

数学奥林匹克教练 培训班讲义

北京师范学院教育科学研究所
北京数学奥林匹克学校(小学部)

主 讲 人

王 元	中国数学会理事长	教授
梅向明	中国数学会普委会	顾问
钟善基	北京师范大学数学系	教授
曹才翰	全国高师数学教育研究会理事长	教授
陶懋愿	北京计算机学院	教授
张君达	中国数学会普委会副委	副教授
方明一	人民教育出版社	副编审
陶晓勇	北京数学会中教委副主任	副教授
梁楚材	北京教育学院	高级讲师
王进明	北京数学奥林匹克学校	副教务长
吴建平	中国国家队教练	讲师
邵舒竹	北京代表队教练	讲师

目 录

第一讲	教学竞赛之我见·····	王 元 (1)
第二讲	关于举办中师数学竞赛的 主要作用·····	钟善基 (11)
第三讲	中师数学竞赛在北京·····	梁楚材 (21)
第四讲	新编三年制中师教材简介·····	方明一 (23)
第五讲	趣味几何·····	王进明 (30)
第六讲	1991 年华罗庚金杯少年数学 邀请赛试题选讲·····	陶小勇 (39)
第七讲	数学奥林匹克命题的原则、 方法和范畴·····	张君达 (69)
第八讲	应用题解题研究·····	王进明 (92)
第九讲	问题的引入与背景·····	吴建平 (98)
第十讲	分析推理问题·····	郜舒竹 (104)
第十一讲	简易最大与最小问题·····	陶小勇 (124)
第十二讲	抽屉原则浅谈·····	张君达 (127)
第十三讲	数学问题·····	郜舒竹 (137)
第十四讲	筛选与枚举·····	张君达 (151)
第十五讲	如何数数·····	郜舒竹 (168)
第十六讲	计算中的技巧·····	郜舒竹 (181)
附录: (1)	华杯赛试题	
(2)	北京中师数学竞赛试题	(215)

第一讲 数学竞赛之我见

随着数学竞赛的发展，已逐渐形成一门特殊的数学学科——竞赛数学。

一、数学竞赛的简史

数学竞赛与体育竞赛相类似，它是青少年的一种智力竞赛，所以苏联人首创了“数学奥林匹克”这个名词。在类似的以基础科学为竞赛内容的智力竞赛中，数学竞赛历史最悠久，参赛国最多，影响也最大，比较正规的数学竞赛是1894年在匈牙利开始的，除因两次世界大战及1956年事件而停止了7届外，迄今已举行过90届。苏联的数学竞赛开始于1934年，美国的数学竞赛则是1938年开始的。这两个国家除第二次世界大战期间各停止了3年外，均已举行过50多届。其他有长久数学竞赛历史的国家是罗马尼亚（始于1902年）、保加利亚（始于1949年）和中国（始于1956年）。

1956年，东欧国家和苏联正式确定了国际数学奥林匹克的计划，并于1959年在罗马尼亚布拉索夫举行了第一届国际数学奥林匹克（International Mathematics Olympiad，简称IMO）。以后每年举行一次。除1980年因东道国蒙古经济困难停办外，至今共举行过31届。参赛国家也愈来愈多。第一届仅7个国家参加，至1980年已有23个；到1990年，则有54个。

必须说明在上述历史之前已有一些数学竞赛活动。例如苏联人说，在 1886 年帝俄时代就举行过数学竞赛。又如 1926 年在中国上海市举办过包括学生、银行和钱庄职员在内的珠算比赛，中华职业学校一年级学生，16 岁的华罗庚凭智慧夺得了冠军。这些都是关于数学竞赛的佳话，不列入正史。

二、数学竞赛的发展

数学竞赛活动是由个别城市，向整个国家，再向全世界逐步发展起来的。例如苏联的数学竞赛就是先从列宁格勒和莫斯科开始，至 1962 年拓展至全国的。美国则是到 1957 年才有全国性的数学竞赛的。

数学竞赛活动也是由浅入深逐步发展的。几乎每个国家的数学竞赛活动都是先由一些著名数学家出面提倡组织，试题与中学课本中的习题很接近；然后逐渐深入，并有一些数学家花比较多的精力从事选题及竞赛组织工作，这时的试题逐渐脱离中学课本范围，当然仍要求用初等数学语言陈述试题并可以用初等数学方法求解。例如苏联数学竞赛之初，著名数学家柯尔莫哥洛夫、亚历山大洛夫、狄隆涅等都参与过这一工作。在美国，则有著名数学家伯克霍夫父子、波利亚、卡普兰斯基等参与过这项工作。

国际数学奥林匹克开始举办后，参赛各国的备赛工作往往主要是对选手进行一次强化培训，以拓广他们的知识，提高他们的解题能力。这种培训课程是很难的，比中学数学深了很多。这时就需要少数数学家专门从事这项活动。

数学竞赛搞得好的国家，竞赛活动往往采取层层竞赛、层层选拔这种金字塔式的方式进行。例如，苏联分五级竞赛，即

校级、市级、省级、加盟共和国级和全苏竞赛，每一级的竞赛人数约为前一级的 $1/10$ ；还设立了 8 个专门的数学学校（或数学奥林匹克学校），以培养数学素质好的学生。

数学竞赛虽然历史悠久，但最近 10 年有很大发展和变化，有关工作愈趋专门。我们要认真注意其发展，认识其规律。

三、数学竞赛的作用

1. 选拔出有数学才能的青少年。由于数学竞赛是在层层竞赛，水平逐步加深的考核基础上选拔出优胜者，优胜者既要有踏实广泛的数学基础，又要有灵活机智的头脑和富于创造性的才能，所以他们往往是既刻苦努力又很聪明的青少年。这些人将来成才的概率是很大的。数学竞赛活动受到愈来愈多国家的注意，在世界上发展得那么快的重要原因之一就在于此。在匈牙利，著名数学家费叶、黎茨、舍贵、寇尼希、哈尔、拉多等都曾是数学竞赛的优胜者。在波兰，著名数论专家辛哲尔是一位数学竞赛优胜者。在美国，数学竞赛优胜者中后来成为菲尔兹数学奖获得者的有米尔诺、曼福德、奎伦三人。也有不少优胜者成为著名的物理学家或工程师，如著名力学家冯·卡门。

2. 激发了青少年学习数学的兴趣。数学在一切自然科学、社会科学和现代化管理等方面都愈来愈显得重要和必不可少。由于电子计算机的发展，各门科学更趋于深入和成熟，由定性研究进入定量研究。因此青少年学好数学对于他们将来学好一切科学，几乎都是必要的。数学竞赛将健康的竞争机制引进青少年的数学学习中，将激发他们的上进心，激发他

们的创造性思维。由于数学竞赛是分级地金字塔式地进行的，所以国家级竞赛之前的竞赛，试题基本上不脱离中学数学课本范围，适合广大青少年参加。但也要承认人的天赋和数学素质是有差别的，甚至会有很大的差别。国家级竞赛及其以后的竞赛和培训，只能在少数人中拔高进行，少数有很好数学素质的青少年是吃得消的。例如，澳大利亚少年托里·陶在他 10 岁、11 岁和 12 岁时分别在第 27、28 和 29 届国际数学奥林匹克上获得铜牌、银牌和金牌。在数学竞赛的拔高阶段当然需要一些大学教师和数学专业研究人员参与。

3. 推动了数学的教学改革工作。数学竞赛进入高层次后，试题内容往往是高等数学的初等化。这不仅给中学数学添入了新鲜内容，而且有可能在逐步积累的过程中，促使中学数学教学在一个新的基础上进行反思，由量变转入质变。中学教师也可在参与数学竞赛活动的过程中，学得新知识，提高水平，开阔眼界。事实上，已有一些数学教育工作者在这项活动中逐渐尝到了甜头。因此数学竞赛也可能是中学数学课程改革的“催化剂”之一，似乎比自上而下的“灌输式”的办法为好。60 年代初，西方所谓中学数学教学现代化运动即是企图用某些现代数学代替陈旧的中学数学内容，但采取了由上往下灌输的方法，结果既脱离教师水平，也脱离学生循序学习所需要的直观思维过程。现在基本上被一风吹，宣告失败了。相反地，数学竞赛也许是一条途径。在中国，中学生的高考压力很重，中学教师为此而奔波，确有路子愈走愈窄之感。数学竞赛或许能使中学数学的教学改革走向康庄大道。

四、竞赛数学——奥林匹克数学

随着数学竞赛的发展，已逐渐形成一门特殊的数学学科——竞赛数学，也可称为奥林匹克数学。将高等数学下放到初等数学中去，用初等数学的语言来表述高等数学的问题，并用初等数学方法来解决这些问题，这就是竞赛数学的任务。这里的问题甚至解法的背景往往来源于某些高等数学。数学就其方法而言，大体上可以分成分析与代数，即连续数学与离散数学。由于目前微积分不属于国际数学奥林匹克的范围，所以下放离散数学就是竞赛数学的主体，很多国际数学奥林匹克的试题来自数论、组合分析、近世代数、组合几何、函数方程等。当然也包含中学课程中的平面几何。

竞赛数学又不同于上述这些数学领域。通常数学往往追求证明一些概括广泛的定理，而竞赛数学恰恰寻求一些特殊的问题，通常数学追求建立一般的理论和方法，而竞赛数学则追求用特殊方法来解决特殊问题；而且一旦某个问题面世，即成为陈题，又需继续创造新的问题。竞赛数学属于“硬”数学范畴，它通常也与纯粹数学一样，以其内在美，包括问题的简练和解法的巧妙，作为衡量其价值的重要标准。

竞赛数学不能脱离现有数学分支而独立发展，否则就成了无源之水，所以它往往由某些领域的专家兼搞，如参加国际数学奥林匹克的中国代表团的出色教练单墀，就是一位数论专家。

国际数学奥林匹克的精神是鼓励用巧妙的初等数学方法来解题，但并不排斥高等数学方法和定理的使用。例如在这次第 31 届国际数学奥林匹克中，有学生在解题时用到了贝

特朗假设，也称车比雪夫定理，即当 n 大于 1 时，在 n 和 $2n$ 之间必定有一个素数。还有人在解题时用到了谢尔宾斯基定理，即一个平方数表成 s 个平方数之和的通解形式。这些定理须在华罗庚所著的《数论导引》（大学数学系研究生教本）或更专门的书中才能找到。这样不仅已是“杀鸡用牛刀”，而且按某外国教练的说法，“他们在用原子弹炸蚊子，但蚊子被炸死了！”这样做是允许的，但不是国际数学奥林匹克所鼓励的。

国际数学奥林匹克的一个难试题，经简化后的证明要写三四页，这不仅大大超过中学课本的深度，也不低于大学数学系一般课程的深度，当然不包括大学课程的广度。实际上，大学数学系课程中，一条定理的证明长达 3 页者并不多。一个好试题的解答，大体上相当于一篇有趣的短论文。因此用这些问题来考核青少年的数学素质是相当科学的。它们的解决需要参赛者有相当宽广的数学基础知识，再加上机智和创造性。这与单纯的智力小测验完全不同。国际上的数学竞赛范围，大体上从小学四年级到大学二年级。小学生因基础知识太少，这期间的所谓数学竞赛，其实是智力小测验型。对大学生应强调系统学习，要求对数学有一个整体了解。因此数学竞赛的重点应是中学，特别是高中。

现在已经积累了丰富的数学竞赛题库，可供中学师生和数学爱好者练习。国际上也已经有了竞赛数学的专门杂志。

五、数学竞赛在中国

我国的数学竞赛始于 1956 年，当时举办了北京、上海、武汉、天津四城市的高中数学竞赛。华罗庚、苏步青、江泽

涵等最有威望的数学家都积极出面领导并参与这项工作。但由于“左”的冲击，至1965年，只零零星星地举行过6届。“文化大革命”开始后，数学竞赛更被看成是“封、资、修”的一套而被迫全部取消。直到“四人帮”被打倒，我国的数学竞赛活动于1978年又重新开始，并从此走上了迅速发展的康庄大道。1980年前的数学竞赛属于初级阶段，即试题不脱离中学课本。1980年以后，逐渐进入高级阶段。我国于1985年第一次参加国际数学奥林匹克，1986年开始名列前茅，1989和1990年连续两年获得团体总分第一。

今年我国成功地举办了第31届国际数学奥林匹克，这标志着我国的数学竞赛水平已达到国际领先水平。第一，中国再次获得团体总分第一，说明我国金字塔式的各级竞赛和选拔体系及奥林匹克数学学校和集中培训系统是完善的。第二，我国数学家对35个国家提供的100多个试题，进行了简化与改进，从中推荐出28个问题供各国领队挑选，结果被选中5题（共需6题），这说明我国竞赛数学的水平是相当高的。第三，各国学生的试卷先由各国领队批改，然后由东道主国家组织协调认可。我们组织了近50位数学家任协调员，评分准确、公平，提前半天完成了协调任务，说明我国的数学有相当的实力。第四，这是首次在亚洲举行国际数学奥林匹克，中国的出色成绩鼓舞了发展中国家，特别是亚洲国家。除此而外，这次竞赛的组织工作也是相当不错的。

在中国，从老一辈数学家，中青年数学家，直至中小学教师，成千上万人的共同努力，才在数学竞赛方面获得了今天的成就。这里特别要提到华罗庚，他除倡导中国的数学竞赛外，还撰写了《从杨辉三角谈起》、《从祖冲之的圆周率谈

起》、《从孙子的“神奇妙算”谈起》、《数学归纳法》和《谈与蜂房结构有关的数学问题》5本小册子，这些是他的竞赛数学作品。我国在1978年重新恢复数学竞赛后，他还亲自主持出试题，并为试题解答撰写评论。中国其他优秀竞赛数学作品有段学复的《对称》、闵嗣鹤的《格点和面积》、姜伯驹的《一笔画和邮递路线问题》等。这里还应提到王寿仁，他从跟华罗庚一起工作起，一直到今天，始终领导并参与了数学竞赛活动。他带领中国代表队3次出国参加国际数学奥林匹克，并领导了第31届国际数学奥林匹克的工作。1980年以后，我国基本上由中青年数学家接替了老一辈数学家从事的数学竞赛工作，他们积极努力，将中国的数学竞赛水平推向一个新的高度。裘宗沪就是一位突出代表。他从培训学生到组织领导数学竞赛活动，从3次带领中国代表队参加国际数学奥林匹克到举办第31届国际数学奥林匹克，均作出了杰出贡献。

六、关于我国数学竞赛的几个问题

1. 要认真总结经验。既要总结成功的经验，也要总结反面的教训。特别是1956年至1977年的22年中只小规模地举行了6次数学竞赛，完全停止了16年，比匈牙利因两次世界大战而停止数学竞赛的时间长一倍多，这也从一个侧面反映了“左”的危害。要允许甚至鼓励对数学竞赛发表各种不同看法，以避免大轰大嗡、大起大落及“一刀切”。当有了缺点时，要冷静分析，划清数学竞赛内含的不合理性与工作中的缺点的界线。

2. 完善领导体制。可否设想，国家教委和中国科协通过

中国数学会数学奥林匹克委员会（或其他形式的一元化领导），统一领导与协调全国各级数学竞赛活动和国际数学奥林匹克的参赛和组织培训工作。成立数学奥林匹克基金会，资助某些数学竞赛活动，奖励数学竞赛优胜者和作出贡献的领导、教练、中小学教师等。

3. 向社会作宣传。宣传数学竞赛的意义和功能，以消除误解，例如“数学竞赛是中小學生搞的智力小测验”，“这是选拔天才，冲击了正常教学”，“教师，特别是大学教师，搞数学竞赛是不务正业”等。要用事实说明数学竞赛活动的成绩。例如仅仅“文革”前的几次低层次数学竞赛中，已有一些竞赛优胜者成才了。如上海的汪嘉冈、陈志华，北京的唐守文、石赫，他们现在已经是国内的著名中年数学家，有的已获博士导师资格。他们在“文革”中都被耽误了10年，否则完全会有更大成就。

4. 处理好普及与提高的关系。数学竞赛需要分学校、市、省、全国、冬令营、集训班金字塔式地进行。前3个层次是普及型的，试题应不脱离中学数学课本范围，面向广大学生和教师。国家级竞赛及以后的活动是提高型的，参赛者的面要迅速缩小。至于冬令营和集训队，全国只能有几十个学生参加。数学奥林匹克学校要注意质量，宜办得少而精。对于参加数学学校的学生要严格挑选，不要妨碍他们德、智、体的全面发展。除冬令营和集训班需要少数数学家集中时间出试题和进行培训工作外，宜鼓励广大数学家和中小学教师利用业余时间从事数学竞赛活动，不要妨碍大家的正常工作。总之，数学竞赛的普及部分与提高部分不要对立，而要有机地结合起来。

5. 对数学竞赛优胜者要继续进行教育和培养。一方面要充分肯定优胜者的成绩并加以鼓励。另一方面也要告诉竞赛优胜者，必须戒骄戒躁，谦虚谨慎，要成为一个好数学家或其他方面的专家，还须经过长期不懈的努力。不要将竞赛获胜看成唯一的目的，要看成鼓励前进的鞭策。还要为数学竞赛优胜者创造较好的深入学习的机会，使他们能迅速成长。例如可以考虑允许某些理工科大学在高中全国数学竞赛优胜者中，自行选拔一部分学生免试入学。

6. 对数学竞赛活动作出贡献的人员，包括组织领导者、教练与中小学教师的工作成绩要充分肯定并给予奖励。在他们的工作考核中，作为提职晋级的依据之一。

第二讲 略谈中等师范学校举办 数学竞赛的主要作用

自从 70 年代末以来，随着学校教育的整顿和发展，数学竞赛也得到了恢复、得到了发展，并且取得了令人可喜的成绩。所谓恢复，指的是我国从 50 年代就举办数学竞赛了，只是中断了一段，70 年代末又从新办起。所谓发展，指的是以前只举办普通高中生的数学竞赛，恢复以来，逐渐地还举办初中生、小学高年生的数学竞赛，继而又举办中等师范生和其他中专生的数学竞赛。所谓成绩令人可喜，这首先是尽人皆知的：在国际数学奥林匹克竞赛上，我国选手已连续两届获得团体冠军了。另外，如近几年来在小学数学竞赛中获奖的学生，他们在继续学习中，一方面数学的学习成绩更加提高，另一方面在其它学科的学习上，也多取得好成绩。因此可以说，我们的数学竞赛，正处在兴旺发达的时代。

为什么要举办数学竞赛？举办数学竞赛能起什么样的作用？回顾我国举办数学竞赛的历史，似乎可以说，是引进外国的好经验，我国也来举办数学竞赛的。它能普遍引起高中生对数学的重视、引起他们对数学的学习与研究的兴趣。更有便于较早地发现数学素质高的学生、及时地给他们以进一步的培养，使他们在国际数学奥林匹克竞赛中，取得好成绩，从而显示出我中华民族在数学素质上也是优秀的。当然，这种说法是不错的。但是，也应该说，这种说法是不足的也是

不够深刻的。

实际上，我以为举办数学竞赛，从历史发展的角度来说，它是为适应社会发展的需要、为适应科学技术发展的需要而产生的。众所周知，历史发展到今日，不论在生产上、科研上还是在生活上，数学的直接与间接的应用，已是越来越广泛了。可以说，使用数学，将成为社会迅速发展的条件之一；并且反过来，也促使数学更快地发展。而数学新成果的出现与运用，势必更能加快社会的发展。这样，问题便集中在数学人材的数量多少和水平高低之上了。我以为举办数学竞赛的主要作用，总的说来就在于促使数学人材出得多和出得好。

当然，成材在于培养。而能否培养成材，还在于被培养者的基础如何。由于学生在学习各门学科的素质上是有差异的，因而能否被培养成数学人材，还在于他们的学习数学的素质如何。为此，举办数学竞赛的作用，也可以说首先在于发现学习数学素质较高的学生。这也就是通常所说的“发现数学苗子”，而后培养他们，成为数学人材的后备力量。

学生学习数学素质的高低，是通过学习数学的过程中反映出的数学才能来体现的。是要在由简到繁、由易到难的学习过程中，以及解决数学问题的能力中，表现出来的。因而必须在他们学习到一定阶段，才容易较为准确地判明他们学习数学素质的高低。过去只举办普通高中生的数学竞赛，其主要用意，我想也就在此。

显然，如果学生在小学、初中阶段，由于客观因素使得他们所受的数学教育不充分，甚至不恰当，以致基础打得不足或不好，使他们的数学才能反映不出来，也难以使人判明

他们的数学素质的高低。因此，即使只为举办普通高中生的数学竞赛，要发挥出它的作用，也与小学、初中的数学教育有密切的关系。

近七、八年来，我们陆续地又举办了小学、初中生的数学竞赛，其用意是否就在为办好高中生的数学竞赛服务？在一定意义上，可以这样说。但更主要的，还是因为数学对社会发展的作用日益增大，有必要引起对数学学习的普遍重视，更普遍地激发学生的学习兴趣，而从小学就举办数学竞赛。只是如前所述，还在于更早的发现将来有可能成为数学人材的“苗子”。同时，由于近年来研究中小学数学教育的改革，发现中小学间的数学教育，在一定程度上有脱节的现象。这里既有教材选择的问题，也有教学要求的问题。因此，举办小学、初中生数学竞赛也有促进教学改革，进一步提高教学质量的用意。

既然举办小学、初中生数学竞赛，和举办高中生数学竞赛的用意不完全一致，所应发挥的作用也就有所不同。那么，举办中等师范生数学竞赛的用意为何？应发挥什么样的作用？诚然，中等师范生和高中生的数学知识基础是类似的。但学校的培养目标是不同的。中师的培养目标很具体，即中师生毕业后任小学教师。为此，举办数学竞赛，其作用似应有一定的特殊性。

在这里，我愿从培养目标这个角度，谈谈中师数学竞赛应发挥的作用。为了谈起来方便，先大致地谈谈举办小学数学竞赛的作用。

1. 举办小学生数学竞赛的作用

说确切些，这里所说的小学生，指的是五、六年级的学生。

今年寒假前，我们起草一份“小学数学竞赛大纲”。其中第一项“竞赛宗旨”，实质上即指应起的作用。其中分4项提出：

(一) 促进小学数学课中，“双基”（基础知识和基本技能）教学的加强，和学生思维能力的培养。

(二) 紧密结合小学数学教学大纲，在教学大纲规定内容的基础上，适当深化学生对数学知识的认识，适当丰富学生对数学方法的学习，提高学生灵活运用所学知识和方法的能力。

(三) 推动小学数学课外活动的开展。

(四) 激发学生学习数学的兴趣，发展学生的智力。

“竞赛大纲”中的第二项是“大纲内容”，也就是命题范围。共分4大项，即“数的运算”、“整数知识”、“几何知识”和“数学知识、方法的应用”（包括应用题）。由于贯彻“竞赛宗旨”（二），这4项的具体内容主要都和小学数学教学大纲中的相应内容是一致的。在这里就不在重述了。只是把进一步提高的、供各地举办竞赛时选用的内容列在下面：

简单的数列

十进制与二进制

集合的初步知识、简易的逻辑知识（推理）、组合的初步知识、简单的抽屉原则、简易的最大和最小问题、简单的一笔画问题、简易的最优策略问题。