

理科要覽

13.1311/89

代數學

最新修訂本

商務印書館

庫存書

理 科 要 覽

代

江苏工业学院图书馆
藏书章

商務印書館

理科要覽
代數學
(最新修訂本)

出版者 商務印書館香港分館
香港皇后大道中三十五號

印刷者 商務印書館香港印刷廠
香港九龍炮仗街七十五號

* 版權所有 *

1959年9月修訂版 1979年1月重印

前 言

1. 本書編著之主要目的，在適應中學生及具有同等程度者參考之需要，能使讀者以最短之時間，對代數學一科作一次複習。
2. 本書係最新修訂本，將原有上下冊合併為一全冊，並將篇幅放大，內容更為豐富而有興趣。
3. 本書將問題及解答，分列前後二面，使讀者自己演算之後，可以翻閱核對。
4. 本書力求格式統一，以便讀者。

代數學的緒論.....	(1)	應用問題的根的解釋.....	(43)
正頁數.....	(3)	二元一次聯立方程(加減消去法).....	(45)
正頁數加法.....	(5)	二元一次聯立方程(代入消去法).....	(47)
正頁數的減法.....	(7)	三元一次聯立方程.....	(49)
正頁數的乘法.....	(9)	聯立方程應用問題(一).....	(51)
正頁數的除法.....	(11)	聯立方程應用問題(二).....	(53)
正頁數的幾個主要性質.....	(13)	文字方程.....	(55)
關於代數式的基本概念.....	(15)	一元一次方程的討論.....	(57)
代數式的值.....	(17)	一元聯立方程的討論.....	(59)
整式的加法.....	(19)	乘法公式.....	(61)
整式的減法.....	(21)	因式分解(公共因式).....	(63)
括號的展開和添置.....	(23)	因式分解(平方及平方差).....	(65)
整式的乘法(乘式是單項式).....	(25)	因式分解(兩平方差的積).....	(37)
多項式和多項式的乘法.....	(27)	因式分解(二次三項式及立方和差).....	(69)
整式的除法(除式是單項式).....	(29)	因式分解(一般二次三項式).....	(71)
多項式和多項式的除法.....	(31)	剩餘定理的應用.....	(73)
剩餘定理.....	(33)	因式分解(雜題).....	(75)
一元一次方程.....	(35)	最高公因式.....	(77)
一元一次方程(較複雜的).....	(37)	最低公倍式.....	(79)
一元方程應用問題(一).....	(39)	分式和它的基本性質.....	(81)
一元方程應用問題(二).....	(41)	分式的加減.....	(83)

分式的加減(特殊方法).....	(85)	反比例和它的圖象.....	(127)
分式的乘除.....	(87)	直線函數和它的圖象.....	(129)
繁分式.....	(89)	一元二次方程.....	(131)
繁分式的積.....	(91)	一元二次方程(精複雜的).....	(133)
分式方程.....	(93)	一元二次方程應用問題.....	(135)
分式聯立方程.....	(95)	一元二次方程應用問題(續).....	(137)
有補充條件的應用問題.....	(97)	一元二次方程的討論.....	(139)
乘方和開方.....	(99)	有補充條件的二次方程.....	(141)
數的開平方.....	(101)	一元二次方程的根和係數的關係(韋達定理).....	(143)
根式.....	(103)	已知二根作方程.....	(145)
根式的化簡.....	(105)	二次三項式的因式分解.....	(147)
同類根式和同次根式.....	(107)	求極大極小值.....	(149)
化去分母的根號.....	(109)	函數 $y = x^2$ 的圖象.....	(151)
一般指數.....	(111)	函數 $y = a(x + m)^2$ 的圖象.....	(153)
多項式的開平方.....	(113)	二次三項式的圖象.....	(155)
複數.....	(115)	二次方程的圖解法.....	(157)
二重根號的化簡.....	(117)	一元高次方程(一).....	(159)
不等式.....	(119)	一元高次方程(二).....	(161)
函數的三種表示法.....	(121)	一元高次方程(三).....	(163)
坐標法.....	(123)	無理方程(消根法).....	(165)
正比例和它的圖象.....	(125)	無理方程(代替法).....	(167)

一次和二元的二元聯立方程.....	(169)	綜合除法.....	(211)
二次和二元的同次聯立方程.....	(171)	求方程的有理根.....	(213)
二次和二元的對稱聯立方程.....	(173)	代數方程的幾個性質.....	(215)
雜二元二次聯立方程.....	(175)	選排列.....	(217)
二元高次聯立方程.....	(177)	全排列.....	(219)
多元高次聯立方程.....	(179)	組合.....	(221)
二次聯立方程應用問題(一).....	(181)	組合公式的另一形式.....	(223)
二次聯立方程應用問題(二).....	(183)	僅第二項不同的二項式的連乘積.....	(225)
二元一次不定方程.....	(185)	二項式定理.....	(227)
三元一次聯立不定方程.....	(187)	二項展開式的性質.....	(229)
等差級數.....	(189)	二項式定理的應用.....	(231)
等比級數.....	(191)	二次三項式的標準形式.....	(233)
無窮遞降等比級數.....	(193)	二次三項式的符號.....	(235)
調和級數.....	(195)	二次不等式.....	(237)
求其他級數的和.....	(197)	二次不等式(比較複雜的).....	(239)
數列的概念.....	(199)		
極限的概念.....	(201)		
對數.....	(203)		
指數方程.....	(205)		
複利公式.....	(207)		
未定係數法.....	(209)		

說 明	問 題
〔文字的使用〕爲了更好的研究數和數中間的關係，代數學上一般是用代數符號(文字)來代表數的。例如“乘數的位置互換，其積不變”這是適合任何數的事實，假使用文字 a 和 b 分別代表兩個乘數，我們就可以寫成 $a \times b = b \times a \text{ 或 } ab = ba.$	(1) 正方形的一邊等於 a 公尺，問它的周長和積應如何表示？ (2) 某種貨物每個價值 b 元，問 a 元可買幾個？
〔代數式〕把數字和文字用運算符號連接起來的式子，叫做代數式。爲了方便，代數式常常簡稱做“式”或“式子”。例如 $a \times p\%$; $2x+1$; $\dots\dots$ 都是代數式。 〔等式〕用等號“$=$”來表示兩個代數式相等的式子，叫做等式。例如 $3x-8=7 \text{ 等等。}$	(3) 從 a 的五倍中間減去 b、c 的和的三倍，問所得的餘數應當如何表示？ (4) 如果 x 是 12，那末 $(x+5)(x-1)$ 代表什麼數？
〔公式〕用文字和運算符號來表示數和數中間的某種一定關係的等式或不等式，我們把它叫做公式。例如底是 b，高是 h 的矩形的面積 s 的計算公式是 $s=bh$。 〔運算符號〕$+$、$-$、$\times$、$\div$ 等表示運算的符號，叫做運算符號。但是(1)在兩個文字相乘數中間或其中一個是文字時，乘號可以不寫。例如 $a \times b$ 或 $a \cdot b$ 可以寫成 ab； (2) $a \div (x+y)$ 通常寫成 $\frac{a}{x+y}$；(3)用 a^1 來代替 $a \times a \times a \times a$ 的麻煩寫法，右上角的 4 叫指數；(4)乘積中的數字因數，一定要寫在前面。例如 a^3bx 應寫成 $3a^3bx$。	(5) 甲數的 $\frac{1}{2}$，和乙數的 $\frac{1}{3}$ 的和等於兩數的和的 $\frac{1}{6}$，試用式子來表示。 (6) 化簡 $18-8 \times 2 \div 4+7 \times 3-6 \div 2$。 (7) 混合兩種茶，第一種茶取 a 斤，第二種茶取 b 斤，第一種茶每斤價 m 元，第二種每斤價 n 元，問每斤混合茶的價值應如何表示？
〔運算順序〕(1)有括號的，括號內的先行計算。 (2)沒有括號的，首先乘方、開方，然後再乘除，最後是加減。	

解

答

(1) 正方形的周長 $= a + a + a + a = 4a$,

正方形的面積是 $a \times a = a^2$.

(2) a 元可買貨物 $a \div b = \frac{a}{b}$ 個.

(3) a 的五倍是 $5a$, 但是在代數中我們常常寫成 $5a$, 同樣 b, c 的和的三倍寫成 $3(b+c)$, 所得餘數是 $5a-3(b+c)$.

(4) $(x+5)(x-1) = (12+5)(12-1)$

$$= 17 \times 11 = 187.$$

(5) 用 a 代表甲數, 用 b 代表乙數, 那末甲數的一半是 $\frac{a}{2}$, 乙

的一半是數 $\frac{b}{2}$, 它們的和是 $\frac{a}{2} + \frac{b}{2}$, 又甲、乙兩數的和是

$(a+b)$, 這個數的一半是 $\frac{1}{2}(a+b)$ 或者 $\frac{a+b}{2}$, 這個事

實用式子來表示就得:

$$\frac{a}{2} + \frac{b}{2} = \frac{a+b}{2}.$$

(6) $18-8 \times 2 \div 4 + 7 \times 3 - 6 \div 2$

$$= 18 - 16 \div 4 + 21 - 3 = 18 - 4 + 21 - 3$$

$$= 39 - 7 = 32.$$

(7) 第一種茶每斤價 m 元, 所以 a 斤的總價是 am 元, 同樣第二

種茶 b 斤的總價是 bm 元, 所以二種茶的總價是:

$(am+bm)$ 元, 但是這兩種茶混合以後共有 $(a+b)$ 斤, 因

此這種混合茶, 它每斤的價應當是:

$$\left(\frac{am+bm}{a+b} \right) \text{ 元.}$$

說 明	問 題
〔正負數〕 代數學中的數，和算術的數不同，它不但能夠表示出數值的大小，並且還能夠指出它的性質。例如我們說快車離開瀋陽站 100 里，還不能說明火車的位置，必須說快車在瀋陽向大連的方向離開 100 里，或者說快車在瀋陽向長春的方向離開 100 里。如果前一種情形用“+100 里”表示，後一種就用“-100 里”來表示，總之就某種意義把數量用“+”號表示，和它有相反性質的就要在它前面寫上“-”號，所以某數字有“+”號時便叫做<u>正數</u>，如果數的前面有“-”號就叫做<u>負數</u>。例如 $+10$，$+\frac{1}{2}$，$+0.3$……都是正數，而 -8，$-\frac{5}{7}$，-3.25，……都是負數，但是零(0)不算正數也不算負數。 〔正負數的應用〕 具有相反意義的數量，都可用正負數來把它們表示。 例如 (1) 收入用正數表示，支出用負數表示。 (2) 盈餘用正數表示，虧損用負數表示。 (3) 財產用正數表示，負債用負數表示等等。 〔絕對值〕 正負數的絕對值，就是去掉符號的數值，例如 (-10) 的絕對值是 10，但是 $(+10)$ 的絕對值還是 10。 〔數的大小〕 數的次序，依照從小到大來排列就得 ……-3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, …… (注意) 所有正數都大於零，所有負數都小於零。	(1) 收入 -50 元是何種意義？ (2) 有財產 -100 元是何種意義？ (3) 後退 -200 米的意義怎樣？ (4) 在某一點的東面 -4 尺的意義怎樣？ (5) 一隻手表慢 3 分鐘，是否可成就幾分鐘？ (6) 說出下面各個數的絕對值： -6, $+9$, $-1\frac{1}{2}$, -0.3. (7) 寫出 +5 和 -5 中間的所有整數。 (8) 把下面的，依照從大到小的方向來排列： $+3$, -8, -5, $+\frac{1}{3}$, $-1\frac{1}{2}$. (9) 比 -10 大 2 的數是什麼？ 比 -10 小 3 的數又是什麼？ (10) 第一天溫度計指 40 度，第二天比第一天上升 -2 度，問第二天溫度計指幾度？

正負數的解答

解	答
(1) 因為收入的相反意義是支出，所以收入 -50 元就是支出 50 元。	(8) 因為正數都比 0 大，負數都比 0 小，所以正數總是比負數大，因此 $+3$ 和 $+\frac{1}{3}$ 必定比 -8 、 -5 和 $-1\frac{1}{2}$ 都大。在正
(2) 有財產 -100 元就是負債 100 元。	數裏面，絕對值大的就大，因此 $+3$ 比 $+\frac{1}{3}$ 大，但是在負數
(3) 後退和前進具有相反的意義，所以後退 -200 米就是向前面走 200 米。	裏面，絕對值大的就反而小，因此 -8 比 -5 小，所以全部
(4) 在某一點的東面 -4 尺，就是在某一點的西面 4 尺。	五個數，依照從大到小的方向，我們可以把它們排成下面的次序：
(5) 我們可以說這隻手表快 -3 分鐘。	$+3, +\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}, -5, -8.$
(6) 這些數的絕對值，分別是：	9) 把 -10 前後的連續的數排到起來，就得：
(7) $+5$ 和 -5 中間的整數有下面的九個：	 $-13, -12, -11, -10, -9, -8, -7, \dots$
$4, 3, 2, 1, 0, -1, -2, -3, -4.$	上面的各數每一個數都比它前面的數大 1 ，所以比 -10 大的數是 -8 ，比 -10 小的數是 -13 。
	(10) 第二天比第一天上升 -2 度，就是比第一天下降 2 度，因此第二天，溫度計指 38 度。

法	問 題
(法則一) 同號二數相加, 把它們的絕對值相加, 原符號不變。 公式 $(+a) + (+b) = +(a+b)$, $(-a) + (-b) = -(a+b)$. 其中 a 和 b 代表二數的絕對值 例如 $(+7) + (+3) = +10$, $(-6) + (-8) = -14$. (法則二) 異號二數相加, 先求出它們絕對值的差, 符號用絕對值大的數的符號。 公式 $(+a) + (-b) = +(a-b)$, $(-a) + (+b) = -(a-b)$. (注意) 上面的公式中, a, b 代表絕對值並且 $a > b$. 例如 $(+7) + (-4) = +3$, $(-8) + (+3) = -5$. 在代表數學中, 正數前的 '+' 號可以省略不寫, 因此我們可以把上面第一個等式寫成 $7 + (-4) = 3$. (法則三) 絕對值相等而符號相反的數, 它們的和等於零。 公式 $(-a) + (+a) = 0$. 例如 $(-9) + (+9) = 0$, $(+\frac{1}{3}) + (-\frac{1}{3}) = 0$. (法則四) 某數加上零, 或零加上某數, 仍等於某數。 例如 $(+75) + 0 = +75$, $0 + (-95) = -95$.	(1) 把 8 和下面的各個數一一相加, 分別求和: $-1, -2, -3, 0, +1, +2, +3, +4$. (2) 把 -4 和下面的各數一一相加: $+4, +3, +2, +1, 0, -1, -2, -3, -4$. (3) 計算下式: $(8\frac{1}{6}) + (-3\frac{1}{12})$ (4) 化簡下式: $(-5\frac{1}{3}) + (-10\frac{1}{9})$ (5) 求 $-13, +5, -1, +10, -6$ 全部加起來的和。 (6) 計算下式: $8.5 + (-1.2) + (+1.3) + (-2.4)$ (7) 溫度計原來指示零下 5 度, 現在上升 9 度又下降 7 度, 問最後的溫度怎樣?

解

答

$$(1) \quad 8 + (-1) = + (8-1) = 7,$$

$$8 + (-2) = + (8-2) = 6,$$

$$8 + (-3) = + (8-3) = 5,$$

$$8 + 0 = +8 \text{ 或 } 8,$$

$$8 + (+1) = + (8+1) = 9,$$

$$8 + (+2) = + (8+2) = 10,$$

$$8 + (+3) = + (8+3) = 11,$$

$$8 + (+4) = + (8+4) = 12.$$

$$(2) \quad (-4) + (+4) = 0,$$

$$(-4) + (+3) = - (4-3) = -1,$$

$$(-4) + (+2) = - (4-2) = -2,$$

$$(-4) + (+1) = - (4-1) = -3,$$

$$(-4) + 0 = -4,$$

$$(-4) + (-1) = - (4+1) = -5,$$

$$(-4) + (-2) = - (4+2) = -6,$$

$$(-4) + (-3) = - (4+3) = -7,$$

$$(-4) + (-4) = - (4+4) = -8.$$

$$(3) \quad (+8\frac{1}{6}) + (-3\frac{1}{12}) = + (8\frac{1}{6} - 3\frac{1}{12})$$

$$= 8\frac{2}{12} - 3\frac{1}{12} = 5\frac{1}{12}.$$

$$(4) \quad (-5\frac{1}{3}) + (-10\frac{1}{9}) = - (5\frac{1}{3} + 10\frac{1}{9}) = -15\frac{4}{9}.$$

$$(5) \quad \text{所求的和} = (-13) + (+5) + (-1) + (+10) + (-6)$$

$$= (-8) + (-1) + (+10) + (-6)$$

$$= (-9) + (+10) + (-6) = (+1) + (-6) = -5.$$

$$(6) \quad 3.5 + (-1.2) + (+1.3) + (-2.4)$$

$$= 2.3 + (+1.3) + (-2.4)$$

$$= 3.6 + (-2.4) = 1.2.$$

(7) 如果溫度在零度上方時用‘+’號表示，在下方時用‘-’號表示，那末最後的溫度是：

$$(-5) + (+9) + (-7) = (-5) + (-7) + (+9)$$

$$= -(5+7) + (+9)$$

$$= (-12) + (+9) = -(12-9) = -3.$$

答：最後溫度計指示零下三度。

法	則	問題
(法則一) 從一數減去某數,可把減數的符號改變,再和被減數相加. 公式 $a - (+b) = a + (-b)$, $a - (-b) = a + (+b)$. 例如 $7 - (+5) = 7 + (-5) = +2$, $-7 - (-5) = -7 + (+5) = -2$, $0 - (+5) = 0 + (-5) = -5$, $0 - (-5) = 0 + (+5) = +5$. (注意) 減法是加法的逆運算,所以一數減去正數就是減少被減數的值,減去負數就是增加被減數的值.因此,我們可用減數的相反數加被減數,來代替減法,這就是為什麼先要把減數的符號改變的道理. (法則二) 某數減去 0 仍等於某數 $a - 0 = a$. 例 $(+5) - 0 = +5$, $(-5) - 0 = -5$.	(1) 試從 2 分別減去下面各數: $3, 2, 1, 0, -1, -2, -3$. (2) 計算 $0 - (+3)$ 和 $0 - (-3)$. (3) 從 15 減去什麼數可得餘數 -10? (4) 計算下式: $0 - (-5) - (-2\frac{1}{5}) - (+3)$. (5) 如果 x 和 y 表示兩個正數,並且它們的絕對值的和是 a,那末下面的兩個式子代表什麼數? $x - (-y), -x - y$. (6) 用貨幣 a 元買書,用去 b 元($a < b$)問還剩餘幾元? (7) $-\frac{2}{3}$ 和 $-\frac{4}{5}$ 中間,那一個較大,並且大多少? (8) 計算: $(-4) + (-5.1) - (-3\frac{1}{2}) - (+0.2)$	

解	答
(1) [解] $2 - (+3) = 2 + (-3) = -1,$ $2 - (+2) = 2 + (-2) = 0,$ $2 - (+1) = 2 + (-1) = 1,$ $2 - 0 = 2,$ $2 - (-1) = 2 + (+1) = 3,$ $2 - (-2) = 2 + (+2) = 4,$ $2 - (-3) = 2 + (+3) = 5.$ (2) [解] $0 - (+3) = 0 + (-3) = -3,$ $0 - (-3) = 0 + (+3) = 3.$ (3) [解] 所求的數是 $15 - (-10) = 15 + (+10) = 25.$ (4) [解] $0 - (-5) - (-2\frac{1}{5}) - (+3)$ $= 5 + 2\frac{1}{5} - 3$ $= 4\frac{1}{5}.$	(5) [解] $x - (-y) = x + y = a,$ $-x - y = -(x + y) = -a.$ 所以兩式所代表的數, 分別是 a 和 $-a$. (6) 剩餘的貨幣是 $(a - b)$ 元, 但是因為 $a < b$, 所以剩餘的貨幣應當是 $(+a) + (-b) = -(b - a)$ 元, 就是說還不足 $(b - a)$ 元. (7) $(-\frac{2}{3}) - (-\frac{4}{5}) = (-\frac{10}{15}) - (-\frac{12}{15})$ $= (-\frac{10}{15}) + (+\frac{12}{15}) = \frac{2}{15}.$ 因為這兩個數的差是一個正數, 所以 $-\frac{2}{3}$ 比 $-\frac{4}{5}$ 為大, 並且大 $\frac{2}{15}$. (8) $(-4) + (-5.1) - (-3\frac{1}{2}) - (+0.2)$ $= (-4) + (-5.1) + (+3.5) + (-0.2)$ $= (-9.3) + (+3.5) = -5.8.$

法 則	問 題
(法則一) 如果二乘數有相同的符號,那末它們積的符號應該是正;並且積的絕對值,等於乘數絕對值的相乘積。 公式 $(+a) \times (+b) = +ab, \quad (-a) \times (-b) = +ab,$ 例 $(+3) \times (+4) = +(3 \times 4) = +12,$ $(-3) \times (-4) = +(3 \times 4) = +12.$	(1) 求下面的各個相乘積: $15 \times 8, \quad (-15) \times 8,$ $15 \times (-7), \quad (-15) \times (-7).$ (2) 計算下面的積: $(-4) \times (-3) \times (+2) \times (-5).$ (3) 計算下面的積: $(-\frac{3}{5}) \times (+20) \times (+\frac{1}{2}).$
(法則二) 如果二乘數有相反的符號,那末它們積的符號應該是負;並且積的絕對值,等於乘數絕對值的相乘積。 公式 $(+a) \times (-b) = -ab, \quad (-a) \times (+b) = -ab.$ 例 $(+3) \times (-4) = -(3 \times 4) = -12,$ $(-3) \times (+4) = -(3 \times 4) = -12.$	(4) 計算下面的各個乘積: $(-1)^2, (-1)^3, (-2)^4, (+3)^3.$ (5) 化簡下面的積: $(2 - (-3)) \times (-5) \times (-1).$ (6) 求 $+5, -\frac{3}{10}$ 和 $-\frac{2}{9}$ 的連乘積。
(法則三) 如果乘數中,有一個是零,那末它們的相乘積是零。 $(+a) \times 0 = 0, \quad (-a) \times 0 = 0, \quad 0 \times (+b) = 0,$ $0 \times (-b) = 0, \quad 0 \times 0 = 0, \quad (+a) \times 0 \times (-b) = 0.$ 例 $(+3) \times 0 = 0, \quad 0 \times (-3) = 0,$ $(+3) \times 0 \times (-2) \times (+5) = 0.$	(7) 求四個數 $-16, -7, \frac{3}{2}$ 和 0 的連乘積。 (8) 如果 $a = -3, b = -2, c = -1$; 求下式中 x 的值: $x = ab + bc - ca.$

解	答
(1) 〔解〕 $15 \times 8 = 120,$ $(-15) \times 8 = -120,$ $15 \times (-7) = -105,$ $(-15) \times (-7) = 105.$ (2) 〔解〕 $(-4) \times (-3) \times (+2) \times (-5)$ $= (+12) \times (+2) \times (-5)$ $= (+24) \times (-5) = -120.$	(5) 〔解〕 $[2 - (-3)] \times (-5) \times (-1)$ $= [2 + 3] \times (-5) \times (-1)$ $= 5 \times (-5) \times (-1) = 5 \times 5 = 25.$
(3) 〔解〕 $(-\frac{3}{5}) \times (+20) \times (+\frac{1}{2})$ $= (-12) \times (+\frac{1}{2}) = -6.$	(6) 〔解〕 $(+5) \times (-\frac{3}{10}) \times (-\frac{2}{9})$ $= 5 \times \frac{3}{10} \times \frac{2}{9}$ $= \frac{1}{3}.$
(4) 〔解〕 $(-1)^2 = (-1) \times (-1) = 1,$ $(-1)^3 = (-1) \times (-1) \times (-1) = -1,$ $(-2)^4 = (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2)$ $= 4 \times (-2) \times (-2) = (-8) \times (-2) = 16.$ $(+3)^3 = (+3) \times (+3) \times (+3) = 27.$	(7) 〔解〕 $(-16) \times (-7) \times (+\frac{3}{2}) \times 0 = 0.$ (8) 〔解〕 $x = a + b + c + a$ $= (-5) \times (-2) + (-2) \times (-1) - (-1) \times (-3)$ $= (+6) + (+2) - (+3)$ $= 6 + 2 - 3 = 5.$