国际数学竞赛选载

江西省中小学教材编写组翻印

罗马尼亚数学奥林匹克四十三道题

（1978）

这本小册子登载了罗马尼亚1978年全国数学奥林匹克最后一轮的题目和为了组成罗马尼亚代表队（参加第二十届国际数学奥林匹克(注)）所进行的四次选拔考试的题目.

我们希望这本小册子能够说明我国(数学)奥林匹克的概况，以及为今年选拔参加国际数学奥林匹克的罗马尼亚代表队所用方式的概况.

第二十届国际数学奥林匹克组织委员会

*　　　*　　　*

〔说明〕

在1978年7月举行的第20届国际中学生数学竞赛中，罗马尼亚以237分获团体总分第一名，读者看了这43道题就会感觉到，罗马尼亚取得这样好的成绩绝不是偶然的.

这43道题，要求答题者具备集合、矩阵、微分、数论、组合、初等数学等基础知识，涉及的知识面比较宽广. 每题都有著者的名字(翻译时略去了)，说明这些题目是由一些专家化了一定的功夫编出的，每题都有一定的难度，而且比较灵活，水平比较高.

注：国际数学奥林匹克——国际中学生数学竞赛。

一九七八年罗马尼亚数学奥林匹克最后一轮

——1978年4月

九年级：

1.对于$a\in R$，确定$\sqrt{a^2+a+1}-\sqrt{a^2-a+1}$的所有可能的值.

2.设$ABCD$为任意凸四边形，M为对角线AC上的一点.过M平行于AB的直线交BC于P；过M平行于DC的直线交于AD于Q.

a)证明：$MP^2+MQ^2\geqslant\frac{AB^2\cdot DC^2}{AB^2+DC^2}$，并何时等式成立；

b)当M在AC上移动时，求PQ中点的几何轨迹.

3.设m、n为整数，且$m\geqslant1$，$n\geqslant1$使$\sqrt{7}-\frac{m}{n}>0$,证明：

$$\sqrt{7}-\frac{m}{n}>\frac{1}{mn}.$$

4.在实数范围内解方程：

$$\sqrt{x}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-2}=\frac{1}{2}(x+y+z).$$

十年级：

1.设$A=\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$是一个实数的集合，且$\varphi: A\to A$是一个满单映射[注]，假如$a_1<a_2<\cdots<a_n$，并且$a_1+\varphi(a_1)$

〔注〕 满单映射(bijective map)，就是到上的1-1映射．也叫可逆映射．

$<a_2+\varphi(a_2)<\cdots<a_n+\varphi(a_n)$. 证明：$\varphi$是集合$A$的恒等映射. 如果把$A$换成全体整数的集合，这个结果还对吗？

2. 确定整数$k\geqslant1$，使得表达式

$$\sin kx\cdot\sin^k x+\cos kx\cdot\cos^k x-\cos^k 2x$$

不依赖于x.

3. 设k是一个从每个顶点恰好发出三条棱的其面数$n\geqslant5$的凸多边体. 两个人做下面这样的游戏：两人交替地在没有被签上名的面上签名，以先在具有公共顶点的三个面上签上名者为胜. 证明：在任何情况下，都是先开始签名的人获胜.

4. 在一次国际象棋比赛中有n个选手，每人要与其他所有参加者比赛一场(每天最多一场). 进行全部比赛最少要用多少天？

十一年级：

1. 设f：$R\to R$是一实函数，它定义为：若x是无理数，则$f(x)=0$；若p、q为整数，$q>0$且$\frac{p}{q}$不可约，则

$$f\left(\frac{p}{q}\right)=\frac{1}{q^3}.$$

证明：f在每个无理点$x_0=\sqrt{k}$(k为自然数)处有导数.

2. 假设$\{C_n\}$，$n\geqslant1$是如下的一个自然数序列：任何C_n是大于或等于n的最小整数幂4^k，记

$$b_n=C_1+C_2+\cdots+C_n-\frac{1}{5}.$$

a)以$\frac{C_n}{n}$表达$\frac{b_n}{n^2}$；

b)证明：对于任何实数$d\in\left[\frac{4}{5},\ \frac{5}{4}\right]$，有一个自然数序列

$n_k\to\infty$，使得$\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{b_{n_k}}{(n_k)^2}=d$.

3.考虑一个开始时元素为未知的3×3矩阵，两个人A和B，轮流对矩阵的一个元素给定一个实值之后，这个值就保持固定．证明：无论是那个先开始做，A总能做到使最终的矩阵为奇异矩阵(即行列式为零的矩阵)．

4.设f：$R\to R$是由$f(x)=x|x-a_1|+|x-a_2|+\cdots+|x-a_n|$所定义的函数，这里$a_1$，$a_2$，…，$a_n$是定实数，给出$f$在整个$R$上可微的条件．

十二年级：

1.设f：$R\to R$是连续函数，且对于任何$x\in R$，记

$$g(x)=f(x)\int_0^x f(t)dt.$$

证明：如果g是递减的，则在R上$f=0$.

2.设P和Q为两个复系数的非零多项式，证明：P和Q有相同的根(包括重数)，当且仅当：由$f(z)=|P(z)|-|Q(z)|$所定义的函数f：$C\to R$在整个C上有固定的符号，也可能是零．

3.a)设适合$\int_0^1 f(x)dx=1$的所有连续函数f：$[0,1]\to[0,2]$的集合为F，当f遍历F时，$\int_0^1 xf(x)dx$的所有可能的值是什么？

b)证明：若f、f^2属于F，则f是一个常量．

4.设$P(z)$为复系数多项式，证明：$(P*P*\cdots*P)(z)-z$可被$P(z)-z$整除，这里“复合”运算$*$被取n次．

四次选拔考试试题

第 一 试

1978.4.9.（4小时）

1.考察集合 $X=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \}$，证明：把$X$分成任意两个子集，其中之一包含三个数，使它们中的两个的和等于第三个的二倍.

2.设 k、$l\geqslant 1$ 是固定的自然数，证明：如果对于任何自然数 m，有$(11m-1, k)=(11m-1, l)$，则存在一个整数n，使$k=11^n\cdot l$.

3.设$P(x,y)$是次数不大于 2 的关于 x、y 的多项式，设：A，B，C，A'，B'，C'是 XOY 平面中的六个不同的点，且A，B，C不共线，A'在BC上，B'在CA上，C'在AB上. 证明：如果P在这六个点上的值为零，则P恒等于零.

4.设$ABCD$是一个凸四边形，O是对角线的交点，证明：如果三角形OAB，OBC，OCD，ODA周长相等，则$ABCD$是菱形. 如果O是其他的内点这个结论还正确吗？

5.证明：不存在这样的正方形：其顶点在半径成等差数列的四个同心圆上.

6.证明：不存在这样的多面体，它在任何一个平面上的正交投影是一个非退化的三角形.

7.考虑次数为 3 的实系数多项式P、Q、R，使得对于任何

实数 x 有 $P(x)\leqslant Q(x)\leqslant R(x)$，而且存在 $a\in R$，使 $P(a)=R(a)$. 证明：存在常数 $k\in[0,1]$，适合 $Q=kP+(1-k)R$. 如果 P、Q、R 为四次多项式这个性质成立吗？

8. 设 A 是任意的一个集合，两个映射 f、g：$A\to A$ 叫做相似的，如果有一个满单映射 h：$A\to A$ 使得 $f\cdot g\cdot h=h$.

a)如果 A 只有三个元素，造函数 f_1，f_2，…，f_k：$A\to A$，使 f_i 与 f_j 相似($i\neq j$)，且任何一个函数 f：$A\to A$ 与函数 f_i 中的一个相似($1\leqslant i\leqslant k$)；

b)如果 $A=R$，证明：函数 $\sin$ —— $\sin$ 是相似的.

9. 设 $\{x_n\}(n\geqslant 0)$ 是如下定义的一个实数序列：$x_0=a>1$，$x_{n+1}(x_n-[x_n])=1(n\geqslant 1)$. 证明：如果序列 $[x_n]$ 是循环序列，则 a 是一个整系数二次方程的根. 研究其逆命题.

第　二　试

1978.4.10.（3 小时）

1. 考虑在平面 XOY 内的无限网络，这个网络由直线 $x=h$、$y=k$ $(h,\ k\in Z)$ 所定义. 对任何一个结点 $(h,\ k)$ 赋以一个整数 a_{hk}，使得对于任何 h，$k\in Z$ 的数 a_{hk} 是相邻 4 个数的算术平均数，即

$$a_{hk}=\frac{1}{4}(a_{h-1,k}+a_{h+1,k}+a_{h,k-1}+a_{h,k+1}).$$

a)证明：存在满足上述定义的一个网络使得 a_{hk} 不全相等；

b)假如在赋于网络结点的数中，存在两个不同的数，证明：对于任何自然数 n，在网络的数中存在大于 n 和小于 $-n$ 的数.

2.设f：$N\to N$是一个函数，其定义为$f(n)=n^2$.

证明：存在一个函数F：$N\to N$，使得：$F*F=f$.

3.考虑在一个平面中的$3n$个点A_1，A_2，…，A_{3n}，这些点使得三角形$A_1A_2A_3$是等边的，并对于任何自然数k（$1\leqslant k\leqslant n-1$），点$A_{3k+1}$，$A_{3k+2}$，$A_{3k+3}$，是三角形$A_{3k-2}A_{3k-1}A_{3k}$各边的中点，设$3n$个点中的每一点被涂上两种固定颜色中的一种.

证明：对于$n\geqslant 7$能找到被涂上相同颜色的四个点，而这四个点是一个等腰梯形的顶点. 同样的结论对$n=6$成立吗？

4.考察平面中$3n$个不同的点的集合M，它们之间的最大距离是1，证明：

a)对M的任何四个点中至少有两个点其距离不超过$\frac{1}{\sqrt{2}}$；

b)如果$n=2$，对任何$\varepsilon>0$，存在六个点的构形，使其12个距离属于区间$(1-\varepsilon,1)$，但不存在这样的构形使至少13个距离属于区间$\left(\frac{1}{\sqrt{2}},1\right)$；

c)存在一个半径不超过$\sqrt{\frac{3}{2}}$的圆包含了所有的点($3n$个)；

d)M中存在两点，其距离不超过$\frac{4}{3\sqrt{n}-\sqrt{3}}$.

第 三 试

1978.6.22. （4小时）

1.设$ABCD$是四边形，且A'、B'分别是A、B在CD上的正交投影，假设$BB'\leqslant AA'$，且$ABCD$的面积等于$\frac{1}{2}(AB+$

$CD)\cdot BB'$，这能导出$ABCD$是梯形吗？如果$\angle BAD$是钝角，回答同样的问题.

2.$SABC$是三棱锥，分别取棱SA、SB、SC上的三点A'、B'、C'，使平面$A'B'C'$与平面ABC交于直线(d)，如果$A'B'C'$绕直线(d)旋转，证明：直线AA'、BB'、CC'共点，求三直线交点的轨迹.

3.设D_1、D_2、D_3是三条直线，且两两异面，过D_2上每一点x_2作直线交D_1于x_1，交D_3于x_3.

a)在D_2上选一点O_2，D_3上选一点O_3建立D_2和D_3上的点x_2和x_3的横坐标（分别关于O_2、O_3)之间的关系；

b)证明：存在四条直线，两两异面且不都平行于同一平面，它们恰有两条公共交线. 对只有一条公共交线和无公共交线，证明同样问题；

c)设：F_1、F_2、F_3、F_4是D_1、D_2、D_3的四条公共交线.

证明：F_1、F_2、F_3、F_4有无限多条公共交线.

4.解方程：$\sin x\cdot\sin 2x\cdot\cdots\cdot\sin nx+\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cdots\cdot\cos nx=1$. 这里$n$是大于或等于1的自然数.

5.ABC是等边三角形，点M在三角形内部，且满足以下条件：

$$\angle MAB+\angle MBC+\angle MCA=\frac{\pi}{2}.$$

求点M的轨迹.

6.证明：在集合$\{x\sqrt{2}+y\sqrt{3}+z\sqrt{5}\mid x,\ y,\ z\in Z, x^2+y^2+z^2\neq 0)\}$中，存在趋于零但不等于零的数. 证明，对于$\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$，$\sqrt{5}$各自的任何有理近似值$a$、$b$、$c$，表达式$|xa+yb+$

$zc|$对于无限多组不同的整数三元组(x, y, z)等于零，但表达式不能无限趋于零。

7. M是一个平面中的点集，其中无三点共线，在这个平面中选择直角坐标轴，并给出以下命题(可能是不成立的)：

(A) M的任何有限子集的重心有整数坐标。

证明：a)对于每个$n\geqslant1$，存在n个点的集合M，使得(A)成立；

b)(A)对无限集M不成立。

8. 把下面问题用集合理论的语言叙述出来然后解答：一次舞会上参加者是男孩和女孩，每个男孩有若干个女友，任给一个男孩的集合M，至少以M中一个男孩为男友的女孩集合其人数不少于M的人数，证明：每个男孩能和他的一个女友同时起舞.（霍尔匹配分理）

第 四 试

1978.6.24.（4小时）

1. 证明：对于任何自然数$a\geqslant3$存在一个自然数n的无限集，使a^n-1能被n整除，这个性质对于$a=2$成立吗？

2. 定义在实数有限集合上的函数f：$\{x_1, \cdots, x_k\}\to R$，如果对于使$n_1x_1+\cdots+n_kx_k=0$任何整数$n_1, \cdots, n_k$，有$n_1f(x_1)+\cdots+n_kf(x_k)=0$，那么这个函数叫做可加的。

证明：对于任何如上的函数f及任何实数$y_1, \cdots, y_p$，存在一个可加的函数F：$\{x_1, \cdots, x_k, y_1, \cdots, y_p\}\to R$，使得对于任何$i(1\leqslant i\leqslant k)$有$F(x_i)=f(x_i)$。

3.设M是一个集合，且$\{A_1, A_2, \cdots, A_p\}$，$\{B_1, B_2, \cdots, B_p\}$是$M$的两个分类，使得每当$A_i \cap B_j = \Phi$ $(1 \leqslant i, j \leqslant p)$，就有$|A_i| + |B_j| \geqslant p$，证明：$|M| \geqslant \frac{p^2+1}{2}$；等式能成立吗？

4.在一平面内考虑一个n个点的集合M，它们中的任何三个不共线，对于任一个端点在M中的线段，赋权$+1$或-1，并且顶点在M中的一个三角形如果各边的权的乘积是-1则称它为负的，假设有p个线段的权是-1。

证明：如果n是偶数，那么负三角形的个数是偶数；如果n是奇数，那么负三角形的个数与p有相同的奇偶性。

5.考虑一个固定三角形，确定三角形内所有点M的集合，使得过M的一条直线(d)分三角形为两个区域，其中一个区域关于直线(d)的对称区域被包含在另一区域中。

6.在半径是1的球中，能否放置20个棱长为1的正四面体，使得其中任意两个没有公共内点。

（岳其静译）

美国数学竞赛

第一届

（1972年5月9日）

试题

1.令记号$(a, b, \cdots, g)$和$[a, b, \cdots, g]$分别表示正整数$a, b, \cdots, g$的最大公因数和最小公倍数，例如$(3, 6, 18)=3$，$[6, 15]=30$，试证

$$\frac{[a,b,c]^2}{[a,b][b,c][c,a]}=\frac{(a,b,c)^2}{(a,b)(b,c)(c,a)}.$$

2.给出一个四面体$ABCD$是等腰的，即$AB=CD$，$AC=BD$，$AD=BC$. 证明四面体的面是锐角三角形.

3.假设一个随机数选择器只能选择九个数字1，2，…，9中的一个，并且以等概率作这些选择. 决定在n次选择($n>1$后，使得选择的n个数的乘积能被10整除的概率.

4.令R表示一个非负有理数. 决定整数a，b，c，d，e，f的值，使对R的每次选取，都有

$$\left|\frac{aR^2+bR+c}{dR^2+eR+f}-\sqrt[3]{2}\right|<\left|R-\sqrt[3]{2}\right|.$$

5.一个给定的凸五边形$ABCDE$具有性质：五个三角形ABC，BCD，CDE，DEA和EAB中的每一个面积都是1. 证明有上述性质的非正五边形有相同的面积；并且，有无限多个这样的非正五边形.

解答

1.令 $a=\Pi p_i^{a_i}$，$b=\Pi p_i^{b_i}$，$c=\Pi p_i^{c_i}$，其中 p_i 表示 a，b，c 的素因子（其中某些指数可以是零）．

因为 $[a, b]=\Pi p_i^{\max(a_i, b_i)}$，$(a, b)=\Pi p_i^{\min(a_i, b_i)}$ 等等，我们只需证明

$$2\max(a_i, b_i, c_i)-\max(a_i, b_i)-\max(b_i, c_i)-\max(c_i, a_i)$$
$$=2\min(a_i, b_i, c_i)-\min(a_i, b_i)-\min(b_i, c_i)-\min(c_i, a_i).$$

不失一般性，令 $a_i \geqslant b_i \geqslant c_i$ 对任一足码 i 都成立，则

$$2a_i-a_i-b_i-a_i=2c_i-b_i-c_i-c_i.$$

2.显见任一顶点的面角和是180°．因为三面角的任意两个面角之和大于第三个面角，所以每个面角必为锐角．如图1，假定$\angle BDC$ 不是锐角，令M是BC的中点，因为$\triangle ABC \cong \triangle DCB$，有$AM=DM$．今考虑一个以$M$为中心并且 BC 是直径的圆．因为$\angle BDC$ 不是锐角，D 必须在圆内或圆上，所以 $2DM \leqslant BC$．由 $\triangle AMD$ 上的三角形不等式 $AM+MD>AD$，以及 $AM=MD$，并且 $AD=BC$，我们得到一个矛盾．因此$\angle BDC$ 是锐角．

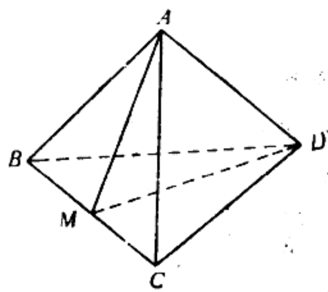

图 1

3.为使乘积能被10整除，必须其中至少有一个是5(哪些

A)，并且至少有一个是偶数 2，4，6，8 之一（事件 B）．令 $A+B$，AB，A'，$P(E)$ 分别表示 A 与 B 的并，交，A 的补，E 的概率．我们有

$$P(AB)=1-P(A')-P(B')+P(A'B'),$$

所以 $P(AB)=1-\left(\frac{8}{9}\right)^n-\left(\frac{5}{9}\right)^n+\left(\frac{4}{9}\right)^n.$

4.给出这个不等式我们希望决定 a，b，c，d，e，f 来满足这个不等式，对所有有理数 R，当 R 通过一个有理数列 $\to\sqrt[3]{2}$ 时，不等式左端逼近于零．结果，若令 $R=\sqrt[3]{2}$；左端必须是 0．

因此，

$$a\cdot 2^{\frac{2}{3}}+b\cdot 2^{\frac{1}{3}}+c=2d+e\cdot 2^{\frac{2}{3}}+f\cdot 2^{\frac{1}{3}}.$$

所以必须有 $a=e$，$b=f$，$c=2d$．代入到不等式，并两端提出公因式 $R-\sqrt[3]{2}$，得到

$$\frac{aR+b-d\cdot 2^{\frac{1}{3}}(R+2^{\frac{1}{3}})}{dR^2+aR+b}<1.$$

要满足上述不等式，只须令 a、b、d 是正整数且令 $a>d\cdot 2^{\frac{1}{3}}$，$b>d\cdot 4^{\frac{1}{3}}$．两个简单的选择是 $d=1$，$a=b=2$；或 $d=3$，$a=4$，$b=5$ 分别引导到

$$\frac{2R^2+2R+2}{R^2+2R+2} \text{ 或 } \frac{4R^2+5R+6}{3R^2+4R+5}.$$

值得指出的是第二个近似比第一个近似要好．

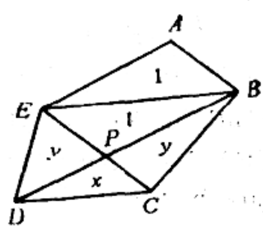

图 2

5.如图 2，因为

$$\triangle EDC=\triangle BDC=1,$$

这两个三角形到边 CD 上的高是相

等的，所以$DC\parallel EB$．类似有$BD\parallel AE$，$EC\parallel AB$．所以$ABPE$是平行四边形，并且$\triangle PEB=1$．令$\triangle EDP=y=\triangle PBC$，且$\triangle PDC=x$．就有$x+y=1$．以及

$$\frac{\triangle EPD}{\triangle EPB}=\frac{DP}{PB}=\frac{\triangle DPC}{\triangle CPB} \quad 或 \quad \frac{y}{1}=\frac{x}{y}.$$

所以$y^2+y-1=0$，且$y=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$．

$$面积(ABCDE)=2-y-x-y=\left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)^2.$$

为证有无限多个这样的非正五边形，可以构作一个任意三角形PDC其面积是x．延长CP到E及DP到B，使得$\triangle EDC=\triangle BDC=1$．再引$EA\parallel BD$且$AB\parallel EC$，从前面分析可得五边形有所需的性质．

（来源：美国数学月刊1973(80)，$P.276$）

第 二 届

（1973年5月1日）

试题

1.正四面体$ABCD$的内部有两个点P，Q，证明$\angle PAQ<60^\circ$．

2.令$\{X_n\}$和$\{Y_n\}$表示两个整数列如下：

$X_0=1$，$X_1=1$，$X_{n+1}=X_n+2X_{n-1}$　($n=1,2,3,\cdots$)，

$Y_0=1$，$Y_1=7$，$Y_{n+1}=2Y_n+3Y_{n-1}$　($n=1,2,3,\cdots$)．

因而，两个序列的前几项是

X：1，1，3，5，11，21，…；

$$Y: 1, 7, 17, 55, 161, 487, \cdots.$$

证明：除1以外，X，Y的项中没有公共元素.

3.在一个给定的正（$2n+1$）边的多边形中，随机选取三个不同的顶点确定一个三角形．如果这样的选取是等概率的，则给定多边形的中心属于三角形内部的概率是多少？

4.决定方程组

$$x+y+z=3,$$
$$x^2+y^2+z^2=3,$$
$$x^5+y^5+z^5=3$$

的所有的根(实的或复的).

5.证明三个不同的素数的立方根不能是一个算术级数的三项(不一定相邻).

解答

1.解一

不失一般性，可以假定四面体的每条边都是单位长，P、Q落在$\triangle BCD$的内部且PQ交边BC、CD分别于R、S(图3、4)，则$\angle PAQ<\angle RAS$．我们证明RS是$\triangle ARS$的最短边，它推出$\angle RAS<60°$．在$\triangle RSD$中，$\angle RSD>60°$，且$\angle RDS<60°$，所以$RD>RS$．由于$\triangle CRD\cong\triangle CRA$，$AD=AR$，所以$AR>RS$．类似地，$AS>RS$，所以$\angle RAS$相对于$\triangle ARS$的最小边，是小于$60°$.

解二

$$(RS)^2=x^2+y^2-2xy\cos 60°=x^2+y^2-xy,$$
$$(AR)^2=x^2-x+1, \qquad (AS)^2=y^2-y+1.$$

其中　$0\leqslant x,y\leqslant 1$.

因为 $x^2-x+1\geqslant x^2-xy+y^2$ 是等价于 $(1-y)(1+y+x)>0$，$AR\geqslant RS$. 类似地，$AS\geqslant RS$.

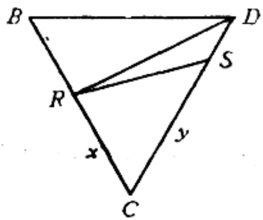

图 3

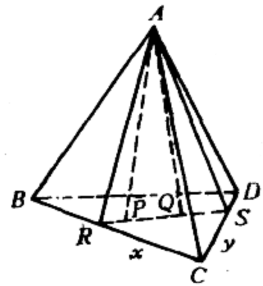

图 4

2.解一

考虑两个序列（$mod 8$）. $X_4=5+2\times3=11\equiv3(mod 8)$，$X_5=3+2\times5=13\equiv5(mod 8)$，$Y_2=2\times7+3\times1=17\equiv1(mod 8)$. $Y_3=2\times1+3\times7=23\equiv7(mod 8)$， 可以归纳得到这两个序列($mod 8$)是周期的.

X：1，1，3，5，3，5，…，

Y：1，7，1，7，1，7，….

所以，1是两个序列的唯一共同项. 因为 X，Y 的原始序列是递增的，所以1是唯一的公共项.

解二　利用差分方程可以证明 $X_n=\frac{1}{3}\{2^{n+1}+(-1)^n\}$，且 $Y_n=2\times3^n-(-1)^n$. 为了使X_m等于Y_n，必须有

$$2(3^{n+1}-2^m)=(-1)^m+3(-1)^n.$$

所以m和n必须奇偶性不同（因否则等式右端能被4整除，而等式左端不能）.