# 高 等 数 学
# 内容概要及例题精解

上

何彦博　编

西安陆军学院训练部

# 编　者　语

本书是为帮助学员学习《高等数学》而编写的教学参考书，是根据总部制定的初级指挥院校《高等数学》教学大纲并结合近年来从事《高等数学》教学工作的体会编写而成的，书中文字力求简洁，目的在于帮助学员更好的理解《高等数学》的全貌，并为进一步深化教学内容提供一本参考读物。本书中各章大体分为两部分，第一部分是内容概要，着重将教材中主要内容在突出重点的基础上加以归纳总结，使读者对该章基本概念、定理、法则有一个清晰完整的印象。第二部分是例题选解，也是书中的重点，所选例题比较典型，除对例题进行详解外，还归纳和小结了例题的类型、解题的思路和方法步骤及其应注意的问题。还选择了一定数量的一题多解和学员学习中容易混淆的问题，尽可能的指出来，以引起重视。同时，还选了一些难度较大的题目和教学中没有涉及到的解题方法，以便拓广学员的知识视野。

本书在编写过程中，训练部首长和教研室负责同志均给予了很大的关怀和支持，李桎楠副教授对编写工作给予了很多方面的帮助，并审查和修改了全稿。吴筱宁同志参加了本书中的校对工作，在此谨表示衷心的感谢！

由于本人的业务水平有限，错误之处在所难免，诚望大家批评指正。

编　　者

一九八九年五月二十日

# 目　　录

# 第一章　函　　数

## 一、内容概要：

### （一）函数的基本概念：

**1。函数的定义**

设有两个变量 $x$ 和 $y$，如果变量 $x$ 在其变化范围内任取一数值时，变量 $y$ 按照一定的规律有唯一确定的值和它对应，就称变量 $y$ 是变量 $x$ 的函数。记作 $y=f(x)$，且称 $x$ 为自变量，$y$ 为因变量。自变量的变化范围 D 称之为函数的定义域。

如果自变量取某一数值 $x_0$ 时，函数 $y=f(x)$ 有确定的值和它对应，称函数在 $x_0$ 处有定义，函数在 $x_0$ 处的值记为 $f(x_0)$。

相应于函数定义域的一切 $x$ 值的全体函数值称之为函数的值域。

**2。反函数**

设函数 $y=f(x)$，当变量 $x$ 在区域 D 内变化，变量 $y$ 在区域 G 内变化，如果对于变量 $y$ 在区域 G 内任取一个值 $y_0$，变量 $x$ 在 D 内有 $x_0$，使 $y=f(x_0)$，则变量 $x$ 是变量 $y$ 的函数，用 $x=\varphi(y)$ 表示，函数 $x=\varphi(y)$ 称之为函数 $y=f(x)$ 的反函数。

**3。复合函数**

设 $y$ 是 $u$ 的函数，$y=f(u)$，而 $u$ 又是 $x$ 的函数，$u=\varphi(x)$，且 $\varphi(x)$ 的值域包含在 $f(u)$ 的定义域内，则通过变量 $u$，$y$ 就是 $x$ 的函数，记为 $y=f[\varphi(x)]$，则称该函数为 $y=f(u)$ 及 $u=\varphi(x)$ 的复合函数。变量 $u$ 称之为中间变量。

### （二）函数的基本性质

**1。有界性**

设函数$f(x)$在区间D内有定义（D可以是函数的定义域或定义域的一部分）如果存在一个正数M，使得当$x$取D内的任何一个值时，对应的函数值$f(x)$都满足不等式

$$|f(x)| \leq M$$

则称函数$f(x)$在D内有界。如果这样的M不存在，就叫做函数$f(x)$在D内无界。

2. 单调性

如果函数$f(x)$在区间$(a, b)$内随着$x$的增大而增大，即对于$(a, b)$内任意两点$x_1$与$x_2$，当$x_1 < x_2$时有

$$f(x_1) < f(x_2)$$

则称函数$f(x)$在区间$(a, b)$内单调增加；若当$x_1 < x_2$时，有

$$f(x_1) > f(x_2)$$

则称函数$f(x)$在区间$(a, b)$内单调减少。

单调增加或单调减少的函数称单调函数。

3. 奇偶性

如果函数$f(x)$对于定义域内的任意$x$都满足$f(-x)=f(x)$，则$f(x)$叫做偶函数。如果函数$f(x)$对于定义域内任意$x$都满足$f(-x)=-f(x)$，则$f(x)$叫做奇函数。

4. 周期性

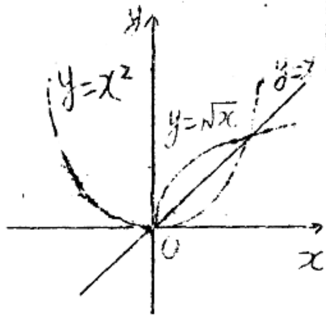
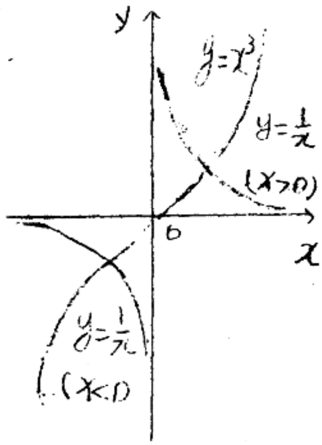
设函数$f(x)$如果存在着正数T，对于定义域内任何$x$，都有

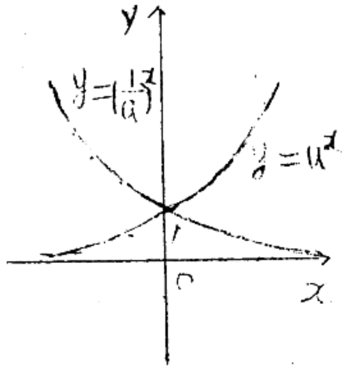
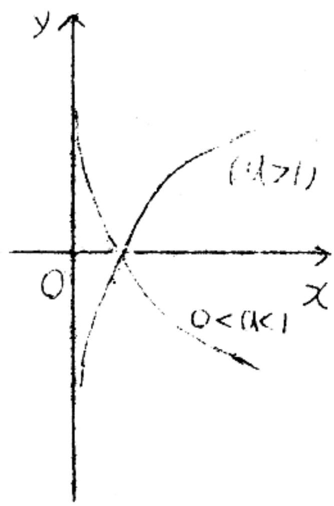
$$f(x+T) = f(x)$$

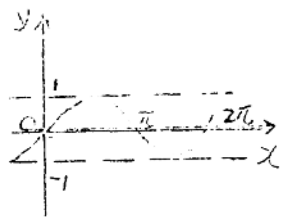
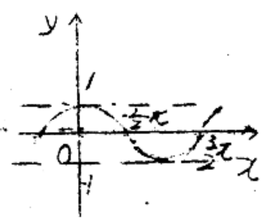
则称函数$f(x)$是周期函数，并称T为周期。通常所谓函数的周期均是指最小正周期。

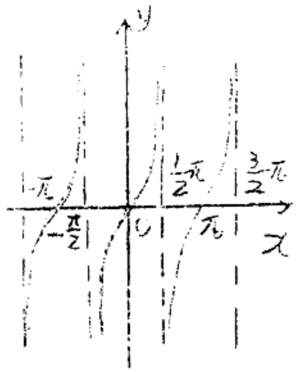
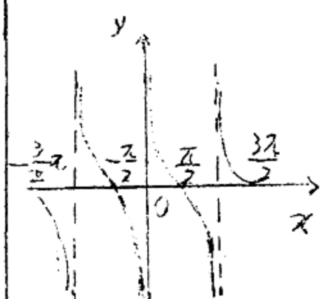
（三） 基本初等函数的图形和特性（见表一）

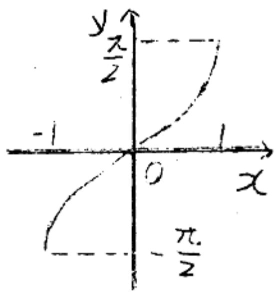
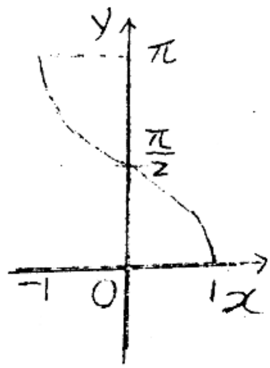
表一

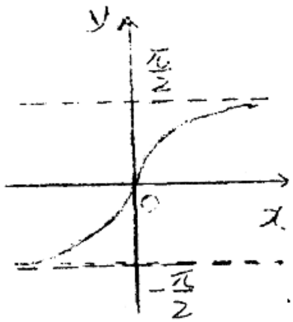
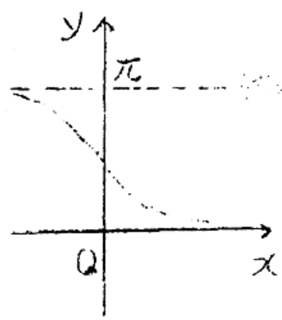
| 名称 | 表达式 | 定义域 | 图形 | 简单性质 |
|---|---|---|---|---|
| 幂函数 | $y=x$ | $(-\infty,+\infty)$ |  | ① 图形在第一象限都通过点（1，1）<br>② 当幂指数为奇数时，其图形以原点为对称<br>③ 不论指数取什么值，幂函数在（0，+∞）内总有意义。 |
| | $y=x^2$ | $(-\infty,+\infty)$ | | |
| | $y=x^{-1}$ | $(-\infty,0)$<br>$(0,+\infty)$ |  | |
| | $y=\sqrt{x}$ | $[0,+\infty)$ | | |
| | $y=x^3$ | $(-\infty,+\infty)$ | | |

| 名称 | 表达式 | 定义域 | 图形 | 简单性质 |
|---|---|---|---|---|
| 指数函数 | $y=a^x$<br>$(a>0,$<br>$a\neq 1)$ | $(-\infty,+\infty)$ |  | 图形在x轴的上方，都通过(0，1)点；当$a>1$时，$a^x$为增函数，当$0<a<1$时，$a^x$是减函数，$a^x$与$(\frac{1}{a})^x$的图形对称于y轴。 |
| 对数函数 | $y=\log_a x$<br>$(a>0,$<br>$a\neq 1)$ | $(0,+\infty)$ |  | 图形在y轴的右侧，都通过点(1，0)，当$a>1$时，$\log_a x$为增函数，当$0<a<1$时$\log_a x$为减函数。 |

| 名称 | | 表达式 | 定义域 | 图　　　形 | 简单性质 |
|---|---|---|---|---|---|
| 三角函数 | 正弦函数 | y=sinx | $(-\infty, +\infty)$ |  | 是以2π为周期的奇函数图形关于原点对称，图形在两直线y=1；y=−1之间即$\lvert \sin x\rvert \le 1$ |
| | 余弦函数 | y=cosx | $(-\infty, +\infty)$ |  | 是以2π为周期的偶函数，图形关于y轴对称，图形在两条直线y=1，y=−1之间即$\lvert \cos x\rvert \le 1$ |

| 名称 | | 表达式 | 定义域 | 图形 | 简单性质 |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 三角函数 | 正切函数 | $y=\operatorname{tg}x$ | $x\neq(2K+1)\frac{\pi}{2}$ ($K=0,\pm1,\pm2,\pm3\cdots$) |  | 是以π为周期的奇函数，图形以原点为对称，在$(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$内是增函数。 |
| | 余切函数 | ~~y~~=$\operatorname{ctg}x$ | $x\neq K\pi$ ($K=0,\pm1,\pm2,\pm3\cdots$) |  | 是以π为周期的奇函数，图形以原点为对称，在$(0,\pi)$内是减函数。 |

<table>
<tr><th colspan="2">名称</th><th>表达式</th><th>定义域</th><th>图　　形</th><th>简单性质</th></tr>
<tr><td rowspan="2">反三角函数</td><td>反正弦函数</td><td>y=arcsinx</td><td>[−1，1]</td><td>
</td><td>单调增加的奇函数。值域为 $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$</td></tr>
<tr><td>反余弦函数</td><td>y=arccosx</td><td>[−1，1]</td><td>
</td><td>单调减少，值域为 $0 \le y \le \pi$</td></tr>
</table>

| 名称 | | 表达式 | 定义域 | 图形 | 简单性质 |
|---|---|---|---|---|---|
| 反三角函数 | 反正切函数 | y=arctgx | (−∞，+∞) |  | 单调增加的奇函数，值域：<br>$-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}$ |
| | 反余切函数 | y=arcctgx | (−∞，+∞) |  | 单调减少<br>值域：<br>$0<y<\pi$ |

(四) 分段函数

用解析式表示函数如果在定义域内不同的范围用不同的式子表示的的函数，称为分段函数。在自然科学和工程技术中经常可见。如：

脉冲发生器产生的三角波，电压u与时间t幂函数关系为

$$u=\begin{cases}\frac{3}{2}t，0\le t\le 10； \\ -\frac{3}{2}(t-20),10<t\le 20。\end{cases}$$

其图形如图1—1。

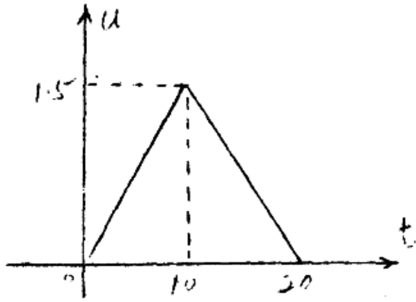



图1—1

(五) 双曲函数

该函数也是初等函数，其定义如下：

1° 双曲正弦函数

$$Shx=\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}$$

2° 双曲余弦函数

$$Chx=\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}$$

其图形如（1—2）。

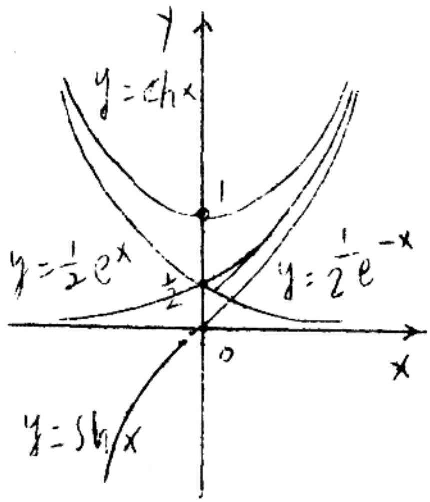



图1—2

由双曲函数的定义可推出如下关系：

$$Sh(x+y)=ShxChy+ChxShy$$

$$Sh(x-y)=ShxChy-ChxShy$$

$$\mathrm{Ch}(x+y)=\mathrm{Ch}x\,\mathrm{Ch}y+\mathrm{Sh}x\,\mathrm{Sh}y$$

$$\mathrm{Ch}(x-y)=\mathrm{Ch}x\,\mathrm{Ch}y-\mathrm{Sh}x\,\mathrm{Sh}y$$

$$\mathrm{Sh}2x=2\,\mathrm{Sh}x\,\mathrm{Ch}x$$

$$\mathrm{Ch}2x=\mathrm{Ch}^2x+\mathrm{Sh}^2x$$

$$\mathrm{Ch}^2x-\mathrm{Sh}^2x=1$$

$3^\circ$ 双曲正切函数和双曲余切函数

$$\mathrm{th}x=\frac{\mathrm{Sh}x}{\mathrm{Ch}x}=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$$

$$\mathrm{cth}x=\frac{\mathrm{Ch}x}{\mathrm{Sh}x}=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$$

双曲正弦、双曲余弦函数的性质。如表二：

表二

| 名　称 | 表　达　式 | 定义域 | 性　　　质 |
|---|---|---|---|
| 双曲正弦函数 | $Shx=\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{2}$ | $(-\infty,+\infty)$ | 奇函数，图形在[illegible],3 象限通过原点；在$(-\infty,+\infty)$内单调增加。<br>$\|x\|$很大时，在第一象限内图形接近于$y=\frac{1}{2}e^{x}$在第3象限内图形接近于$y=-\frac{1}{2}e^{-x}$ |
| 双曲余弦函数 | $Shx=\dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2}$ | $(-\infty,+\infty)$ | 偶函数，图形在1，2象限，通过点$(0,1)$。<br>在$(-\infty,0)$内单调减少；在$(0,+\infty)$内单调增加。<br>$\|x\|$很大时，在第1象限内图形接近于$y=\frac{1}{2}e^{x}$；在第2象限内图形接近于$y=\frac{1}{2}e^{-x}$。 |

二、例题选讲

例1. 指出下列各对函数$f(x)$和$g(x)$是否相同，并说明理由。

① $f(x)=\dfrac{x}{x}$，$g(x)=1$

② $f(x)=\ln x^2$ ，$g(x)=2\ln x$

③ $f(x)=|x|$ ；$g(x)=\sqrt{x^2}$

④ $f(x)=\dfrac{2x^2-2}{x-1}$ ，$g(x)=2(x+1)$

解：① 不相同。因为 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,0)$ 和 $(0,+\infty)$，而 $g(x)$ 的定义域是 $(-\infty,+\infty)$ ；当 $x\neq 0$ 时两个函数相同。

② 不相同。因为 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,0)$ ，$(0,+\infty)$，而 $g(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$ 。当 $x>0$ 时，两个函数相同。

③ 相同。因为 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的定义域，值域以及自变量和因变量之间的对应法则都相同。

④ 不相同。因为 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,1)$ 和 $(1,+\infty)$，而 $g(x)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$ 。当 $x\neq 1$ 时两个函数相同。

例2． $x^2$ 是不是 $x$ 的函数？

解：$x^2$ 是 $x$ 的函数。因为它有两个变量，一个是 $x$ ，一个是 $x^2$ ，对于 $x$ 的每一个确定的值，变量 $x^2$ 就有一个确定的值与之对应，这是符合函数定义的，所以 $x^2$ 是 $x$ 的函数，这里 $x^2$ 代替了 $y$，不过没有写成 $y=x^2$ 就是了。

例3． $x$ 与 $y$ 之间一个方程，是否能建立 $y$ 与 $x$ 之间的函数关系？

解：不一定。如：$x^2+y^2+1=0$ 。在实数范围内 $x$ 和 $y$ 就不存在函数关系，这是因为对于任何 $x$ 值（或 $y$ 值）在实数范围内没有一个 $y$ 值（或 $x$ 值）能使 $x^2+y^2+1=0$ 。

例4。f(x)满足什么条件时，下列式子才有意义？

① $y=\dfrac{1}{f(x)}$　　② $y=\sqrt[n]{f(x)}$（n为偶数）

③ $y=\log_a f(x)$（$a>0$，$a\neq 1$）

④ $y=\arccos f(x)$

解：① $f(x)\neq 0$

② $f(x)\geq 0$

③ $f(x)>0$

④ $|f(x)|\leq 1$

例5。求下列函数的定义域：

① $y=\arcsin\dfrac{x-2}{3}$　　② $y=\sqrt{16-x^2}+\lg\sin x$

③ $y=\arccos(2+3^x)$　　④ $y=f(\ln x)$，$(0<\ln x\leq 1)$

解：① 当 $-1\leq\dfrac{x-2}{3}\leq 1$ 时，函数有意义，解此不等式得

$-3\leq x-2\leq 3$　　即 $-1\leq x\leq 5$

所以此函数的定义域为$[-1,5]$

② 当$\sqrt{16-x^2}$与$\lg\sin x$同时有意义时，函数才有意义，因而要求x满足下列不等式组：

$$\begin{cases}16-x^2\geq 0 & ①\\ \sin x>0 & ②\end{cases}$$

由① $16-x^2 \ge 0$

$(4+x)(4-x) \ge 0$ 得 $-4 \le x \le 4$

② $\sin x > 0$ 得 $2n\pi < x < (2n+1)\pi$

$(n=0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$

其公共部分是 $-4 \le x < -\pi$ 及 $0 < x < \pi$

③ 由反余弦的定义域必须

$$-1 \le 2 + 3^x \le 1$$

即 $-3 \le 3^x \le -1$

又由于指数函数的值域为 $(0, +\infty)$，即是设 $-3 \le 3^x \le -1$ 无意义，所以已知函数 $y = \arccos(2+3^x)$ 无意义。

④ 要使 $y = f(\ln x)$ 有意义，$\ln x$ 必须有意义，$\ln x$ 的定义为 $(0, +\infty)$，但 $\ln x$ 要满足 $0 < \ln x \le 1$。所以函数的定义为 $1 < x \le e$。

例6．求下列函数的反函数

① $y = \sqrt[3]{x^2+1}$ ② $y = \dfrac{2^x}{2^x+1}$

③ $y = 1+\lg(x+2)$ ④ $y = 3^{2x+5}$

⑤ $y = \dfrac{10^x+10^{-x}}{10^x-10^{-x}}+1$ ⑥ $y = \begin{cases} x^2-9, & 0 \le x \le 3 \\ x^2, & -3 \le x < 0 \end{cases}$

解：① $\because y^3 = x^2+1$

$\therefore x^2 = y^3-1$

$x = \pm\sqrt{y^3-1}$