北京电视大学数学系

数学分析习题

数学分析习题

（北京电视大学数学系）

函数概念部分

§1. 函数表示法

1. 一函数已給如下表：

自　变　量 x	0	0.5	1	1.5	2	3	4	5	6	7	8	9	10
函　数　y	−1.5	−1	0	3.2	2.6	0	−1.8	−2.8	0	1.1	1.4	1.9	2.4

用曲綫連这些点作它的图形，并依图形决定函数在 $x=2.5, 3.5, 4.5, 5.5, 6.5, 7.5, 8.5, 9.5$ 时的值使得表更"細密"一些。

2. 平面凸多边形的內角和是其边数的函数，問自变量可以取那些值？給出这个函数的解析表达式。

3. 两个电荷間的作用力和它們中間的距离的依存关系，是由函数 $F=\frac{e_1\cdot e_2}{\varepsilon\cdot r^2}$ 来表示的（庫伦定律）。假定 $e_1=e_2=1$，且 $\varepsilon=1$，試对 $r=1,2,3,\cdots,10$ 作已給函数的值的表，并描其图形。

4. 下述关系是否为函数关系：(1)正方形的面积 S 与其周长 L？(2)长方形的周长和其面积 A？(3)等边三角形的面积和角 α？(4)寄一封信所费邮資 x 与信重 y？

5. 当直角三角形斜边 $C(=5)$ 一定时，試表示其一边长 b 与另一边长 a 的依从关系。驗証，这个函数图形就是半圓。

§2. 函数的符号及分类

6. 已給函数

(a) $f(x)=\frac{x-2}{x+1}$，(б) $\varphi(x)=\frac{|x-2|}{x+1}$。求：$f(0)$，$f(-2)$，$f\left(-\frac{1}{2}\right)$，$f(\sqrt{2})$，$\left|f\left(\frac{1}{2}\right)\right|$，$\varphi(0)$，$\varphi(2)$，$\varphi(a)$。

7. 已給函数 $f(u)=u^5-1$ 求：$f(a+1)$，$2f(2a)$。

8. $\varphi(t)=t^3+1$。求 $\varphi(t^2)$和$[\varphi(t)]^2$。

9. $f(t)=2t^2+\frac{2}{t^2}+\frac{5}{t}+5t$。証明，$f(t)=f\left(\frac{1}{t}\right)$。

果 f(x) 图上的每一条弦都高出它所张的弧，則不等式

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}>f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right),$$

对所有的 $x_1 \neq x_2$ 都成立。

11. $F(x)=x^2+6$，$\varphi(x)=5x$。求方程 $F(x)=|\varphi(x)|$ 的所有的根。

复合函数。

12. 已给：$y=z^2, z=x+1$。把 y 表示成为 x 的函数。

13. 已给：$y=z^2, z=\sqrt[3]{x+1}$，$x=a^t$。把 y 表示为 t 的函数。

14. 已給：$y=\sin x$，$v=\log y$，$u=\sqrt{1+v^2}$。把 u 表成 x 的函数。

15. 用几个基本初等函数表示下面的复合函数：

(1) $y=\sin^3 x$，　(2) $y=\sqrt[3]{(1+x)^2}$，　(3) $y=\log \operatorname{tg} x$，

(4) $y=\sin^3(2x+1)$，　(5) $y=5^{(3x+1)^2}$

16. 如果 $f(x+1)-f(x)=8x+3$，試求函数表达式 $f(x)=ax^2+bx+5$ 里的 a 和 b 的值。

17. 将下列方程所給的隐函数写成 y 的显函数的形式：

(1) $x^2+y^2=1$；　(2) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$；　(3) $xy=C$；

18. 試将方程 $x^2-y^2+3x+y+2=0$ 所确定的隐函数 y 变成显函数。

§3. 函数的研究

定义域

19. 一个塔具有下述的形式：在底半径为 2R（下底）和 R（上底）高为 R 的正圓錐台的上面是一个半径为 R 高为 2R 的圓柱体；在圓柱体上面是一个半径为 R 的半球。把塔的横断面面积 S 表示为由圓錐台下底到它的距离 x 的函数。

20. 在半径为 R 的球內作一个內接圓柱体。試写出这个圓柱体积 V 与其高 x 的函数依从关系。求这个函数的定义域和其解析表达式的定义域。

21. (1) $y=\log(x+3)$；　(2) $y=\sqrt{5-2x}$；

(3) $y=\frac{1}{x^2+1}$；　(4) $y=\frac{2x}{x^2-3x+2}$；

(5) $y=\sqrt{x^2-4x+3}$；　(6) $y=\frac{2x}{\sqrt{x^2-3x+2}}$；

(7) $y=\arcsin(x-2)$；　(8) $y=\sqrt{3-x}+\arcsin\frac{3-2x}{5}$；

(9) $y=\sqrt{x}+\sqrt[3]{\frac{1}{x-2}}-\log(2x-3)$；　(10) $y=\log\sin x$。

22. 証明：(1) $\cos(\arcsin x)=\sqrt{1-x^2}$ $(-1\leqslant x\leqslant 1)$

(2) $a^b=c^{b\log_c a}$ $(a,b,c>0)$

23. 作略图：$y=\arcsin 2x$，

函数的初等性質

24. 下列函数中那些是奇函数，那些是偶函数，那些函数既不是奇函数又不是偶函数？

(1) $y=x^4-2x^2$;　(2) $y=x-x^2$;　(3) $y=\cos x$;

(4) $y=2^x$;　(5) $y=x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}$;　(6) $y=\sin x$;

(7) $y=\frac{a^x+a^{-x}}{2}$;　(8) $y=\frac{a^x-a^{-x}}{2}$;

25. 証明：$f(x)+f(-x)$是偶函数，而$f(x)-f(-x)$是奇函数。

26. 下列函数那些是周期函数？

(1) $y=\sin^2 x$;　(2) $y=x\cdot\cos x$;　(3) $y=\sin\frac{1}{x}$;　(4) $y=1+\operatorname{tg} x$;

27. 試作週期 $T=1$，在半开区間$[0,1]$内由公式 $y=2x$；所給的週期函数的图形。

28. 指出函数：(1) $y=\sin^2 x$;　(2) $y=1-\sin x$; 的最大值和最小值。

一次函数

29. 一个作等速运动的点，从运动开始經过 12 秒后在距始点 32.7 厘米处，从运动开始經过 20 秒后距离变为 43.4 厘米，把距离 s 表成时間 t 的函数。

30. 电压在某一电路上等速的降落（按綫性規律）。在实驗开始时电压为 12 伏特，延长 8 秒鐘以后电压降落到 6.4 伏特，試把电压 V 表示成时間 t 的函数，并作这个函数的图。

31. 一个函数是用下述方式决定的：在每一个区間 $n\leqslant x<n+1$（其中 n 为正常数）内，$f(x)$是成綫性变化的，并且 $f(n)=-1$，$f\left(n+\frac{1}{2}\right)=0$。試作这个函数图形。

二次函数

32. 作下列各函数图形：

(1) $y=1-x^2$;　(2) $y=|x^2-1|$;　(3) $y=x^2-x+4$;

33. 把数 a 表示成两数的和，使得它們的平方和为最小。

34. 在底为 a 高为 h 的等腰三角形里内接一矩形間矩形的高如何方能使矩形有最大的面积？

35. 画出抛物綫 $y=x^2$ 并利用它的图形解下列各方程

(1) $x^2-x-2.25=0$;　(2) $2x^2-3x-5=0$

36. 依照下列所給的条件作方程并用图解法解它：

半径等于 10 厘米，密度等于 0.8 克/厘米^{3}的木球浮于水的表面，試求沉在水中一段高？

§4. 冪指、对数函数

37. 求下列函数的反函数

$$y=\sqrt[3]{x^2+1}$$

38. 驗証，函数 $y=\frac{1-x}{1+x}$的反函数就是它本身，再举这样函数的一个例子。

39. 与其反函数相同的函数的图形是什么样的?

40. 設 $\frac{a^x+a^{-x}}{2}=h_1(x)$, $\frac{a^x-a^{-x}}{2}=h_2(x)$ 試証明下列恆等式

(a) $1-\left[\frac{h_2(x)}{h_1(x)}\right]^2=\frac{1}{[h_1(x)]^2}$ (б) $h_1(x+y)=h_1(x)h_1(y)+h_2(x)h_2(y)$

41. 作函数 $y=\log x$ 的图形，在同一图紙上不用更多的計算作函数

$$y=\frac{1}{2}\log(x+1),\qquad y=2\log\left(\frac{x+1}{2}\right)$$

的图形

§5. 三角，反三角函数

42. 作下列函数图形:

(1) $y=|\sin x|$　(2) $y=\sin\frac{1}{x}$。　(3) $y=x\sin\frac{1}{x}$

43. 一点沿半径是 R，中心在坐标原点的圓周以綫速度 v 厘米/秒作反时針方向的等速运动，在开始的瞬間这一点的横坐标是 a，試写出这一点横坐标的諧振盪方程。

44. 解下列各方程:(1) $x=2\sin x$ (2) $x=\mathrm{tg}\,x$

45. 作下列函数的图形: $y=\mathrm{tg}^{-1}x$

46. 把圓心角为 α 的扇形，卷成一个圓錐，試求頂角 ω 对 α 的依从关系并作图。

47. 求下列已知函数的反函数:

$$y=1+2\sin\frac{x-1}{x+1}$$

48. 說明下列恆等式在 Ox 軸的甚么区域内是正确的

(1) $\cos^{-1}\sqrt{1-x^2}=\sin^{-1}x$　(2) $\mathrm{tg}^{-1}x=\mathrm{ctg}^{-1}\frac{1}{x}-\pi$

49. 依照 φ 的值 $1\cdot\frac{\pi}{12}$, $2\cdot\frac{\pi}{12}$, $3\cdot\frac{\pi}{12}$,……求出相应的值 ρ，作下列各函数的图形(极坐标)全部計算都精确到 0.01 常数 $a>0$ 可以任意选择。

(1) $\rho=a\varphi$ (阿几米得螺綫)　(2) $\rho=a(1-\cos\varphi)$ (心脏綫)

极限概念部分

§1. 序列的极限

50. 整标函数取值(即序列) $u_1=0.9$, $u_2=0.99$, $u_3=0.999$, …, $u_n=\underbrace{0.99\cdots9}_{n\text{个}}$

問 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n$ 等于几? n 应为何值，才可使 u_n 和其极限的差的絕对值不超过 0.0001?

51. 試証当 n 无限增加时，$u_n=\frac{n-1}{n+1}$ 趋于 1，

52. 叙列 $u_1=\frac{1}{2}$，$u_2=\frac{5}{4}$，$u_3=\frac{7}{8}$，$u_4=\frac{17}{16}\cdots$ 的末項，在 n 为奇数时为 $\frac{2^n-1}{2^n}$，在 n 为偶数时为 $\frac{2^n+1}{2^n}$。

求 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$。問 n 为何值，才能使 u_n 和其极限的差的絕对值不超过 10^{-4}？又何时不超过任意給出的 ε？

53. 試証当 n 无限增加时，$u_n=\frac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}$ 的极限是 1，問 n 从何值开始量 $|1-u_n|$ 不超过任意正数 ε？叙列 u_n 的极限变化的性質如何(漸增的，漸減的，还是振盪的)？

54. 函数 u_n 取值 (“二項式的系数”) $u_1=m$,

$$u_2=\frac{m(m-1)}{1\cdot 2},\quad u_3=\frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3},\ \cdots,\ u_n=\frac{m(m-1)\cdots[m-(n-1)]}{1\cdot 2\cdots n},\cdots,$$

其中 m 是正整数，求 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$ 問 n 从何值开始 u_n 和 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$ 的差的絕对值不超过任意正数 ε？

55. 已給边长为 a 的正三角形，以其三边高作成新的正三角形，如此 n 次，試求当 $n\to\infty$ 时所有三角形面积总和的极限。

56. 函数 x_n 取值 $x_1=3$，$x_2=5$，$x_3=7,\cdots$，$x_n=2n+1,\cdots$ 驗証当 $n\to\infty$ 时 x_n 是无穷大量，問 n 从何值起，x_n 变为大于 N？

57. 驗証，当 $x\to 3$ 时函数 $y=\frac{x}{x-3}$ 是无穷大量，問 x 应滿足什么样的不等式，才能使 $|y|$ 大于 1000？

58. 函数 $\log\sin x$ 和 $\log\cos x$ 是有界的嗎？

59. 下列各无界函数是无穷大嗎？

(1) $f(x)=\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}$ 当 $x\to 0$ 时，　(2) $f(x)=\operatorname{tg}\frac{1}{x}$ 当 $x\to 0$ 时

(3) $f(x)=x\operatorname{tg}x$ 当 $x\to\infty$ 时　(4) $f(x)=x\operatorname{tg}^{-1}x$ 当 $x\to\infty$ 时

60. 函数 x_n 取值 $x_1=2$, $x_2=\frac{3}{4}$, $x_3=\frac{4}{9}$, $\cdots$, $x_n=\frac{n+1}{n^2}$, $\cdots$ 驗証，当 $n\to\infty$ 时，x_n 是无穷小量。

61. 驗証，当 $x\to 0$ 时，$y=\frac{x}{x+1}\to 0$ 問 x 应滿足什么条件使不等式 $|y|<10^{-4}$ 成立？

62. 按 $\varepsilon-\delta$ 說法証明下列等式：

(1) $\lim\limits_{x\to -1}|x|=1$。

(2) $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x)=0$，$\lim\limits_{x\to 1+0} f(x)=2$；$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=-1$，

其中 $f(x)=\begin{cases} x+1, & x\geqslant 1 \\ x-1, & 0<x<1 \\ x^2-1, & x\leqslant 0, \end{cases}$

(3) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{(1-x)^2}=+\infty$。

63. 用不等式表示各式:

(1) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=b$, (2) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=b$,

64. 求下列各式之值:

(1) $\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$, (2) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$。

(3) $\lim_{x\to1}\frac{x^6-3x+2}{x^4-4x+2}$, (4) $\lim_{x\to4}\frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$,

65. 求极限:

(1) $\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+4n-1}{n^2+n+10}$, (2) $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2+2})$,

(3) $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2+n}}{n-2}$, (4) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}(1+2+3+\cdots+n)$,

66. 証明定理: 如果叙列 $u_1, u_2, \cdots, u_n, \cdots$ 趋于极限 a, 則其任意的无限子叙列(例如 $u_1, u_3, u_5, \cdots$)也趋于同一极限。

67. 求极限:

(1) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$, (2) $\lim_{n\to\infty}\frac{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}$

68. 确定极限的存在, 并求之: $\lim_{n\to\infty}\frac{c^n}{n!}(c>0)$,

69. 求极限:

(1) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x$, (2) $\lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}$,

(3) $\lim_{x\to\infty}\frac{1-\cos x}{x^2}$, (4) $\lim_{x\to0}\frac{x}{\sin 3x}$,

(5) $\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)$, (6) $\lim_{x\to1}\frac{x^m-1}{x^n-1}$, (m, n, 整数)

70. 按 $\varepsilon-M$ 説法証明 $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})=0$。

71. 按 $\varepsilon-\delta$ 定义証明下面函数在給定点的連續性:

(3) $f(x)=\begin{cases}x\sin\frac{1}{x}+1, & x\neq0\\ 1, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$。

72. 研究下列函数的連續性:

(1) $y=x+\frac{1}{x}$, (2) $y=\frac{1}{x^2-1}$,

(3) $y=\begin{cases}x^2, 若 -\infty<x<1,\\ 2x-1, 若 1\leqslant x<\infty。\end{cases}$ (4) $y=\begin{cases}\frac{1}{x}, 若 x<0\\ x, 若 1\leqslant x<2\\ 3, 若 2\leqslant x\leqslant 3。\end{cases}$

73. 求极限:

(1) $\lim\limits_{x\to0}\log\left(1+\frac{\sin x}{x+1}\right)$, (2) $\lim\limits_{x\to1}x^{\sin x}$,

并說明其理由。

74. 証明: 若 $f(x)$ 在 $x=a$ 連續, 又 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, 則 $\lim\limits_{n\to\infty}f(a_n)=f(a)=f(\lim\limits_{n\to\infty}a_n)$。

75. 求极限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}n\log\left(1+\frac{1}{n}\right)$, (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n^2}{n^2-n}}$.

說明理由。

76. 設 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 連續, 証明 $\exists c\in[a,b]$ 使得: $f(c)=\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]$。

註: "$\exists$"表示"总有"的意思。

77. 証明方程: $x^2=\sin x$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上至少有一个根。

78. 証明三次方程 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ $(a\neq0)$ 至少有一个根。

79. 用逐步縮小范圍的办法求值: $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{7}$。

微商(导数)部分

§1. 微商概念: 物理概念

80. 一点 M 由不动点 A 离开, 距离 AM 与时間的平方成正比例增加, 从运动开始經过两分鐘, 距离 AM 等于 12 米, 求运动的平均速度: (a)在前五分鐘內(б)在 $t=4$ 分到 $t=7$ 分的时間內(в)在 $t=t_1$ 到 $t=t_2$ 的时間区間內。

81. 自由落体依照定律, $s=\frac{1}{2}gt^2$, 这里 $g(=980$ 厘米/秒$^2)$ 是重力加速度。設 $\Delta t=1$ 秒, 0.1 秒, 0.05 秒, 求在从 $t=5$ 秒到 $(t+\Delta t)$ 秒时間区間內运动的平均速度; 求落体在第 5 秒末的速度; 在第 10 秒末的速度, 求落体在任意瞬时 t 的速度公式。

82. 長 30 公分的非均匀細軸 AB 的質量(克), 依定律: $m=3L^2+5L$ 而分布, 这里 L 是从 A 算起的一段軸長, 試求: (1)軸的平均綫性密度(2)綫性密度: (a)离 A 点 $L=5$ 厘米处, (б)就在 A 点, (в)在軸的末端。

83. 等速度旋轉的角速度是由旋轉角对于对应的时間区間長的比所确定的, 試給出非等速旋轉的角速度定义。

84. 如果一个軸的热膨胀假定是均匀的, 則当溫度升高 1°C 时, 其单位長的增量就叫做該軸的綫性热膨胀系数, 事实上过程是非均匀进行的, 設 $L=f(t)$, 这里 L 是軸長, t 是溫度, 試給出綫性膨胀系数的定义。

微商:

85. 設自变量的增量等于: (1)2, (2)0.5, 求在点 $x_1=2$ 处函数 $y=x^3$ 的增量。

86. 試求下列各函数的比$\frac{\Delta y}{\Delta x}$：$y=2x^3-x^2+1$ 当 $x=1$，$\Delta x=0.1$ 时，$y=\frac{1}{x}$ 当 $x=2$，$\Delta x=0.01$ 时，$y=\sqrt{x}$ 当 $x=4$，$\Delta x=0.4$ 时

87. 在上題中証明当 $\Delta x\to 0$ 时，这比在第一种情形趋近于 4，第二种情形趋近于 $-\frac{1}{4}$，第三种情形趋近于$\frac{1}{4}$。

88. 已給函数 $y=x^2$ 依次設 Δx 等于：(а) 0.5，(б) 0.1，(в) 0.01，(г) 0.001，求在点 $x=3$ 处导函数的近似值。

89. $f(x)=x^2$ 求 $f'(5)$，$f'\left(-\frac{3}{2}\right)$。

90. 求函数 $y=\log x$ 在 $x=1$ 时的导数。

91. 如果 $f(0)=0$，問表达式$\frac{f(x)}{x}$当 $x\to 0$ 时趋于什么极限？

92. 試求下列各函数的导数：

(1) x^{10}，　　(2) $x^{3/7}$，　　(3) $\sqrt[5]{\frac{1}{x^3}}$

(4) $x\sqrt[4]{x}$　　(5) $\frac{1}{12}x^{12}$　　(6) $\frac{P}{x}$

几何意义：

93. 試求引向拋物綫 $y=x^2$ 上的切綫的角系数：(1)在点 $x=3$，(2)在它和直綫 $y=3x-2$ 的交点。

94. 在拋物綫 $y=x^2$ 上哪一点的切綫：(1)平行于 Ox 軸 (2)与 Ox 軸构成 45°？过拋物綫的焦点引弦垂直于拋物綫的軸，过这弦和拋物綫的交点引切綫，試証这二切綫相交成直角。

95. 試証双曲綫 $xy=a$ 上任意一切綫和坐标軸所构成的三角形的面积等于实半軸上所作正方形的面积。

96. 写出已給拋物綫 $x^2=2ay$ 上点(x_0,y_0)的切綫和法綫方程，証明在横坐标是 $x_0=2am$ 的点上切綫方程是 $x=\frac{y}{m}+am$

§2. 微分法：

97. 求下列各函数的微商（x, y, z, t, u, v 是自变量；a, b, c, m, n, p, q 是常量）。

(1) $3x^2-5x+1$　　(2) $x^4-\frac{1}{3}x^3+2.5x^2-0.3x+0.1$

(3) $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{2}$　　(4) $2\sqrt{x}-\frac{1}{x}+\sqrt[4]{3}$

(5) $\frac{x}{m}+\frac{n}{x}+\frac{x^2}{m^2}+\frac{m^2}{x^2}$　　(6) $0.1t^{-\frac{2}{3}}-\frac{5\cdot 2}{t^{1\cdot 4}}+\frac{2\cdot 5}{\sqrt[5]{t}}$

(7) $\frac{ax^3+bx^2+c}{(a+b)x}$

98. $f(x)=3x-2\sqrt{x}$，試求：$f(4)$, $f'(4)$, $f(a^2)$, $f'(a^2)$。

99. $f(t)=\dfrac{t^2-5t-1}{t^6}$，試求：$f'(-1)$, $f'\left(\dfrac{1}{a}\right)$

100. $f(x)=4-5x+2x^3-x^5$ 試証 $f'(a)=f'(-a)$。它的几何意义是什么？

101. 求所給的函数微商:

(1) $y=(x^2-3x+3)(x^2+2x-1)$　　(2) $y=(\sqrt{x}+1)\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}-1\right)$

(3) $y=\left(\dfrac{2}{\sqrt{x}}-\sqrt{3}\right)\left(4x\sqrt[3]{x}+\dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{3x}\right)$　　(4) $y=(x^2-1)(x^2-4)(x^2-9)$

(5) $y=\dfrac{x+1}{x-1}$　　(6) $y=\dfrac{x}{x^2+1}$

(7) $u=\dfrac{v^3-2v}{v^2+v+1}$　　(8) $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$

(9) $z=\dfrac{x^2+1}{3(x^2-1)}+(x^2-1)(1-x)$。　　(10) $u=\dfrac{v^5}{v^3-2}$

(11) $z=\dfrac{1}{t^2+t+1}$　　(12) $y=\dfrac{ax+bx^3}{am+bm^2}$

102. $f(x)=(x^2+x+1)(x^2-x-1)$試求：$f'(0)$和$f'(1)$。

103. $F(x)=(x-1)(x-2)(x-3)$試求：$F'(0)$, $F'(1)$和$F'(2)$

104. 一点沿直綫运动，由始点起經过 t 秒后的距离 s 等于 $s=\dfrac{1}{4}t^4-4t^3+16t^2$ （a）这点何时在始点？（б）何时它的速度为零。

105. 3 仟克重的物体依直綫运动的規律是 $s=1+t+t^2$ 其中 s 表示厘米，t 是秒，試决定該物体从始点起在第 5 秒鐘末的动能$\left(\dfrac{1}{2}mv^2\right)$

106. 經过 t 秒后車輪旋轉的角度 θ 为 $\theta=at^2-bt+c$。其中 a,b,c 是正的常数，試決定車輪轉动的角速度 ω，問經过多少秒后角速度等于 0。

107. 在直綫 $x-y+1=0$ 和抛物綫 $y=x^2-4x+5$ 的交点上引抛物綫的法綫試求由所引法綫和其交点所张的弦所成的三角形面积。

108. 試証曲綫 $y=\dfrac{x-4}{x-2}$在它和二坐标軸交点处所引的切綫是平行的。

109. 試求曲綫 $x^2(x+y)=a^2(x-y)$在原点处的切綫方程。

110. 求所給的函数的微商:

(1) $(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$　　(2) $(x^2+1)^4$

111. 求所給的函数的微商:

(1) $\rho=\varphi\sin\varphi+\cos\varphi$　　(2) $y=\dfrac{x}{\sin x+\cos x}$

(3) $y=\dfrac{\sin x-x\cos x}{\cos x+x\sin x}$

112. 求所給函数的微商:

(1) $y=x\sin^{-1}x$

(2) $y=x\sin^{-1}x+\sqrt{1-x^2}$

113. 求所給函数的微商:

(1) $y=x^2\log_3 x$

(2) $y=x\log x$

(3) $y=\sqrt{\log x}$

(4) $y=\dfrac{1-\ln x}{1+\ln x}$

114. 求下列函数的微商:

(1) $y=2^x$

(2) $y=20^x$

(3) $y=\dfrac{x}{4^x}$

(4) $y=xe^x$

(5) $y=e^x\cos x$

(6) $y=\dfrac{1+e^x}{1-e^x}$

115. 求所給函数的微商:

(1) $y=3\sin(3x+5)$

(2) $y=\log(1-2x)$

(3) $y=\sqrt{1+2\operatorname{tg}x}$

(4) $y=e^{-x}$

(5) $y=\cos^{-1}\dfrac{2x-1}{\sqrt{3}}$

(6) $y=\log\cdot\sin x$

(7) $y=\sin^{-1}\dfrac{2}{x}$

(8) $y=\sin(\sin x)$

(9) $y=\sin^{-1}(\sin x)$

(10) $y=\log\operatorname{tg}x$

(11) $y=\sqrt{\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}}$

(12) $y=\sin\sqrt{1+x^2}$

(13) $y=\operatorname{ctg}\sqrt[3]{1+x^2}$

(14) $y=(1+\sin^2x)^4$

(15) $y=\log^4\sin x$

(16) $y=\operatorname{tg}^{-1}[\ln(ax+b)]$

(17) $y=(1+\ln\sin x)^n$

(18) $y=\sin^{-1}\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$

(19) $y=\cos^2\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$

(20) $y=\{\sin^{-1}[\log(a^3+x^3)]\}^2$

(21) $y=\operatorname{arctg}\dfrac{1+x}{1-x}$

(22) $y=\log(x+\sqrt{1+x^2})$

116. 求所給函数的微商:

(1) $y=x^{\frac{1}{x}}$

(2) $y=x^{\sin x}$

(3) $y=(\sin x)^{\cos x}$

(4) $y=\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^x$

(5) $y=x^x$

117. 求各隐函数的导数：

(1) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$， (2) $x^{1/2}+y^{1/2}=a^{1/2}$

(3) $x^3+y^3-3axy=0$ (4) $y=\cos(x+y)$

(5) $y=1+xe^y$

118. 試証，曲綫 $y=\frac{1}{2}\sqrt{x-4x^2}$ 的任意一条切綫与縱軸的交点到切点与原点的距离等远。

119. 試証椭圓 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 在点 $M(x_0y_0)$ 的切綫方程为 $\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1$。

120. 試証双曲綫 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 在点 $M(x_0,y_0)$ 的切綫方程为 $\frac{xx_0}{a^2}-\frac{yy_0}{b^2}=1$。

121. 試証，星状綫 $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ 的切綫介于二坐标軸間的一段是定长等于 a。

122. 試証，椭圓族 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，其中長軸 2a 是公共的，2b 是各不相同的。在同一横坐标各点上所引切綫都交于横軸上的一点，应用这个道理説明对于椭圓作切綫的簡单方法。

123. 对于悬鏈綫 $y=\frac{a}{2}(e^{x/a}+e^{-x/a})$ 切綫的作法适用下面的方法；把 M 点的縱坐标 MN 当作直径画一半圓，截取綫段 NP=a，直綫 MP 就是所求的切綫，試証明。

§3. 微　分

124. 已給函数 $y=x^3+2x$ 試求对应于 x 由 $x=2$ 到 $x=2.1$ 变化的增量和它的綫性主部。

125. 已給函数 $y=f(x)$ 在某点 x 处已給增量 $\Delta x=0.2$ 对应的函数增量主部等于 0.8 試求在点 x 处的导数。

126. 已給函数 $f(x)=x^2$，已知在某点自变量的增量 $\Delta x=0.2$ 对应的函数增量的主部 $df(x)=-0.8$ 試求自变量的始值。

127. 試求函数 $y=\sqrt{x}$ 当 $x=4$ 而 $\Delta x=0.41$ 时的增量和微分計算絕对誤差和相对誤差，作图。

128. $y=x^3-x$ 已給 Δx 之值 $\Delta x=1$，$\Delta x=0.1$，$\Delta x=0.01$。当 $x=2$ 时計算 Δy 和 dy 求出相对誤差 $\delta=\frac{|\Delta y-dy|}{\Delta y}$ 的各对应值。

129. 一个正方形的边长等于 8 厘米，如果每边增加：(a) 1 厘米 (б) 0.5 厘米，(в) 0.1 厘米，它的面积增加多少，試求这个方形面积增量的綫性主部，并估計用这个主部代替增量时的相对誤差(百分数)。

130. 求下列各函数的微分：

(1) $0.25\sqrt{x}$ (2) $\frac{\sqrt[3]{x}}{0.2}$ (3) $\frac{1}{0.5x^2}$

(4) $(x^2+4x+1)(x^2-\sqrt{x})$ (5) $\log \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{4}\right)$

131. 計算下列各函数的微分值。

(1) $y=\frac{1}{(\operatorname{tg}x+1)^2}$ 当自变量由 $x=\frac{\pi}{6}$ 变到 $x=\frac{61\pi}{360}$ 时

(2) $y=\sin 2\varphi$ 当自变量 φ 由 $\frac{\pi}{6}$ 变到 $\frac{61\pi}{360}$ 时

(3) $y=\sin 3\varphi$ 当自变量 φ 由 $\frac{\pi}{6}$ 变到 $\frac{61\pi}{360}$ 时

132. 試求当 x 由 30° 变到 30°1′ 时函数 $y=\sin x$ 的增量的近似值 $\sin 30°1'$ 等于什么。

133. 計算 $\sin 60°18'$ 的近似値，把所得結果和表上值相比較。

134. 計算 $\operatorname{tg}^{-1}1.02$；$\operatorname{tg}^{-1}0.97$

135. 計算 $\sqrt{\frac{(2.037)^2-1}{(2.037)^2+1}}$ 的近似値

136. 如果一条重索(电纜)的长等于 2s，半拱的长为 l 而重索垂距为 f，則近似等式

$$s=l\left(1+\frac{2}{3}\frac{f^2}{l^2}\right)$$

成立。

i) 当重索垂距 f 变动 df 时計算重索长度变化。ii) 如果重索长度 ds (例如温度或負荷的变化)則垂距怎样变化？

137. 試比較应用对数表依正弦和正切所确定的角的誤差，也就是說如果已給的 y 和 z 具有同样的誤差，比較依照公式 $\log\sin x=y$ 和 $\log\operatorname{tg}x=z$ 所定义角 x 的精确性。

138. 在計算的技术常常用 π 和 $\sqrt{g}$ (g 是重力加速度)相除其中一个数是分子而另一个数是分母，这样作出来的相对誤差怎样？(这题不要)

139. 函数 $y=|x|$ 对任意的 x 都是連續的，驗証它在 $x=0$ 时不可微分。

140. 研究函数 $y=|x^6|$ 在 $x=0$ 时的連續性和可微性。

141. 一点沿圓 $P=2r\cos\varphi$ 运动如果向径以角速度 ω 旋轉試求点的横坐标和縱坐标的变化率，极軸卽横軸，极点就是笛卡儿坐标的原点。

142. 在圓 $x^2+y^2=25$ 上一点的縱坐标以 1.5 厘米/秒的速度减少，問点的縱坐标变成 4 厘米时横坐标的变化率如何？

143. 正方形的边以速度 v 厘米/秒而增加，問当正方形的边等于 a 厘米时，其对角綫与面积的变化率各为何？

144. 假定，树干的体积和其直径的立方成正比，后者是速率均匀地增大，試証在半径等于 90 公分时的体积的生长率为半径等于 18 公分时的 25 倍。

145. 检驗由直角坐标所給的点是否位于由参变量形式所給的方程的曲綫上？

点(5,1)位于圓 $x=2+5\cos t$，$y=-3+5\sin t$ 上嗎？

146. 从下列由参变量所給的各方程中消去参变量：

(1) $x=3t$，$y=6t-t^2$ (2) $x=\cos t$，$y=\sin 2t$

147. 求 y 对于 x 的导数。

(1) $x=a\cos\varphi,\ y=b\sin\varphi$　　(2) $x=a(\varphi-\sin\varphi),\ y=a(1-\cos\varphi)$

(3) $x=a\cos^3\varphi,\ y=b\sin^3\varphi$　　(4) $x=1-t^2,\ y=t-t^3$

148. 求高級微商:

(1) $y=\frac{1}{x}e^x$, 求 $y^{(10)}$,　　(2) $y=x^2\cos x$, 求 $y^{(5)}$.

(3) $y=\begin{cases}x^3, & x>0\\ x^2, & x\leqslant 0,\end{cases}$ 求 y''　　(4) $y=\sqrt{x}$, 求 $y^{(10)}$,

(5) $y=x^2e^{2x}$, 求 $y^{(20)}$,　　(6) $y=x^2\sin 2x$ 求 $y^{(50)}$

(7) $y=\sin ax\cdot\sin bx$, 求 $y^{(n)}$,　　(8) $y=\sin^2 x$, 求 $y^{(n)}$,

(9) $y=\frac{1}{x(1-x)}$, 求 $y^{(n)}$

149. 求微分,

(1) $f(x)=(x+10)^6$, 求 $f'''(2)$　　(2) $f(x)=x^6-4x^3+4$, 求 $f^{(4)}(1)$

(3) $y=x^5$, 求 d^5y,　　(4) $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$, 求 d^3y,

(5) $y=x\cos 2x$, 求 $d^{10}y$。　　(6) $y=e^{ax+b}$, 求 $d^2y,\ d^ny$,

(7) $y=\sin x$, 求 $dy,\ d^2y$,　　(8) $y=\sin x,\ x=t^2$, 求 $dy,\ d^2y$ 并与(7)比較

150. 已給圓 $\rho=2r\sin\varphi$ 試求向径与切綫的夹角 θ 和极軸与切綫的夹角 α。

151. 試求在原点:(1)曲綫 $\rho=\sin^3\varphi$ (2)曲綫 $\rho=\sin 3\varphi$ 上切綫和极軸間夹角的正切。

152. 10 米長的一个梯，一端靠在牆上，另一端放在地板上，下端以 2 米/分的速度离开牆，問底部距牆 6 米时梯的上端下降的速度如何？这速度向量的方向如何？

153. 一列車和一气球在同一时間从同一地点出发。列車以 50 仟米/时的等速度运动，而气球(也是等速度)以 10 仟米/时的速度上升，它們彼此分离的速度怎样？速度向量的方向如何？

154. 某化学物質的分解可用方程 $m=m_0e^{-kt}$ 来表示，这里 m 是 t 时物質的量，m_0 是开始时的量，k 是正的常数。試将分解速度表示为物質的量 m 的函数。

155. (1) $y=x^2-3x+2$ 求 $y''=?$　　(2) $y=1-x^2-x^4$ 求 $y'''=?$

(3) $f(x)=(x+10)^6$ 求 $f'''(2)=?$　　(4) $y=\cos^2 x$ 求 $y^{N'}=?$

(5) $f(x)=\frac{1}{1-x}$ 求 $f^{(5)}(x)=?$　　(6) $y=\frac{1-x}{1+x}$ 求 $y^{(n)}=?$

156. 設 $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)$ 証明 $f'(x)$ 在$[1,3]$上有两个根，$f''(x)$ 在$[1,3]$上有一个根。

158. 設 $f(x)$ 在$[a,b]$上有 $f'(x)=k$，証明 $f(x)=kx+b$, b 为一常数。

159. 証明不等式:

(1) $|\sin(x+\Delta x)-\sin x|\leqslant|\Delta x|$,　　(2) $|\operatorname{arctg} a-\operatorname{arctg} b|\leqslant|a-b|$,

(3) $\frac{a-b}{a}<\log\frac{a}{b}<\frac{a-b}{b}\ (0<b<a)$,　　(4) $\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}\ (-1\leqslant x\leqslant 1)$

160. 設 $f(x)$ 滿足：(1)在$[a,b]$上定义且有三級連續的微商，即 $f'''(x)$ 連續，(2)在(a,b)上有 $f^{(4)}(x)$ 存在，(3)有等式

$$f'(a)=f(b)=f'(b)=f''(b)=0$$

証明，$\exists c,(a<c<b)$ 使 $f^{(4)}(c)=0$。

161. 在(a,b)上定义的函数是二次多項式的充要条件是

$$f'''(x)=0\quad(a<x<b)$$

162. 在(a,b)上定义的函数是 n 次多項式的主要条件是：$f^{(n+1)}(x)=0$; $(a<x<b)$

163. 求极限：

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin ax}{\sin bx}$,

(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\log(1+x)}{x}$

(3) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin x}{\pi-x}$

(4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1-x}{x^2}$

(5) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x\sin x}$

(6) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{\operatorname{tg}^2x}$

(7) $\lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{\operatorname{tg}3x}{\operatorname{tg}x}$

(8) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$

(9) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{tg}x-x}{x-\sin x}$

(10) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x(e^x+1)-2(e^x-1)}{x^3}$

(11) $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{\sin(x+h)+\sin(x-h)-2\sin x}{h^2}$

(12) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{\log x}-\dfrac{1}{x-1}\right)$

(13) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^x}$

(14) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\log\sin ax}{\log\sin bx}$

(15) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\log x}{x^h}\ (h>0)$

(16) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^n}{e^{ax}}$

(17) $\lim\limits_{x\to0+0}x\log x$,

(18) $\lim\limits_{x\to1-0}\log(1-x)\cdot\log x$,

(19) $\lim\limits_{x\to0+0}x^2\log x$,

(20) $\lim\limits_{x\to0+0}x^x$,

(21) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{\log(x+\sqrt{1+x^2})}-\dfrac{1}{\log(1+x)}\right)$

(22) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}$.

(23) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\log^k n}{n}$ 利用：若 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=l$ 則 $\lim\limits_{n\to\infty}f(n)=l$

164. 求下列函数的单調区間：

(1) $y=2+x-x^2$,

(2) $y=\dfrac{2x}{1+x^2}$,

(3) $y=\dfrac{\sqrt{x}}{x+100}\ (x\geqslant0)$

165. 証明不等式：

(1) $e^x > 1 + x\ (x \neq 0$ 时)， (2) $x - \frac{x^2}{2} < \log(1+x) < x,\ (x > 0$ 时)

(3) $x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x,\ (x > 0)$ (4) $\operatorname{tg} x > x + \frac{x^3}{3}\left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$

(5) $\frac{2}{\pi} x < \sin x < x,\ \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$

166. 設 $f(x)$ 在 $a \leqslant x < +\infty$ 內連續，且 $x > a$ 时，$f'(x) > k > 0$，証明：若 $f(a) < 0$，則于区間 $\left(a, a - \frac{f(a)}{k}\right)$ 內 $f(x) = 0$ 有一个根，且只有一个根。

167. 求下列函数的凹凸性区域和拐轉点：

(1) $y = 3x^2 - x^3$， (2) $y = \frac{a^3}{a^2 + x^2}\ (a > 0)$。

(3) $y = x + x^{5/3}$， (4) $y = x + \sin x$， (5) $y = \log(1 + x^2)$

168. 求下列函数的极值：

(1) $y = 2x^2 - x^4$， (2) $y = x + \frac{1}{x}$， (3) $y = \frac{2x}{1 + x^2}$，

(4) $y = \sqrt{2x - x^2}$， (5) $y = \cos x + \frac{1}{2}\cos 2x$

169. 求最大，最小值： $y = \sqrt{5 - 4x}$ 在 $[-1, 1]$ 上。

170. 作下列函数的图形：

(1) $y = 3x - x^2$， (2) $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 5x + 6}$， (3) $y = \frac{x^4}{(1 + x)^3}$

(4) $y = \frac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$ (5) $y = \frac{x^2}{e^x}$ (6) $y = (x+1)^{2/3} + (x-1)^{2/3}$

(7) $y = \sin x + \frac{1}{3}\sin 3x$， (8) $y = \frac{\cos x}{\cos 2x}$，

(9) $y = e^{2x - x^2}$ (10) $y = (1 + x^2)e^{-x^2}$

171. 作下列参数方程表示的曲綫：

(1) $\begin{cases} x = \frac{(t+1)^2}{4} \\ y = \frac{(t-1)^2}{4} \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x = 2t - t^2 \\ y = 3t - t^3 \end{cases}$

数学分析习题解答

（北北京电视大学数学系）

第一章 函数概念

§1. 函数表示法

2. 除了 $n=1$ 和 $n=2$ 而外的所有自然数 n。如果各之和为 S，边数为 n，则 $S=(n-2)\pi$。

4. (1)是。(2)不是。(3)等边三角形的面积不是角 $\alpha=60°$ 的函数；反之可以。

5. $b=\sqrt{25-a^2}$

6. $f(0)=-2$，$f(-2)=4$，$f\left(-\frac{1}{2}\right)=-5$，$f(\sqrt{2})=-0.242\cdots\cdots$，

$\left|f\left(\frac{1}{2}\right)\right|=1$，$\varphi(1)=\frac{1}{2}$，$\varphi(2)=0$，$\varphi(a)=\frac{|a-2|}{a+1}$。

7. $f(1)=0$，$f(a)=a^3-1$，$f(a+1)=a^3+3a^2+3a$，$f(a-1)=a^3-3a^2+3a$，$2f(2a)=2(8a^3-1)=16a^3-2$。

8. $\varphi(t^2)=t^6+1$，$[\varphi(t)]^2=t^6+2t^3+1$。

9. $f\left(\frac{1}{t}\right)=2\left(\frac{1}{t}\right)^2+\frac{2}{\left(\frac{1}{t}\right)^2}+\frac{5}{\left(\frac{1}{t}\right)}+5\left(\frac{1}{t}\right)=2\frac{1}{t^2}+2t^2+5t+\frac{5}{t}=f(t)$。

10. 只要注意 $\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$ 是弦在 $x=\frac{x_1+x_2}{2}$ 处的值。$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$ 是函数在 $x=\frac{x_1+x_2}{2}$ 处之值（同志們可划个图看），按条件就知不等式成立。

11. 按假設：$F(x)=x^2+6=|\varphi(x)|=\begin{cases}5x & x\geqslant 0\\ -5x & x<0\end{cases}$ 在 $x\geqslant 0$ 时方程是 $x^2+6=5x$，解为 $x=2,3$。在 $x<0$ 时方程就是 $x^2+6=-5x$，解为 $x=-2,-3$，所以总起来方程的解是：$x=-2,-3,2,3$。

12. $y=z^2=(x+1)^2=x^2+2x+1$。

13. $y=z^2=(\sqrt[3]{x+1})^2=\sqrt[3]{(a^t+1)^2}$

14. $u=\sqrt{1+v^2}=\sqrt{1+(\log y)^2}=\sqrt{1+(\log\sin x)^2}$

15. (1) $y=z^2$，$z=\sin x$；(2) $y=u^{2/3}$，$u=x+1$，(3) $x=\log z$，$z=\operatorname{tg}x$，(4) $y=z^3$，$z=\sin u$，$u=2x+1$；(5) $y=5^u$，$u=z^2$，$z=3x+1$。

16. 由 $f(x+1)-f(x)=8x+3$ 得 $f(x+1)=f(x)+8x+3$。令 $x=0, 1$ 代入得关于 a, b 的方程