●湖南教育增刊●

初中教师《专业合格证书》

考核教材辅导材料

数学自测试题及答案

《人民教育》编辑部编

初中教师《专业合格证书》考核教材辅导材料

数学自测试题及答案

《人民教育》编辑部编

初中教师《专业合格证书》考核教材辅导材料
数学自测试题及答案

*

编　　辑：人　民　教　育　编　辑　部
出版发行：湖　南　教　育　杂　志　社
印　　刷：中国人民解放军国防科技大学印刷厂

*

787×1092毫米　32开本　印张：12.125　286千字
1987年6月第1版　1987年6月长沙第1次印刷
印数　000 001—50 000

前　　言

为了配合国家教育委员会对不具备合格学历的中小学教师实行《专业合格证书》考核制度的实施，帮助不具备合格学历的初中教师学习和掌握与其所教学科相关科目的基础知识，在国家教委师范教育司的支持下，《人民教育》杂志编辑部编辑了一套与初中教师《专业合格证书》考核教材相适应的“初中教师自测试题及答案”，供参加《专业合格证书》考试的初中教师学习。

《人民教育》杂志从1987年4月开始，连续刊载各科自测试题，由于杂志篇幅所限，不能刊登答案。现应广大读者要求，将自测试题与答案汇编在一起，按学科分册出单行本。

本册汇编了数学的自测试题与参考答案，其中包括《解析几何》《数学分析》和《高等代数》三门学科。这套自测试题和参考答案由参加编写《专业合格证书》考核教材的北京教育学院、北京师范学院，北京师范大学的一些同志编写。高等教育出版社数学编辑室的部分同志进行了审核和校勘。在此，谨向以上各单位的同志表示感谢。

湖南教育杂志社受我们的委托，承担了出版、发行的工作，谨向该社致谢。

《人民教育》杂志编辑部

1987年4月

目　　录

解析几何自测试题

平面解析几何……1
直线……1
二次曲线……2
参数方程……5
极坐标方程……6
空间解析几何……7
向量代数……7
平面……9
直线……10
特殊曲面……13
二次曲面……16

解析几何自测试题参考答案

平面解析几何……19
直线……19
二次曲线……26
参数方程……44
极坐标方程……50
空间解析几何……56
向量代数……56
平面……61
直线……67
特殊曲面……80
二次曲面……86

数学分析自测试题

函数……95
极限……97
连续函数……101
导数与微分……102
中值定理与泰勒公式……104
利用导数研究函数……105
不定积分……106
定积分……108
定积分的应用……111
数项级数……112
函数项级数……116
幂级数……118
多元函数及其连续性……119
多元函数微分学……122
重积分……126
微分方程简介……129

数学分析自测试题参考答案

函数……131
极限……134
连续函数……151
导数与微分……153
中值定理与泰勒公式……162
利用导数研究函数……166
不定积分……172
定积分……177
定积分的应用……187

数项级数…… 191
函数项级数…… 204
幂级数…… 211
多元函数及其连续性…… 218
多元函数微分学…… 223
重积分…… 243
微分方程简介…… 254
高等代数自测试题
数的基础知识…… 262
多项式…… 263
行列式…… 265
线性方程组…… 268
矩阵…… 272
二次型…… 277
向量空间…… 280
线性变换…… 282
欧氏空间…… 287
高等代数自测试题参考答案
数的基础知识…… 290
多项式…… 296
行列式…… 304
线性方程组…… 312
矩阵…… 323
二次型…… 341
向量空间…… 364
线性变换…… 367
欧氏空间…… 374

解析几何自测试题

平面解析几何

一 直 线

1. 直线过点$(6,-2)$，且与两坐标轴围成的直角三角形面积为3个面积单位，求这直线的方程。

2. 根据下列条件写出直线方程，并化成$Ax+By+C=0$的形式：

① 在x轴和y轴上的截距分别是$3/2$和-3.

② 经过点$P(0,2)$，倾斜角的正弦等于$4/5$.

③ 经过点$(1,-4)$，和斜率是$2/5$的直线垂直.

④ 经过点$(4,2)$，平行于直线$2x-7y=0$.

3. 按照下列条件，计算各点关于各直线的离差δ和距离d：①$A(2,-1)$，$4x+3y+10=0$. ②$B(0,-3)$，$5x-12y-23=0$.

4. 试判定点$M(1,-3)$和坐标原点在下列各直线的同侧或异侧：

① $2x-y+5=0$.　　② $x-3y-5=0$.

5. 三角形的边的方程为$5x-2y+6=0$，$4x-y+3=0$和$x+3y-7=0$. 不求三角形顶点的坐标，写出经过这些顶点与其对边平行的直线方程.

6. 求过两直线$2x+y+1=0$和$x-3y-10=0$的交点，且在两个坐标轴上截取等长线段的直线.

7. 过点(1,2)引一直线，使与点(2,3)和(4，-5)的距离相等．求此直线方程.

8. 设直线的倾斜角是135°，原点到它的距离是$3\sqrt{2}$，求它的方程.

9. 如果直线方程$Ax+By+C=0$的系数A、B、C之间有下列关系，求证所得的直线系中的每一条直线都经过同一点，并求出这点的坐标：

① $A=C$.　　　　② $A+B+C=0$.

10. 正方形的一个顶点在原点，它的一边的倾角为α，边长等于a，求这个正方形的各边所在的直线方程.

二　二次曲线

1. 椭圆$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$的一对共轭直径中有一条通过点(4，2)，求它们的方程.

2. 给定椭圆$\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{5}=1$，通过点(1,1).试引一弦,使它在这点被平分.

3. 证明在椭圆的一条直径两端的切线互相平行，并且也平行于它的共轭直径.

4. PQ是椭圆的一条直径，M是椭圆上任一点，求证有一对共轭直径分别平行于PM与QM.

5. 求双曲线$\frac{x^2}{15}-\frac{y^2}{6}=1$在点(5,2)的切线方程.

6. 证明双曲线的两条渐近线与其任一点的切线所围成的三角形面积是个常数.

7. 抛物线 $y^2=6x$ 中，求弦的方程，使得这弦通过点

(4,1)，并且被这点所平分。

8． 抛物线 $y^2=8x$ 的一组平行弦和它们的直径成45°，求这条直径的方程。

9． 抛物线$y^2=8x$上有一点(2,4)，求通过这点的切线方程。

10．求抛物线 $y^2=4x$ 的切线方程，使这条切线通过已知点(3，-4)。

11．求抛物线 $y^2=4x$ 的切线方程，使这条切线具有斜率1/2.

12．α 为何值时，直线 $y=\mathrm{tg}\alpha(1+x)$ 与双曲线 $-x^2+y\cos^2\alpha=1$相切，并求出切点的坐标.

13．求过点 $M(-2,-1)$与椭圆 $x^2+\frac{y^2}{5}=1$ 相切的直线方程.

14．求抛物线$y^2=5x$与圆$9x^2+9y^2=16$的公切线.

15．设椭圆$\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$ 的切线平行于直线 $6x-2y-5=0$，求这些切线方程.

16．求以曲线 $2x^2+y^2-4x-10=0$和$y^2=2x-2$ 的交点与原点的连线为渐近线，且实轴在 x 轴上，实轴长为12的双曲线的方程.

17．若以(3，-2)为新原点平移坐标轴，试求方程$x^2+y^2-6x+4y-12=0$所表示的曲线在新坐标系下的方程.

18．若以(2,0)为新原点平移坐标轴，试求方程 $y^2-4x+8=0$所表示的图形在新坐标系下的方程.

19．若以(1,2)为新原点平移坐标轴，试求方程$x^2+4y^2-2x-16y+1=0$ 所表示的图形在新坐标系下的方程.

20．把坐标系旋转 $\pi/4$，求曲线 $x^2-y^2=0$ 在新坐标系下的方程．

21．若旋转角 $\alpha=45°$，试求方程 $x^2-2xy+y^2-\frac{8}{\sqrt{2}}x-\frac{8}{\sqrt{2}}y=0$所表示的曲线在新坐标系下的方程．

22．利用转轴化简方程$2x^2+4xy+5y^2-22=0$．

23．利用坐标变换，化简方程 $5x^2+12xy-22x-12y-19=0$．

24．利用坐标变换，化简方程$x^2+2xy+y^2+3x+y=0$．

25．求下列二次曲线的中心：

① $x^2-2xy+2y^2-4x-6y+3=0$．

② $3x^2-2xy+3y^2+4x+4y-4=0$．

③ $2x^2-3xy-y^2+3x+2y=0$．

④ $x^2-2xy+y^2-4x-6y+3=0$．

26．先证明下列两曲线 $3x^2-7xy-6y^2+3x-9y+5=0$ 与 $3x^2-5xy+6y^2+11x-17y+13=0$是中心型曲线，再证明直线 $7x+y+6=0$过它们的中心．

27．求下列曲线的全部不变量：

① $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$．　② $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$．

③ $y^2=2px$

28．利用不变量判定下列二次曲线的图形：

① $x^2+6xy+y^2+6x+2y+1=0$．

② $3x^2-2xy+y^2+4x+4y-4=0$．

③ $x^2-4xy+3y^2+2x-2y=0$．

④ $2y^2+8x+12y-3=0$．

29. 在曲线方程$x^2+6xy+ay^2+3x+by-4=0$中，a与b取什么值时，曲线是①有心曲线，②抛物型曲线，③抛物线，④一对平行直线，并写出这两直线的方程.

30. 不作坐标变换，证明方程$8x^2+4xy+5y^2+16x+4y-28=0$表示椭圆，并求半轴的长.

31. 不作坐标变换，证明方程$4x^2+24xy+11y^2+64x+42y+51=0$表示双曲线，并求半轴的长.

32. 不作坐标变换，证明方程$x^2-2xy+y^2+6x-14y+29=0$表示抛物线，并求它的焦参数.

三　参数方程

1. 消去下列各方程的参数：

① $\begin{cases} x=2pt^2, \\ y=2pt, \end{cases}$（$t$ 为参数）.

② $\begin{cases} x=2\cos\varphi, \\ y=3\sec\varphi, \end{cases}$（$\varphi$ 为参数）.

③ $\begin{cases} x=3\sec\theta, \\ y=4\operatorname{tg}\theta, \end{cases}$（$\theta$ 为参数）.

④ $\begin{cases} x=x_1+\rho\cos\varphi, \\ y=y_1+\rho\sin\varphi, \end{cases}$（$\rho$ 为参数）.

2. 根据所给的条件，把下面的方程化成参数方程（θ，t 是参数），并描出它的图象：

① $4x^2+y^2=16$，设 $x=2\cos\theta$.

② $y^2=4x$，设$x=4t^2$.

③ $xy=k$，设$y=k\operatorname{tg}\theta$.

④ $4x^2-y^2=4$，设$x=ty-1$.

3. 设动点在 xoy 平面上沿一直线作匀速运动，开始一秒

后它从点(1,2)移动到点(2,1)，求 t 秒钟后动点(x,y)的参数方程.

4. 已知直线 l 经过点$p_0(1,-5)$，倾斜角 $\alpha=\pi/3$，

① 写出直线 l 的参数方程.

② 利用直线 l 的参数方程，求直线 l 和圆$x^2+y^2=16$的两个交点 A，B 到 P_0的距离之积.

5. 一个三角形的底边为$2a$，高为 h，求它的垂心的轨迹的参数方程，并画图.

四 极坐标方程

1. 求与下列各点关于极轴对称的点的极坐标：$\left(-2,\frac{\pi}{4}\right)$.
$\left(2,\ \frac{\pi}{6}\right)$，$\left(3,-\frac{\pi}{3}\right)$，$\left(-4,-\frac{\pi}{3}\right)$.

2. 求与下列各点关于极点对称的点的极坐标：$\left(1,\frac{\pi}{2}\right)$，
$\left(-5,\frac{3}{2}\pi\right)$，$\left(4,\frac{5}{6}\pi\right)$，$\left(-2,\frac{7}{12}\pi\right)$.

3. 化下列各点的极坐标为直角坐标：

$A\left(\sqrt{2},\ \frac{\pi}{4}\right)$，$B\left(2,-\frac{\pi}{6}\right)$，$C\left(-\sqrt{2},\ -\frac{\pi}{4}\right)$，

$D\left(-2,\frac{\pi}{6}\right)$.

4. 化下列各点的直角坐标为极坐标：

$A(3,-2)$，$B(-1,-1)$，$C(3,0)$，$D(0,-3)$.

5. 化下列直角坐标方程为极坐标方程：

① $y+5=0$. ② $x^2-y^2=a^2$.

③ $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$. ④ $y^2=4x$.

6. 将下列极坐标方程化为直角坐标方程：

① $\rho^2\cos2\theta=16$.　　② $\rho=10\sin\theta$.

③ $\rho=a(1-\cos\theta)$.　　④ $\rho=a\sin2\theta$.

7. 已知下列条件，建立它们的极坐标方程：

① 经过点$P(4,\pi/4)$，平行于极轴的直线.

② 圆心在点$(5,\pi)$，半径等于5的圆.

③ 过定圆上的一点O所有弦的中点的轨迹.

8. 动点到两定点的距离的乘积等于两定点间距离的一半的平方，求动点轨迹的极坐标方程.

空间解析几何

一　向量代数

1. 以从一点出发的三个不共面向量$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$为棱作一平行六面体，求这个平行六面体的对角线向量.

2. 设$\vec{a}$，$\vec{b}$为两个不共线的向量，$\overrightarrow{AB}=\vec{a}+2\vec{b}$，$\overrightarrow{BC}=-4\vec{a}-\vec{b}$，$\overrightarrow{CD}=-5\vec{a}-3\vec{b}$，证明四边形$ABCD$是梯形.

3. 已知$\triangle ABC$三个顶点的半径向量为$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$，求$\triangle ABC$的重心M的半径向量.

4. 给定点$A(-1,7,4)$，$B(5,4,-5)$，求线段AB的中点和分线段AB成比$\lambda=2$，$\lambda=-1/4$的点的坐标.

5. 给定两点$(2,-3,-1)$和(a,b,c)，求各点关于①坐标平面；②坐标轴；③坐标原点的对称点的坐标.

6. 已知$\vec{a}=\dfrac{1}{3}(2\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k})$，$\vec{b}=\dfrac{1}{3}(-\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k})$，求$\vec{a}$，$\vec{b}$的方向余弦。

7. 已知$\vec{a}$和$\vec{b}$夹角为$\frac{2}{3}\pi$，且$|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=4$，试求：

① $\vec{a}\cdot\vec{b}$.　　　② $\vec{a}^2$.

③ $(\vec{a}+\vec{b})^2$.　　　④ $(3\vec{a}-2\vec{b})\cdot(\vec{a}+2\vec{b})$.

8. 已知$\vec{a}=\{1,-2,2\}$，$\vec{b}=\{-3,6,2\}$，求：

① $\vec{b}^2$.　　　② $(3\vec{a}+2\vec{b})\cdot(\vec{a}-3\vec{b})$.

③ $\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角.　　　④ $\vec{a}$在$\vec{b}$上的射影.

9. 已知$\vec{R}=(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$，求证$\vec{R}\perp\vec{a}$.

10. 已知向量$\vec{a}=3\vec{i}+\vec{j}+5\vec{k}$，$\vec{b}=\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k}$，试求一向量$\vec{c}$，使该向量与$z$轴垂直，而且满足$\vec{c}\cdot\vec{a}=9$，$\vec{c}\cdot\vec{b}=-4$.

11. 已知向量$\vec{a}=\{2,-3,1\}$，$\vec{b}=\{1,-1,3\}$和$\vec{c}=\{1,-2,0\}$，计算下列各式：

① $(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}-(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}$.

② $(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{b}+\vec{c})$.

③ $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$.

12. 已知三角形的顶点是$A(1,-1,2)$，$B(3,3,1)$和$C(3,1,3)$，求$\triangle ABC$的面积.

13. 已知$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{c}\times\vec{d}$，$\vec{a}\times\vec{c}=\vec{b}\times\vec{d}$，求证$\vec{a}-\vec{d}$与$\vec{b}-\vec{c}$共线.

14. 根据下列条件求$(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$：

① $\vec{a}=\{2,1,1\}$，$\vec{b}=\{3,-1,0\}$，$\vec{c}=\{1,0,-1\}$.

② $\vec{a}=3\vec{i}-2\vec{j}$，$\vec{b}=-\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$，$\vec{c}=2\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}$.

15. 求由$\overrightarrow{AB}=\{4,-2,4\}$，$\overrightarrow{AC}=\{10,2,12\}$和$\overrightarrow{AD}=\{1,2,2\}$所决定的四面体的体积.

16. 试判断下列各组向量是否共面：

① $\vec{a}=\{2,3,-1\}$，$\vec{b}=\{1,-1,3\}$，$\vec{c}=\{1,9,-11\}$.

② $\vec{a}=\{3,-2,1\}$，$\vec{b}=\{2,1,2\}$，$\vec{c}=\{3,-1,-2\}$.

③ $\vec{a}=3\vec{i}+4\vec{j}+5\vec{k}$，$\vec{b}=\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}$，$\vec{c}=9\vec{i}+4\vec{j}+16\vec{k}$.

二 平　　面

1. 试求满足下列条件的平面方程：

① 通过点 $A(2,1,-1)$，法向量 $\vec{N}=\{1,-2,3\}$.

② 通过点 $A(2,-1,2)$，且垂直于直线 AB，其中点 $B(8,-7,5)$.

③ 通过原点，法向量为 $\vec{N}=\{5,1,2\}$.

④ 由原点引该平面的垂线，垂足为 $D(2,9,-6)$.

2. 求通过点 $M_1(2,-1,3)$ 和 $M_2(3,1,2)$ 且平行于向量 $\vec{s}=\{3,-1,-4\}$ 的平面的方程.

3. 求通过 $C(2,-1,1)$ 与 $D(3,1,2)$ 且平行于 y 轴的平面的方程.

4. 确定 l，m 为何值时，下面的两平面互相平行：$2x+ly+3z-5=0$ 和 $mx-6y-6z+2=0$.

5. 确定 l 为何值时，下面的两个平面互相垂直：$5x+y-3z+2=0$ 和 $2x+ly-3z+1=0$.

6. 试作通过坐标原点且垂直于两个平面 $2x+y+3z-1=0$，$x+2y+z=0$ 的平面的方程.

7. 已知平面通过点 $A(1,2,-1)$ 和 $B(-3,2,1)$，并且它的 y 轴上的截距是 3，试求它的方程.

8. 已知平面的法向量 $\vec{N}=\{-2,1,3\}$ 且在 z 轴上的截距为 -5，试求其方程.

9. 将平面方程 $3x+4y-1=0$ 化成法线式.

10. 求点 $A(2,-1,-1)$ 到平面 $16x-12y+15z-4=0$ 的距离.

11. 设动点到原点的距离等于动点到平面 $2x+3y-6z=2$ 的距离的 7 倍，求这点的轨迹方程.

12. 已知两相交平面，它们的方程是π_1：$x-2y-2z-1=0$，π_2：$3x-4y+5=0$。求它们所交成二面角的平分面的方程.

13. 求下列两平面π_1：$2x+3y+6z-12=0$，π_2：$x+2y+2z-7=0$的交角.

14. 通过点$A(0,0,1)$与$B(3,0,0)$作xoy平面夹角为$\pi/3$ 的平面，试求其方程.

15. 在 x 轴上求一点，使它到两平面 π_1：$12x-16y+15z+1=0$，π_2：$2x+2y-z-1=0$ 的距离相等.

16. 求过点$p(a,b,c)$且在 x 轴、 y 轴上的截距分别是 a，b 的平面的方程.

三 直 线

1. 求由下列条件所确定的直线方程：

① 经过点$A(2,0,-3)$，且平行于向量 $\vec{s}=\{2,-3,5\}$.

② 经过点 $A(2,0,-3)$，且平行于直线a，a：$\dfrac{x-1}{5}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z+1}{-1}$.

③ 经过点 $P_0(2,-3,1)$且平行于 y 轴.

④ 经过两点$A(3,-1,2)$和$B(2,1,1)$.

⑤ 经过点$A(1,-2,1)$，且与A，B的连线平行，其中 B 点的坐标为 $B(3,1,-1)$.

2. 求直线a：$\dfrac{x-12}{4}=\dfrac{y-9}{3}=\dfrac{z-1}{1}$ 与平面 $3x+5y-z-2=0$ 交点的坐标.

3. 化下列方程为对称式：