\lim_{n\to\infty} b_n.$$

$$\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\} \quad \left(\frac{2}{1}\right)^2,\ \left(\frac{3}{2}\right)^2,\ \left(\frac{4}{3}\right)^2,\cdots,\left(\frac{n+1}{n}\right)^2,\cdots$$

$$\therefore \quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right)=1=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}a_n}{\lim\limits_{n\to\infty}b_n}.$$

§ 3　极限的三个重要定理

对极限的三个重要定理，要了解前两个定理的证明方法，后一个定理的严格证明，超出了目前学习范围，可把它作为公理使用。尽管如此，学习时，还应注意对实例所作的解释。

〔定理一〕设有两个收敛数列，它们的极限分别是：

$$\lim_{n\to\infty}a_n=A,\ \lim_{n\to\infty}b_n=B.$$

证明：若 $a_n<b_n$，则 $A\leqslant B$。

证：用反证法，即假设 $A>B$，则 $A-B>0$ 是个常数，它不能小于任意小的正数。但是对于指定的正数 ε，我们可以找到自然数 N，当 $n>N$ 时，有

$$A-\varepsilon<a_n<A+\varepsilon,\ B-\varepsilon<b_n<B+\varepsilon,$$

$$\therefore \quad A-\varepsilon<a_n<b_n<B+\varepsilon.$$

于是得到　　$A-B<2\varepsilon,$

这与假设 $A>B$ 相矛盾。故证得

$$A\leqslant B.$$

〔定理二〕在三个数列 $\{a_n\}$、$\{b_n\}$、$\{c_n\}$ 中，若

$$\lim_{n\to\infty}a_n=A=\lim_{n\to\infty}c_n,$$

而且　　$a_n\leqslant b_n\leqslant c_n,$