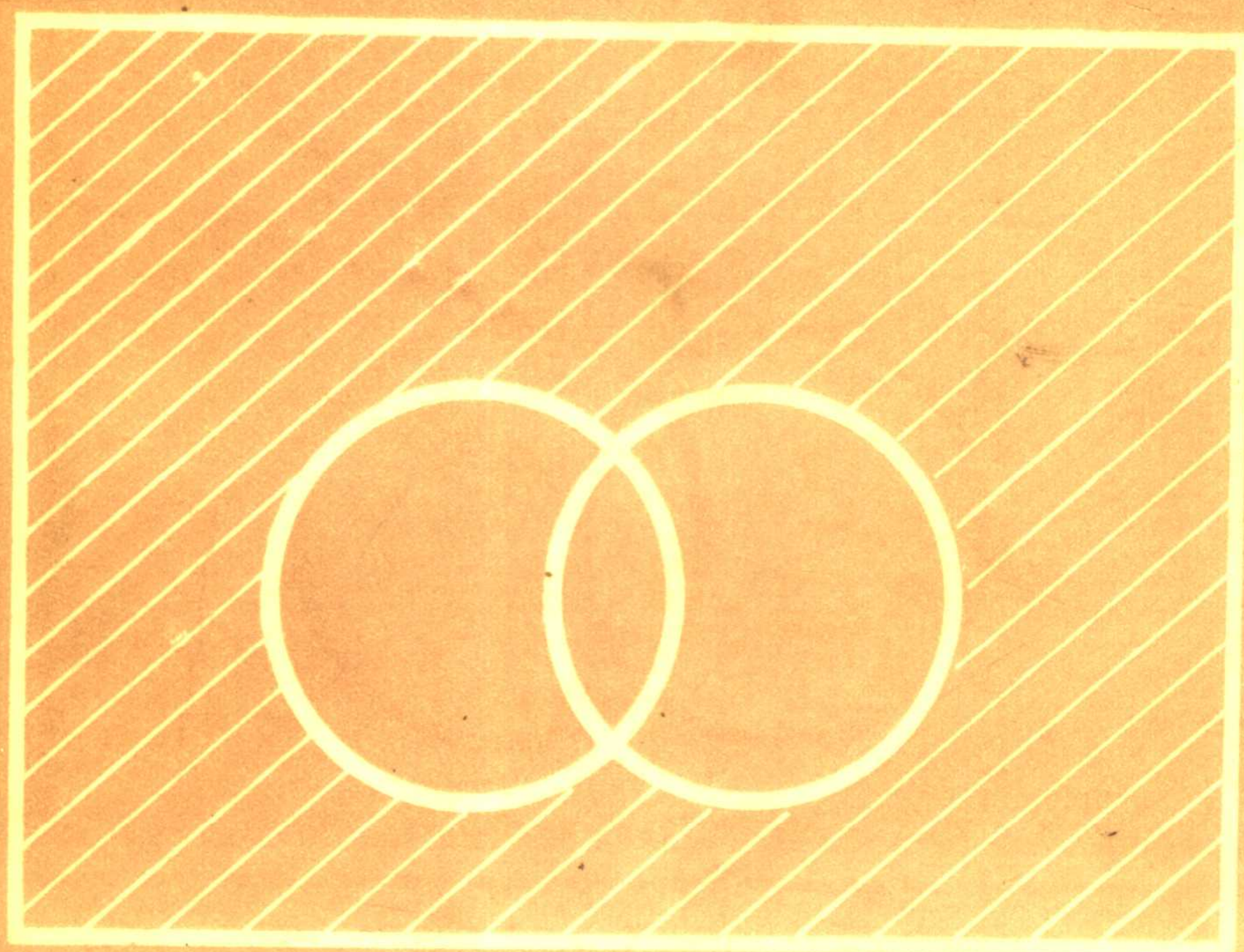


概率统计基础

陈 凯



北京电机工程学会

试验所

目 录

第一章 概率论基础

第一节 随机事件及其概率	(1)
(一) 随机事件	(1)
(二) 事件之间的关系与运算	(2)
(三) 概率的古典定义	(6)
(四) 概率的统计定义	(7)
(五) 概率的基本性质	(8)
第二节 概率的求法	(8)
(一) 古典概型问题计算举例	(9)
(二) 加法定理	(10)
(三) 乘法定理	(11)
(四) 应用举例	(14)
(五) 全概率公式	(17)
第三节 随机变量及其分布	(20)
(一) 基本概念	(20)
(二) 常用的分布函数	(27)
第四节 随机变量的数字特征	(42)
(一) 数学期望	(43)
(二) 方差	(47)
(三) 特征数字在可靠性问题中的应用举例	(49)
第五节 大数定律和中心极限定理简介	(51)
(一) 母体与子样	(52)
(二) 大数定律	(53)
(三) 中心极限定理	(55)

第二章 数理统计基础知识

第一节 数据整理和简便统计方法	(59)
(一) 数据整理及对母体分布的估计	(60)
(二) 用概率坐标纸检验估出的分布	(61)
(三) 检验指数分布的单对数坐标纸检验法	(63)
(四) 检验威布尔分布的威布尔概率纸检验法	(66)

第二节 母体参数的点估计	(70)
(一) 参数点估计的好坏标准	(71)
(二) 参数点估计的方法	(74)
第三节 母体参数的区间估计	(77)
(一) 基本概念	(77)
(二) 预备知识	(78)
(三) 母体数学期望的区间估计	(80)
(四) 母体方差的区间估计	(82)
(五) 截尾寿命试验和平均寿命估计	(83)
第四节 母体分布假设试验	(86)
(一) χ^2 检验法	(87)
(二) 柯尔莫哥洛夫检验法	(89)
(三) 正态分布和指数分布的特殊检验法	(91)

第三章 电力设备可靠性指标的现场统计方法

第一节 基本概念	(94)
(一) 电力设备的特点	(94)
(二) 电力设备的状态	(94)
(三) 电力设备的可靠性指标	(96)
(四) 系统和元件	(96)
第二节 数学模型	(96)
(一) 确定随机变量	(97)
(二) 化可修复元件的统计问题为不可修复元件的统计问题	(98)
(三) 收集原始数据	(99)
(四) 统计分析方法小结表	(101)
(五) 例题	(101)

附 录

第一章 概率论基础

第一节 随机事件及其概率

(一) 随机事件

一、随机现象 在自然界,在生产实践和科学实验中,人们观察到的现象可以分为两类。

1. 必然现象:在一定条件下必然发生某一结果的现象,叫必然现象。

例如,在标准大气压下,纯水加热到 100°C 必然沸腾;把10伏的直流电源加到5欧姆的电阻上必然产生2安培的电流等都是必然现象。

2. 随机现象:在一定条件下可能发生种种不同结果的现象叫随机现象。通常我们把它叫偶然现象。例如北京明年七月五日的天气,可能晴,可能阴,也可能雨;某台设备在下月的某日,可能正常,也可能发生故障等都是随机现象。

革命导师恩格斯说过:“在表面上是偶然性在起作用的地方,这种偶然性始终是受内部的隐蔽着的规律支配的,而问题只是在于发现这些规律”(见《马克思恩格斯选集》第四卷,第243页,1972年版)。概率统计理论,就是研究随机现象的规律性的一门学科。它的任务在于从大量看起来错综复杂的偶然现象中找出事物的内在规律。我们将通过随机试验来研究随机现象。

二、随机试验 我们把各种科学试验和对某一事物的观察统称为试验。

若一个试验具有以下特点:

1. 可以在相同的条件下重复进行;
2. 每次试验的可能结果不只一个,并且知道试验的所有可能结果;
3. 试验结束之前不能断定哪一个结果发生。这种试验就称为随机试验,简称试验。

我们用 $E, E_1, E_2, \dots$ 来表示随机试验。

例如下列试验都是随机试验:

- E_1 : 掷一颗骰子,观察出现的点数。
- E_2 : 同时掷两枚硬币,观察出现正反面的情况。
- E_3 : 记录某段高压线在七、八两个月内落雷的次数。
- E_4 : 观察某一设备在一个星期内是否发生故障。
- E_5 : 测试某种型号灯泡的寿命 τ 。

三、样本空间 一个试验的可能的直接结果一般有若干个,甚至无穷个。如试验 E_1 可能出现“1点”、“2点”、“3点”、“4点”、“5点”、“6点”六种结果。试验 E_2 可能出现“正,正”、“正,反”、“反,正”、“反,反”四种结果。这些结果是直接观察到的,基本的,不能再分的。为了研究试验结果的规律性,我们给出样本空间概念。

样本空间: 我们把一个试验的所有的在一定条件下不能再分的直接结果放在一起,称

为该试验的样本空间。记作 U 。

例如, 对于

$E_1: U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$E_2: U = \{(\text{正}, \text{正}), (\text{正}, \text{反}), (\text{反}, \text{正}), (\text{反}, \text{反})\}$

$E_3: U = \{1, 2, 3, \dots\}$

$E_4: U = \{\text{正常}, \text{故障}\}$

$E_5: U = \{\tau; \tau \geq 0\}$

四、随机事件 这是本章的主要研究对象。

1. 基本事件: 在试验中出现的每一个确定的(在一定条件下不能再分解的)直接结果称为该试验的一个基本事件。

例如, 在 E_1 中“出现1点”是一个基本事件, 记作 $\{1\}$; “出现2点”是一个基本事件, 记作 $\{2\}$, ……“出现6点”也是一个基本事件, 记作 $\{6\}$, 共六个基本事件。

2. 随机事件: 在一次试验中可能发生也可能不发生的事情叫做随机事件。简称事件, 记作 $A, B, C, \dots$ 。

例如, 在试验 E_1 中, “出现奇数点”是一个事件, 记作 $\{1, 3, 5\}$; “出现偶数点”是一个事件, 记作 $\{2, 4, 6\}$; “出现1至4点”也是一个事件, 记作 $\{1, 2, 3, 4\}$; ……在 E_2 中“出现一正一反”是一个事件, 记作 $\{(\text{正}, \text{反}), (\text{反}, \text{正})\}$ 。在 E_3 中“落雷次数在3次到5次”也是一个随机事件, 记作 $\{3, 4, 5\}$ 。

基本事件是最简单的随机事件。

3. 必然事件: 在每次试验中必然发生的事件叫必然事件, 记作 U 。

例如, 在 E_1 中“出现的点数不超过6”, 即 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, 是必然事件; 在 E_3 中“落雷次数大于零”, 即 $\{0, 1, 2, \dots\}$ 是必然事件; 每个试验的样本空间表示的事件都是必然事件。

4. 不可能事件: 在任何一次试验中均不发生的事件叫不可能事件, 记作 V 。

例如, 在 E_1 中“出现8点”, 在 E_3 中“落雷次数小于零”都是不可能事件。

一般把必然事件与不可能事件看作随机事件的特例。

(二) 事件之间的关系与运算

一、事件的包含与相等

1. 事件 B 包含事件 A 若事件 A 发生必然导致事件 B 发生, 则称事件 B 包含事件 A 。

记作 $B \supset A$ 或 $A \subset B$

例如, 有两个元件, A 表示第一个元件完好, B 表示两个元件至少一个完好, 则 $A \subset B$ 。

今后常用几何图形表示事件之间的关系与运算。这种图称为文氏图。几何表示的含义是: 用矩形表示必然事件 U , 圆 A 表示事件 A , 圆 B 表示事件 B , 作一次试验意味着向矩形内随机地抛一质点, 叫随机点。随机点必然落在矩形内。随机点落在圆 A 内表示事件 A 发生, 落在圆 B 内表示事件 B 发生。把圆 A 和圆 B 画在同一矩形内表示它们是同一试验的事件。

$A \subset B$ 的几何表示如图1—1(a)所示。它表示随机点落在圆 A 内必落在圆 B 内。

2. 事件 A 与 B 相等 若事件 A 包含 B , 而且事件 B 包含 A , 则称事件 A 与 B 相等。

记作 $A = B$

事件 A 等于 B 的几何表示如图 1—1(b) 所示。

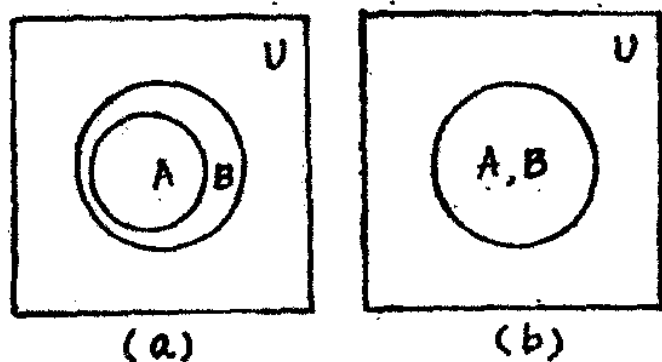


图 1—1

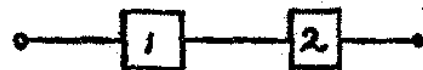


图 1—2

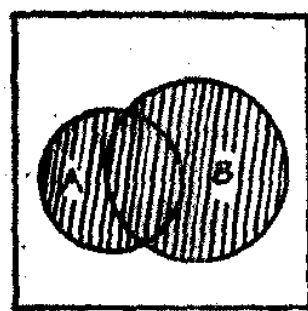


图 1—3

二、事件之间的和与积

1. 事件 A 与 B 之和 若 C 是由事件 A 与 B 至少发生一个所构成的事件，则称事件 C 是事件 A 与 B 之和。记作

$$C = A + B \quad (1.1.1)$$

例 1 有一个由两个元件(如发电机, 变压器, 断路器, 输电线等)串联构成的电路, 如图 1—2 所示, 其中, 每一个方框表示一个元件。设 A 表示元件 1 故障, B 表示元件 2 故障, C 表示系统(即电路)故障, 则 $C = A + B$

$C = A + B$ 的几何表示如图 1—3 所示。

推广: 事件 “ $A_1, A_2, \dots, A_n$ ” 至少一个发生称为事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 之和。

记作
$$A_1 + A_2 + \dots + A_n = \sum_{i=1}^n A_i \quad (1.1.2)$$

注意, 两个事件之和与两个数之和虽然名词相同, 记号也一样, 但是意义不同。为了区别起见, 有的书上把 $A + B$ 记作 $A \cup B$, 并称其为 A 与 B 的 “并”。

用定义可以证明, 用图形也可以说明, 事件的和满足下列运算规律:

(1) 交换律 $A + B = B + A \quad (1.1.3)$

(2) 结合律 $(A + B) + C = A + (B + C) \quad (1.1.4)$

(3) $A + A = A \quad (1.1.5)$

2. 事件 A 与 B 之积 如果事件 C 是由事件 A 和 B 同时发生所构成, 则称事件 C 为事件 A 与 B 之积。记作

$$C = AB \quad (1.1.6)$$

$C = AB$ 的几何意义如图 1—4 所示: 随机点同时落在大小圆之内, 即圆 A 与圆 B 的公共部分时 C 发生。

推广: 事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 同时发生称为 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 之积。记作

$$B = A_1 A_2 \dots A_n = \prod_{i=1}^n A_i \quad (1.1.7)$$

AB 又记作 $A \cap B$, 并且叫做 A 与 B 的 “交”。

例 2 一个系统由 “1” “2” 两个元件并联构成, 如图 1—5 所示。

设 A ——元件 1 故障; B ——元件 2 故障; C ——系统故障。

如果只有 “1”、“2” 两个元件同时故障时才算系统故障, 则有 $C = AB$

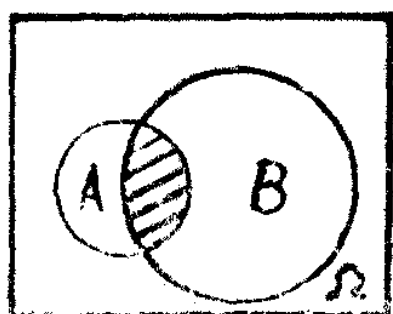


图 1—4

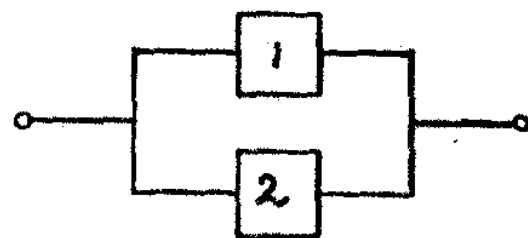


图 1—5

用两个事件 A 与 B 之积的定义可以证明、用图形可以说明事件之积的运算满足下列运算规律:

(1) 交换律	$AB = BA$	(1.1.8)
(2) 结合律	$(AB)C = A(BC)$	(1.1.9)
(3) 分配律	$A(B+C) = AB+AC$	(1.1.10)
(4)	$AA = A$	(1.1.11)
(5) 吸收律	$A+AB = A$	(1.1.12)

三、事件之间的相容与对立

1. 互不相容事件 若事件 A 与 B 不能同时发生, 则称 A 与 B 是互不相容事件。

此时有 $AB = V$ (1.1.13)

例3 一台发电机正常(A_1)与故障(B_1)是不相容事件。一项操作成功(A_2)与失败(B_2)也是互不相容事件。

在几何上, A 与 B 互不相容表示随机点不能同时落入 A, B 两个圆内, 即 A, B 没有共同点, A 与 B 的积是不可能事件。如图1—6所示:

2. 对立事件 若事件 A 与 B 互不相容, 而且它们的和为必然事件, 即

$$AB = V \quad A+B = U \quad (1.1.14)$$

则称 A 与 B 是对立事件。

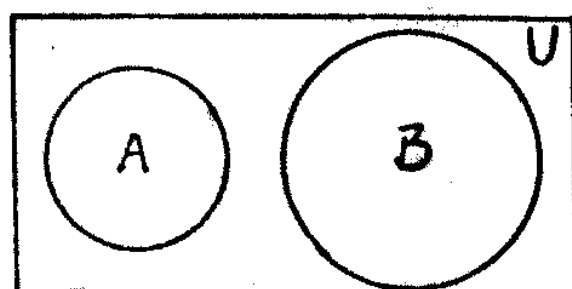


图1—6

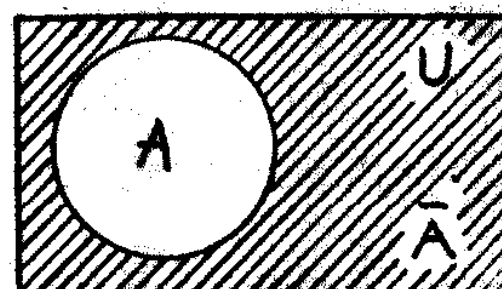


图1—7

若 B 是 A 的对立事件, 则一般地把 B 记作 $\bar{A}$ 。例3中的互不相容事件都是对立事件, 因为 $A_1 B_1 = V, \quad A_1 + B_1 = U; \quad A_2 B_2 = V, \quad A_2 + B_2 = U。$

对立事件的几何表示如图1—7所示, 其意义是随机点落入圆周内和上是事件 A ; 落入圆外就是事件 A 的对立事件 $\bar{A}$ 。

运算法则总表

	和	积
幂等律	$A+A=A$	$AA=A$
交换律	$A+B=B+A$	$AB=BA$
结合律	$A+(B+C)=(A+B)+C$	$A(BC)=(AB)C$
吸收律	$A+AB=A$	$A(A+B)=A$
分配律	$A+BC=(A+B)(A+C)$	$A(B+C)=AB+AC$
对偶律	$\overline{A+B}=\bar{A}\bar{B}$	$\overline{AB}=\bar{A}+\bar{B}$
与 V 的关系	$A+V=V$	$AV=A$
与 U 的关系	$A+U=U$	$AU=A$
互补、对立	$A+\bar{A}=U$	$A\bar{A}=V$

例4 试用几何图形说明下列四个等式:

$$(1) A + A = A \quad (2) AA = A \quad (3) A + AB = A \quad (4) A = A(B + \bar{B})$$

解 作图, 如图 1—8 所示。

因为 A 与 A 重合, 故有 $A + A = A \quad AA = A$

因为 $AB \subset A$, 故有 $A + AU = A$

因为 A 与 U 的公共部分是 A , $AU = A$

因为 $B + \bar{B} = U$, 所以 $A = AU = A(B + \bar{B})$

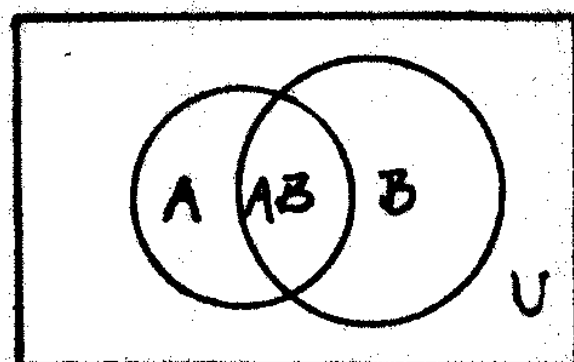


图 1—8

例5 已知 A 、 B 、 C 三个元件并联成一个系统 S , 如图 1—9 所示。

设事件 A 、 B 、 C 和 S 分别表示元件 A 、 B 、 C 及系统 S 完好, 而且只要三个元件之一完好就算系统完好, 试用 A 、 B 、 C 及 $\bar{A}$ 、 $\bar{B}$ 、 $\bar{C}$ 表示 S 和 $\bar{S}$ 。

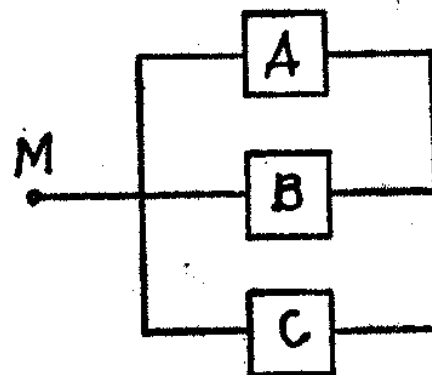


图 1—9

解 (1) 求 S 的表示式

$$\begin{aligned} \text{解① } S &= \text{“三个元件都好”} + \text{“两个元件好一个元件坏”} + \text{“两个元件坏一个元件好”} \\ &= ABC + (AB\bar{C} + AC\bar{B} + BC\bar{A}) + (\bar{A}BC + \bar{A}\bar{C}B + \bar{B}\bar{C}A) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{解② } S &= \text{“三个元件都好”} + \text{“至少两个元件好”} + \text{“至少一个元件好”} \\ &= ABC + (AB + AC + BC) + (A + B + C) \end{aligned}$$

$$\text{解③ } S = \text{“三个元件中至少一个好”} = A + B + C$$

(2) 求 $\bar{S}$ 的表示式

$$\bar{S} = \text{“三个元件都坏”} = \bar{A}\bar{B}\bar{C}$$

例6 证明例4中 S 的三个表示式相等, 即证明

$$\begin{aligned} &ABC + (AB\bar{C} + AC\bar{B} + BC\bar{A}) + (\bar{A}BC + \bar{A}\bar{C}B + \bar{B}\bar{C}A) \\ &= ABC + AB + AC + BC + A + B + C = A + B + C \end{aligned}$$

证: (1) 由于

$$A + AB = A, \text{ 推而广之, 必有 } A + ABC = A \quad A + AB + AC + ABC = A$$

所以

$$ABC + AB + AC + BC + A + B + C$$

$$= (ABC + AB + AC + A) + (BC + B) + C = A + B + C$$

即

$$ABC + AB + AC + BC + A + B + C = A + B + C$$

(2) 由于

$$\begin{aligned} A &= A(B + \bar{B}) = AB + A\bar{B} = AB(C + \bar{C}) + A\bar{B}(C + \bar{C}) \\ &= ABC + AB\bar{C} + A\bar{B}C + A\bar{B}\bar{C} \end{aligned}$$

即有

$$A = ABC + AB\bar{C} + A\bar{B}C + A\bar{B}\bar{C}$$

同理有

$$B = ABC + \bar{A}BC + AB\bar{C} + \bar{A}\bar{B}\bar{C}$$

$$C = ABC + ABC + \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}\bar{B}\bar{C}$$

把上面三式相加, 并利用(1)中证出的结论得

$$A + B + C = ABC + AB\bar{C} + A\bar{B}C + \bar{A}BC + AB\bar{C} + \bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C$$

于是有

$$ABC + AB\bar{C} + A\bar{B}C + \bar{A}BC + A\bar{A}\bar{C} + \bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C$$

$$= ABC + AB + AC + BC + A + B + C$$

$$= A + B + C$$

例5说明, 求一个事件的表示式时, 由于思路不同, 得到的表示式可能不同。

例6说明, 只要思路正确, 得到的不同表示式必然相等。

在例5中, $S = A + B + C$ 虽然简单, 但它是相容事件 A 、 B 、 C 之和。以后会看到求相容事件之和的概率公式是复杂的。表示式

$$S = ABC + ABC\bar{C} + AC\bar{B} + BC\bar{A} + AB\bar{C} + B\bar{C}\bar{A} + C\bar{A}\bar{B}$$

虽然复杂, 但它是互不相容事件 ABC , $ABC\bar{C}$, $\dots$, $C\bar{A}\bar{B}$ 之和。今后将会看到求互不相容事件之和的概率公式是简单的。有时为了求相容事件之和的概率, 常常要先把它化成互不相容事件之和。

(三) 概率的古典定义

什么叫概率呢? 粗略说, 一个事件的概率就是表示该事件在一次试验中发生的可能性大小的一个数。它的具体定义有古典定义、统计定义和公理化定义。我们只讲前两个。现在讲概率的古典定义。

例7 乒乓球赛决定发球权时, 用抛掷抽签器来决定。其方法是取一枚均匀的圆塑料片, 正面有一红圈, 反面有一绿圈, 做为抽签器。若规定, 任掷一次抽签器, 正面朝上, 则甲方发球, 乙方选场地; 反之, 则乙方发球, 甲方选场地。问在一次抽签中甲获得发球权的概率(可能性)有多大。

解 在一次实验中可能出现的结果有: 红圈朝上——记作事件 A , 绿圈朝上——记作事件 B , 共有两个基本事件, 它们是互不相容的。

由于抽签器的均匀对称, 这两个事件发生的可能性是相等的。如果某一结果发生, 甲方就获得发球权, 则称这一结果对甲方获得发球权有利。

今在一次试验中, 对甲方获得发球权有利的试验结果只有基本事件 A , 它是 A 、 B 两个等可能事件中的一个。所以甲获得发球权的概率 $= 1/2$ 。

若甲方获得发球权, 即事件 A 发生的概率记作 $P(A)$, 则 $P(A) = 1/2$ 。

定义: 若试验时某一基本事件发生导致事件 A 发生, 则称此基本事件是对 A 有利的。

例8 已知100台同一型号的设备中有两台是坏的, 问从中任取一台, 取得的设备是坏设备的概率是多少?

解 从100台设备中任取一台, 取得哪一台的机会都一样, 即它们是等可能的, 取法有100个。即做一次实验, 其可能结果共100个。亦即该试验共有100个基本事件, 取得坏设备这个事件 A , 由取得两台坏设备中任意一台所构成。故对事件 A 有利的基本事件共有两个。每一个基本事件发生的概率是 $1/100$ 。 $\therefore P(A) = 2 \times \frac{1}{100} = \frac{2}{100} = \frac{1}{50}$

在上边两个例子中, 我们根据直观分析找出了每个试验的基本事件总数 n , 并且分析出它们是等可能事件, 同时求得对事件 A 有利的基本事件数 m 。每个基本事件发生的概率是 $1/n$, 所以 $P(A) = \frac{\text{对}A\text{有利的基本事件数}m}{\text{试验的总基本事件数}n}$

应用这个方法时要求随机试验满足以下两个条件:

- I. 试验的可能结果是有限个, 如为 n 个, 亦即全部基本事件的个数是有限数 n 。
- II. 每个基本事件发生的可能性是相等的。

满足 I、II 两个条件的随机现象模型叫古典概型。概率的古典定义是对这种类型的问题定义的。

定义 在古典概型问题中,若试验结果包含的总基本事件数为 n ,对 A 有利的 基本事件数为 m ,则事件 A 发生的概率 $P(A)$ 定义为

$$P(A) = m/n \quad (1.1.15)$$

利用 (1.1.15) 计算 $P(A)$,关键是判定试验是否属于古典概型;求出总的基本事件数 n 和有利于事件 A 的基本事件数 m 。

(四) 概率的统计定义

一、频数和频率 若在 n 次重复试验中,事件 A 发生了 m 次,则 m 叫事件 A 出现的频数而比值:

$$f = m/n \quad (1.1.16)$$

叫事件 A 出现的频率。

例如:设 A 表示抛掷抽签器出现红圈这一事件。已知总抛掷次数为 $n = 4040$,红圈出现的次数(频数)为 $m = 2048$,则红圈出现的频率 $f = 2048/4040 = 0.5069$ 。有人试验得下表:

实验序号	$n = 5$		$n = 50$		$n = 500$	
	m	f	m	f	m	f
1	2	0.4	22	0.44	251	0.502
2	3	0.6	25	0.50	249	0.498
3	1	0.2	21	0.42	256	0.512
4	5	1.0	25	0.50	253	0.506
5	1	0.2	24	0.48	251	0.502
6	2	0.4	21	0.42	246	0.492
7	4	0.8	18	0.36	244	0.488
8	2	0.4	24	0.48	258	0.516
9	3	0.6	27	0.54	262	0.524
10	3	0.6	31	0.62	247	0.494

从上表可以看出,当试验次数较少时,红圈朝上的频率时大时小是不稳定的,但是当试验次数增多时,频率呈现出明显的稳定性,它大致在0.5这个数附近摆动。

二、定义 若当试验次数 n 充分大时,事件 A 的频率 f 稳定地在某数 p 附近摆动,则称数 p 为事件 A 的概率,记作

$$P(A) = p \quad (1.1.17)$$

在上例中, $p = 0.5$ 。这样定义的概率是客观存在的, 虽然不能毫无误差地加以确定, 但是可以通过大量试验求出它的很好的近似值。

注: 所谓“重复试验”就是进行 n 次试验, 每次试验都是在相同的条件下进行的。任意一次试验中事件 A 出现的概率和其他各次试验的结果无关, 所以可以说各次试验是在相同的条件下独立进行的, 故又叫“独立试验”。

三、定义 当 n 相当大时, 用 A 的频率 $f = m/n$ 作为事件 A 的概率 p 的近似值, 并把它叫做事件 A 的统计概率, 记作

$$p^* = m/n \quad (1.1.18)^*$$

这个定义的优点是, 抛弃了古典概率定义中对基本事件发生的等可能的要求和对总基本事件数为有限值的限制。它的缺点是, 同一事件的统计概率往往是不一样的。

(五) 概率的基本性质

一、必然事件 U 发生的概率等于 1, 即 $P(U) = 1 \quad (1.1.19)$

二、不可能事件 V 发生的概率等于 0, 即 $P(V) = 0 \quad (1.1.20)$

三、随机事件 A 发生的概率大于等于 0, 小于等于 1, 即 $0 \leq P(A) \leq 1 \quad (1.1.21)$

问题: 试用 (1.1.15) 证明 (1.1.19) 和 (1.1.20) 两式。

第二节 概率的求法

根据概率的统计定义, 可以通过试验, 求出事件的频率作为它的概率的近似值。对于古典概型问题, 可以根据公式 (1.1.15) 来计算事件 A 的概率 $P(A)$ 。但是当事件比较复杂时, 最好是通过事件之间的关系, 把复杂事件用简单事件表示。化求复杂事件的概率为求简单事件的概率。这一节主要讨论这个问题。

在概率计算中常常用到排列组合公式, 现在把有关公式写在下边, 以备查用。

排列公式: 从 n 个元素中任取 m 个进行排列, 共有 A_n^m 种排列法。

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\cdots[n-(m-1)] = \frac{n!}{(n-m)!}$$

当 $m = n$ 时叫全排列, 记作 P_n 。

$$P_n = A_n^n = n(n-1)\cdots 2 \cdot 1 = n! \quad 0! \text{ 定义为 } 1, \text{ 即 } 0! = 1.$$

组合公式: 从 n 个元素中任取 r 个进行组合, 共有 C_n^r 种组合方法。

$$C_n^r = \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = C_n^{n-r} = \frac{A_n^r}{P_r} = \frac{P_n}{P_r P_{n-r}}$$

$$C_n^0 = 1, C_n^n = 1$$

* 把 $p^* = m/n$ 叫事件 A 的统计定义, 见周华章的《工业技术应用数理统计》(修订本第94页)及褚一飞的《机率论与数理统计学初步》(第25页)。在实用中就把 p^* 当作 p 来用。

(一) 古典概型问题计算举例

我们的问题是：已给事件 A ，要求根据公式

$$P(A) = \frac{\text{有利于事件 } A \text{ 的基本事件数 } m}{\text{基本事件总数 } n} = \frac{m}{n} \quad (1.2.1)$$

求出 $P(A)$ 。

解题的关键是根据具体问题求出 m 和 n 。

例 1 有同一型号的断路器20台，其中16台是一等品，4台是二等品。现在任取三台，求：(1)三台都是一等品的概率；(2)只有一台是一等品的概率。

解 先分析问题的解法。为了分析简单起见，把题中的数字缩小： $20 \rightarrow 5$ ， $16 \rightarrow 3$ ， $4 \rightarrow 2$ ，三 $\rightarrow$ 二。即“有五台断路器，其中三台是一等品，二台是次品，现在从中任取两台。求：(1)两台都是一等品(A)的概率；(2)一台一等品一台次品(B)的概率。”

我们解题用的公式是： $P(A) = m/n$ ，故问题转化为如何求 m 和 n 。常用的方法有：“枚举法”即举出所有基本事件，数出 n 和 m 。第二种方法是算出 n 和 m 。

(1) 求两台都是一等品的概率。

解① 枚举法 设 A_1, A_2, A_3 分别表示第一、二、三台一等品； B_1, B_2 分别表示第一、二台次品。从五台断路器中任取两台共有以下取法：

I. $A_1 A_2, A_1 A_3, A_1 B_1, A_1 B_2$ II. $A_2 A_3, A_2 B_1, A_2 B_2$ III. $A_3 B_1, A_3 B_2$ IV. $B_1 B_2$
共10种取法，其中有利于事件 A ——两台都是一等品的基本事件共三个。所以

$$n = 10, m = 3. \quad \therefore P(A) = \frac{m}{n} = \frac{3}{10} = 0.3.$$

解② 计算法

$$\begin{aligned} n &= \text{从五台断路器中任取二台的所有取法} \\ &= \text{从五台断路器中任取两台进行组合的总组合数} \\ &= C_5^2 \end{aligned}$$

这 C_5^2 个基本事件是两两互不相容的、等可能的(以后此步不再写出)

$$\begin{aligned} m &= \text{从三台一等品断路器中任取两台的所有取法} \\ &= \text{从三台断路器中任取两台进行组合的总组合数} \\ &= C_3^2 \end{aligned}$$

$$\therefore P(A) = \frac{C_3^2}{C_5^2} = \frac{\frac{3 \times 2}{2!}}{\frac{5 \times 4}{2!}} = \frac{3}{10} = 0.3$$

(2) 求两台断路器中一台一等品一台次品的概率

解① 枚举法 由(1)中的诸组合表示式得 $P(B) = 6/10 = 0.6$

$$\text{解②} \quad P(B) = \frac{C_2^1 \cdot C_3^1}{C_5^2} = \frac{2 \times 3}{10} = 0.6$$

下边解原题。

(1) 设 A ——取出的三台断路器都是一等品。

从20台断路器中任取3台, 共有 C_{20}^3 种取法。 $\therefore n = C_{20}^3$

从16台一等品中任取3台, 共有 C_{16}^3 种取法。 $\therefore m = C_{16}^3$

$$\text{从而 } P(A) = \frac{C_{16}^3}{C_{20}^3} = \frac{\frac{16 \times 15 \times 14}{3!}}{\frac{20 \times 19 \times 18}{3!}} = \frac{28}{57} = 0.4912$$

(2) 设 B ——取出的3台断路器中只有一台一等品。 $n = C_{20}^3$

$m = C_{16}^1 \cdot C_4^2$ ——从16台一等品中取一台, 同时从4台二等品中取2台的取法总效。

$$\therefore P(B) = \frac{C_{16}^1 \cdot C_4^2}{C_{20}^3} = \frac{16 \times \frac{4 \times 3}{2!}}{\frac{20 \times 19 \times 18}{3!}} = \frac{16}{190} = 0.0842$$

问题: 1. 上题中只有一台二等品的概率怎么求?

2. 三台都是二等品的概率怎么求?

3. 若断路器的台数为 N , 其中二等品的台数为 M , 从中任取 $n \leq M$ 台, 求有 m 台二等品的概率是多少?

(二) 加法定理

一、定理: 两个互不相容事件和的概率, 等于这两个事件的概率之和。

$$P(A+B) = P(A) + P(B) \quad (1.2.2)$$

证: 仅就概率的古典定义证明此定理。设试验的基本事件的总数是 n , 其中 m_1 个有利于 A , m_2 个有利于 B 。因 A 和 B 互不相容, 故有利于 A 的基本事件与有利于 B 的基本事件中沒有共同的。所以有利于 $A+B$ 的事件为 $m_1 + m_2$ 个。

$$\therefore P(A+B) = \frac{m_1 + m_2}{n} = \frac{m_1}{n} + \frac{m_2}{n} = P(A) + P(B) \quad \langle \text{证毕} \rangle$$

推广: 若 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 互不相容, 则

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) = \sum_{i=1}^n P(A_i) \quad (1.2.3)$$

$$\text{推论} \quad P(\bar{A}) = 1 - P(A) \quad (1.2.4)$$

证: 由于 $A + \bar{A} = U$ $P(A + \bar{A}) = P(U)$ $P(A) + P(\bar{A}) = 1$
所以 $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

二、一般加法公式

定理: 设 A, B 是任意两个事件, 则

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB) \quad (1.2.5)$$

(1.2.5) 的几何意义如图 1—10 所示, 其证明可以利用事件间关系进行。

证 由图 1—10 可见 $A+B = A+B\bar{A}$, A 和 $B\bar{A}$ 不相容,

$$\therefore P(A+B) = P(A) + P(B\bar{A})$$

又: $B = B(A+\bar{A}) = BA+B\bar{A}$, BA 和 $B\bar{A}$ 不相容,

$$\therefore P(B) = P(BA) + P(B\bar{A}).$$

即 $P(B\bar{A}) = P(B) - P(AB)$

从而 $P(AB) = P(A) + P(B) - P(A+B)$ <证毕>

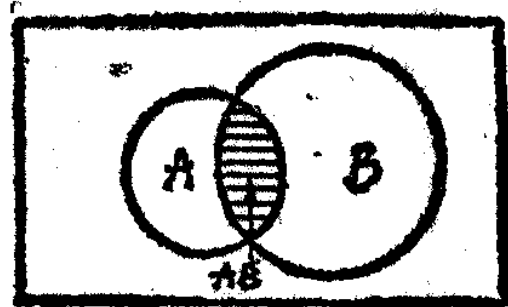


图 1—10

$$\text{一般地} \quad P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(A_i A_j)$$

$$+ \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} P(A_i A_j A_k) + \dots + (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \dots A_n) \quad (1.2.6)$$

例 2 我机去轰炸敌人仓库。已知一枚炸弹只能命中三个仓库之一, 而投一枚炸弹命中第一、二、三仓库的概率分别为 0.01、0.008、0.025。问投一枚炸弹命中敌人仓库的概率。

解 设: A ——投一枚炸弹, 命中敌人仓库; A_1 ——命中第一仓库;

A_2 ——命中第二仓库;

A_3 ——命中第三仓库。

$\therefore A = A_1 + A_2 + A_3$ 而且 A_1, A_2, A_3 互不相容,

$$\therefore P(A) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = 0.01 + 0.008 + 0.025 = 0.043$$

答: 命中敌人仓库的概率 $P(A) = 0.043$ 。

(三) 乘法定理

在公式 (1.2.5) 中 $P(AB)$ 怎么求? 还有很多实际问题, 要求事件乘积的概率。这类问题由概率乘法定理解决。

一、条件概率: 平时我们常说雨天比晴天线路发生事故的可能性大, 就是在雨天这个条件下, 线路发生事故的概率比在晴天的条件下线路发生事故的概率大。设事件 B 表示雨天, A 表示某线路发生事故, 在雨天的条件下, 某线路发生事故的概率用 $P(A|B)$ 表示, 叫做 B 发生的条件下 A 发生的概率, 简称事件 A 关于事件 B 的条件概率。

定义: 设 $P(B) > 0$, 则在事件 B 发生的条件下, 事件 A 发生的概率, 叫做事件 A 关于事件 B 的条件概率, 简称 A 的条件概率。记作 $P(A|B)$ 。

例如 $P(A|BC)$ 表示在 B, C 发生的条件下, 事件 A 发生的概率, 这里设 $P(BC) > 0$ 。

例 8 在本节例 1 中, 若从所给 20 台断路器中任取三次, 每次只取一台断路器 (不放回), 设 A_1, A_2, A_3 分别表示第一, 第二, 第三次取到一等品, 求

(1) 第一次取到一等品的概率;

(2) 第一次取到一等品后第二次取到一等品的概率;

(3) 第一、第二次取到一等品后第三次取到一等品的概率;

(4) 求出 $P(A_2)$ 与 (2) 的结果进行比较。

解: (1) 20 台断路器中有 16 台是好的。 $\therefore P(A_1) = 16/20$

(2) 第一次取到一等品后, 余下的 19 台断路器中还有 15 台一等品,

$$\therefore P(A_2|A_1) = 15/19$$

(3) 同理

$$P(A_3|A_1 A_2) = 14/18$$

$$(4) A_2 = A_2(A_1 + \bar{A}_1) = A_1 A_2 + \bar{A}_1 A_2, \quad \text{且 } (A_1 A_2) \cdot (\bar{A}_1 A_2) = \emptyset,$$

即 $A_1 A_2$ 和 $\bar{A}_1 A_2$ 不相容。 又

$A_1 A_2$ 相当于从20台断路器中任取两台，两台都是一等品；从20台断路器中任取两台，取得一台一等品一台次品(B)，等于 $\bar{A}_1 A_2 + A_1 \bar{A}_2$ 而且 $\bar{A}_1 A_2$ 和 $A_1 \bar{A}_2$ 是等可能的。

$$\text{故有} \quad P(A_1 A_2) = \frac{C_{16}^2}{C_{20}^2} = \frac{\frac{16 \times 15}{2!}}{\frac{20 \times 19}{2!}} = \frac{16 \times 15}{20 \times 19}$$

$$P(\bar{A}_1 A_2) = \frac{1}{2} \frac{C_{16}^1 \cdot C_4^1}{C_{20}^2} = \frac{1}{2} \frac{16 \times 4}{\frac{20 \times 19}{2!}} = \frac{16 \times 4}{20 \times 19}$$

$$P(A_2) = P(A_1 A_2 + \bar{A}_1 A_2) = P(A_1 A_2) + P(\bar{A}_1 A_2)$$

$$= \frac{16 \times 15}{20 \times 19} + \frac{16 \times 4}{20 \times 19} = \frac{16(15 + 4)}{20 \times 19} = \frac{16}{20} = \frac{15}{19} = P(A_2|A_1)$$

即

$$P(A_2|A_1) = P(A_2)$$

二、事件的互相独立：这里不打算指出它的严格的数学定义，因为这种定义不便应用。

若事件 B 的发生与否不影响事件 A 发生的概率，同时 A 的发生与否也不影响 B 发生的概率，则称事件 A 和 B 是互相独立的。

在实际应用中，我们就是根据上述概念对事件之间的实质关系进行分析，确定事件之间是否独立的。在可靠性中把网络元件的故障都看作独立的。若通过分析判定事件 A 和 B 互相独立，其概率又不为 0，则必有

$$\begin{cases} P(B|A) = P(B) \\ P(A|B) = P(A) \end{cases} \quad (1.2.7)$$

三、乘法定理

定理：事件 A 与 B 乘积的概率，等于其中一个事件的概率与另一事件在此事件发生的条件下的条件概率之积：

$$P(AB) = P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B) \quad (1.2.8)$$

证 仅就概率的古典定义证明如下：设

n ——基本事件总数；

m_1 ——有利于事件 A 的基本事件数；

m_2 ——有利于事件 B 的基本事件数；

m ——有利于事件 AB 的基本事件数。

必有： $m \leq m_1, m \leq m_2$ 。

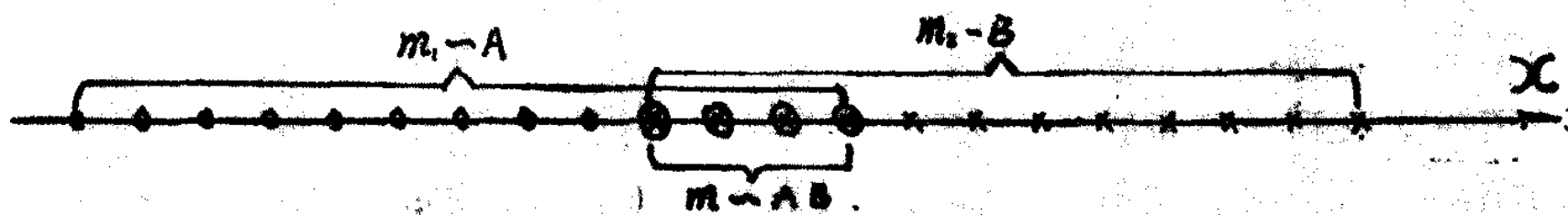


图1-11

如图 1-11 所示，在 A 发生的条件下，对 B 有利的基本事件为 m 。而这 m 个事件是属于 A 的，它是 m_1 个基本事件中的 m 个。

$$\therefore P(B|A) = \frac{m}{m_1} = \frac{\frac{m}{n}}{\frac{m_1}{n}} = \frac{P(AB)}{P(A)} \quad P(AB) = P(A)P(B|A)$$

注意，在证明中要求 $P(A) \neq 0$ 。

同理可证 $P(AB) = P(B)P(A|B)$ 。

推广 $P(A_1 A_2 \cdots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1) \cdots P(A_n|A_1 \cdots A_{n-1})$ (1.2.9)

特例：设 A, B 互相独立，若 $P(A)P(B) > 0$ ，则 $P(A|B) = P(A), P(B|A) = P(B)$ ，从而

$$P(AB) = P(A)P(B) \quad (1.2.10)$$

又 $P(A)P(B) = 0$ 时，上式也成立。一般用 (1.2.10) 式定义 A 与 B 独立。

设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 互相独立，则

$$P(A_1 A_2 \cdots A_n) = P(A_1)P(A_2) \cdots P(A_n) \quad (1.2.10)'$$

例 4：由于电压升高一倍，使图 1—12 中的三个串联元件发生故障的概率分别为 0.3、0.4 及 0.6。在这种条件下，求：

(1) 线路不发生故障的概率；

(2) 线路发生故障的概率。



图 1—12

解：(1) 设 A_1, A_2, A_3 分别表示线路元件 A 、

B 及 C 不发生故障，则线路不发生故障 $S = A_1 A_2 A_3$

$$P(S) = P(A_1 A_2 A_3)$$

$$= P(A_1)P(A_2)P(A_3) \quad (\because A_1, A_2, A_3 \text{ 互相独立})$$

$$= (1 - 0.3)(1 - 0.4)(1 - 0.6) = 0.7 \times 0.6 \times 0.4 = 0.168$$

答：线路不发生故障的概率 = 0.168

(2) 线路发生故障的概率 $P(\bar{S})$

$$\text{解① } P(\bar{S}) = 1 - P(S) = 1 - 0.168 = 0.832$$

$$\text{解② } P(\bar{S}) = P(\bar{A}_1 + \bar{A}_2 + \bar{A}_3)$$

$$= P(\bar{A}_1) + P(\bar{A}_2) + P(\bar{A}_3) - [P(\bar{A}_1 \bar{A}_2) + P(\bar{A}_1 \bar{A}_3) + P(\bar{A}_2 \bar{A}_3)] + P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3)$$

$$= (0.3 + 0.4 + 0.6) - (0.3 \times 0.4 + 0.3 \times 0.6 + 0.4 \times 0.6) + 0.3 \times 0.4 \times 0.6$$

$$= 1.3 - 0.54 + 0.072 = 0.832$$

答：线路发生故障的概率为 0.832。

问题：在 (2) 中，解①简单，还是解②简单？

例 5：某种设备，由甲乙两厂生产。甲厂生产总产品的 70%，乙厂生产总产品的 30%。甲厂的产品中 90% 是一等品，乙厂的产品中 80% 是一等品，某用户任买 100 件该产品，问从中任取一件，它是甲厂生产的一等品的概率是多少？

解 设： A ——取到的这件产品是一等品。

B ——取到的这件产品是甲厂生产的。

$M = AB$ ——取到的这件产品是甲厂生产的一等品。

因为 100 是一个较大的数，故可设这 100 件产品中的各种比例和总产品中一样。

解① $P(M) = P(B)P(A|B) = 0.7 \times 0.9 = 0.63$ 。

解② 基本事件总个数 $n = 100$

有利于 A 的基本事件个数 = 100 个产品中的一等品总个数 m

$$m \stackrel{?}{=} 100(0.70 \times 0.90 + 0.3 \times 0.80) \quad (\text{自己说明“?”为等号的意义!}) \\ = 63 + 24 = 87(\text{件})。$$

其中 63 件由甲厂生产, 24 件由乙厂生产。

$$P(M) = P(A)P(B|A)$$

$$P(A) = 87/100, P(B|A) = 63/87 = 0.724. \therefore P(M) = 0.87 \times 0.724 = 0.62988$$

(四) 应用举例

一、简单网络的可靠性计算

例 6 在第一节例 5 所讨论的问题中, 设元件 A 、 B 、 C 在时间 T 内完好的概率分别为 p_1 、 p_2 、 p_3 , 求: (1) 系统故障的概率 $P(\bar{S})$; (2) 系统完好的概率 $P(S)$ 。

解(1) 由第一节例 7 的解中得 $\bar{S} = \bar{A}\bar{B}\bar{C}$, 故

$$P(\bar{S}) = P(\bar{A}\bar{B}\bar{C}) = P(\bar{A})P(\bar{B})P(\bar{C}) = (1-p_1)(1-p_2)(1-p_3) \\ = 1 - p_1 - p_2 - p_3 + p_1p_2 + p_1p_3 + p_2p_3 - p_1p_2p_3$$

$$(2) \textcircled{1} S = ABC + AB\bar{C} + A\bar{B}C + \bar{A}BC + \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}B\bar{C} + A\bar{B}\bar{C}$$

$\therefore P(S) = P(ABC + AB\bar{C} + A\bar{B}C + \bar{A}BC + \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}B\bar{C} + A\bar{B}\bar{C})$ (各事件不相容)

$$= P(ABC) + P(AB\bar{C}) + P(A\bar{B}C) + P(\bar{A}BC) + P(\bar{A}\bar{B}C) + P(\bar{A}B\bar{C}) + P(A\bar{B}\bar{C})$$

(A 、 B 、 C 独立可以证明 $\bar{A}$ 、 $\bar{B}$ 、 $\bar{C}$ 也独立)

$$= P(A)P(B)P(C) + P(A)P(B)P(\bar{C}) + P(\bar{A})P(\bar{B})P(C) + \dots + P(A)P(\bar{B})P(\bar{C})$$

$$= p_1p_2p_3 + p_1p_2(1-p_3) + p_1p_3(1-p_2) + p_2p_3(1-p_1) + p_3(1-p_1)(1-p_2) \\ + p_2(1-p_1)(1-p_3) + p_1(1-p_2)(1-p_3)$$

$$= p_1p_2p_3 - p_1p_2 - p_1p_3 - p_2p_3 + p_1 + p_2 + p_3$$

$$\textcircled{2} S = ABC + AB + AC + BC + A + B + C = A + B + C, \text{ 由}(1 \cdot 2 \cdot 6)\text{知}$$

$$P(S) = P(A) + P(B) + P(C) - [P(AB) + P(AC) + P(BC)] + P(ABC)$$

$$= p_1 + p_2 + p_3 - [p_1p_2 + p_1p_3 + p_2p_3] + p_1p_2p_3$$

$$\textcircled{3} \text{已知 } P(S) = 1 - P(\bar{S})$$

$$P(S) = 1 - (1 - p_1 - p_2 - p_3 + p_1p_2 + p_1p_3 + p_2p_3 - p_1p_2p_3)$$

$$= p_1 + p_2 + p_3 - p_1p_2 - p_1p_3 - p_2p_3 + p_1p_2p_3$$

由以上三种解法可以看出, 解决一个问题采用的方法不同, 工作量也不一样。一般, 当事件 A 的表示式比 $\bar{A}$ 复杂时, 利用 $P(A) = 1 - P(\bar{A})$ 求 $P(A)$ 常常是简单的。

例 7: 由五个元件所组成的一个系统如图 1-13 所示。在 T 时间内各元件发生故障是独立的, 其概率如下表所示:

元 件	K_1	K_2	l_1	l_2	l_3
概 率	0.6	0.5	0.4	0.7	0.9

求在 T 时间内:

