

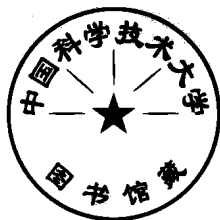
计算机辅助几何设计



国外航空编辑部

1978

计算机辅助几何设计



序 言

计算机辅助几何设计(简称 CAGD)的第一次国际会议是在一九七四年三月十八日至二十一日于美国犹他大学举行的,其目的在于展示 CAGD 方面的最新进展。采用“几何”这一单词,为的是将这一领域同计算机辅助“逻辑”设计加以区别。本书是经过编辑的该会议的文集。

在一九七一年于安纳波利斯举行的海军专题讨论会的总结中,戴维斯提出还有一个关于“图象和数学”的会议,该会议为海军研究所的利拉·布拉姆所赞助。从欧洲、北美的大学、工业部门和官办实验室中遍寻知名的代表。邀请了研究和使用的两方面的人士。到会者约一百二十人。在无拘束的气氛中,会议有充分的时间进行讨论。在犹他州大学和伊万斯与萨瑟兰公司举行了几次讨论和计算机图象仪表演。

贝齐尔和孔斯在 CAGD 方面已经起了基本的作用,大多数的发言者都提到了他们的开创性的工作这一事实就证明了这一点。会议文集的主要论题是孔斯曲面片、贝齐尔曲线和样条函数以及它们在 CAGD 方面的应用。

R. E. 巴恩希尔

目 录

- (一) 曲面片和B-样条曲线····· (1)
- (二) 计算几何学-它的成就与问题····· (18)
- (三) 三角域上的光滑插值 ····· (45)
- (四) 无扭曲约束的光滑插值 ····· (73)
- (五) 三角形域和矩形域上的曲面的
 图象表示 ····· (91)
- (六) B-样条曲线与曲面····· (97)
- (七) UNISURF 程序的数学与实践的前景 ··· (132)
- (八) 计算机辅助几何设计中用贝齐尔曲线
 作为新工具的约束插值法 ····· (159)
- (九) 非线性样条 ····· (181)
- (十) 几种处理张力样条的分段多项式 方法 ··· (211)
- (十一) 光滑参数曲面 ····· (237)
- (十二) 把空间曲线看作卷边 ····· (253)
- (十三) 在会话式计算机图象仪系统中参数双
 三次曲面在工程设计问题中的应用 ····· (261)
- (十四) 三维人-机对话····· (326)
- (十五) 一类局部插值样条 ····· (338)

曲面片和B-样条曲线

S. A. Coons

(锡拉丘兹 大学)

引 言

本文从回顾曲面片的方程开始，这种方程，读者可能熟悉，也可能不熟悉。介绍了曲面片的性质，但是没有证明。不过，通过切切实实的代数计算，证明它们还是比较简单的。

随后，引入了“均匀三次B-样条曲线”的概念，也还是没有推导、没有证明B-样条的公式，这类事情在别处已经做过了(参看：里森费尔德、德布尔及其他作者的文章)。这些(复合)曲线然后被用来确定曲面片的边界条件，并且也用来描述出现在曲面片方程中的“混合函数”。用B-样条曲线作曲面片边界的一个有趣后果是：有间断斜率(尖点)的边界引入之后，在曲面片的内部不产生尖的折缝。这是一个有趣的、看上去滑稽可笑的结果。

曲 面 片

一块“曲面片”是曲面的一部分，将它表示为具有两个自由度 u 及 w 的点 $(x y z)$ 在空间中运动而产生的轨迹是方便的。我们说，点是两个独立参变数的矢函数。

置 $P(u, w) = (P_x(u, w) \ P_y(u, w) \ P_z(u, w))$
 式中 P_x 、 P_y 、 P_z 是任意函数。可以限制变量 u 和 w 在 0 与 1 之间取值，这纯粹是为了使运算比较方便。矢量 $P(0, w)$ 和 $P(1, w)$ 是具有单自由度 w 的点的轨迹，所以它们是曲线。

同样， $P(u, 0)$ 和 $P(u, 1)$ 也是曲线。这四条曲线确定了曲面片的边界。现在，我们采用下列简化记号

$$P(u, w) = uw$$

$$P(0, w) = 0w$$

$$P(1, w) = 1w$$

$$P(u, 0) = u0$$

$$P(u, 1) = u1$$

我们引入某些单变量函数及其特殊记法，虽然只是对 u 写出的，但它也适用于变量 w ：

$$F_0(u) = F_0 u$$

$$F_1(u) = F_1 u$$

$$G_0(u) = G_0 u$$

$$G_1(u) = G_1 u$$

这里，我们干脆把括号去掉了。在我们这个行业中，这些函数叫做“混合函数”，因为，粗略地说，它们“混合”或“调配”边界曲线的形状以作出内部曲线，这些内部曲线确定了或勾画出该曲面。

可按下列方式定义一张特殊的曲面

$$uw = (F_0 u \ F_1 u \ G_0 u \ G_1 u) \begin{bmatrix} 0_w \\ 1_w \\ 0_{w_u} \\ 1_{w_u} \end{bmatrix}$$

$$+ (u_0 \ u_1 \ u_{0_w} \ u_{1_w}) \begin{bmatrix} F_0 w \\ F_1 w \\ G_0 w \\ G_1 w \end{bmatrix}$$

$$- (F_0 u \ F_1 u \ G_0 u \ G_1 u) \begin{bmatrix} 0_0 \ 0_1 \ 0_{0_w} \ 0_{1_w} \\ 1_0 \ 1_1 \ 1_{0_w} \ 1_{1_w} \\ 0_{0_u} \ 0_{1_u} \ 0_{0_{uw}} \ 0_{1_{uw}} \\ 1_{0_u} \ 1_{1_u} \ 1_{0_{uw}} \ 1_{1_{uw}} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} F_0 w \\ F_1 w \\ G_0 w \\ G_1 w \end{bmatrix}$$

戈登称它为“布尔和曲面”，又叫它为“双变数的超限的拉格朗日插值式”。他已经将它推广去插值曲线网。

在该方程中， $u_0, u_1, 0_w$ 及 1_w 不过是确定边界曲线的矢函数； $u_{0_w}, u_{1_w}, 0_{w_u}$ 及 1_{w_u} 是“跨越”边界的法矢。举个例子

$$u_{0_w} = \frac{\partial(uw)}{\partial w} \Big|_{w=0}$$

方阵（实际上是一个张量，因为它的每一个元素是一

个具有三个分量的矢量)中的量都是常矢量,它们可以从边界曲线函数和导矢函数求得。右下角那个子块的元素是矢量的交叉导矢,例如:

$$00_{uw} = \frac{\partial^2(uw)}{\partial u \partial w} \Bigg|_{\substack{u=0 \\ w=0}}$$

我们称这种量为曲面在角点上的扭矢,因为它较好地描述了几何的含义。我们称右下角这一子块为“扭矢子块”,它包含四个矢量,它们可以通过微分求得。例如,将 $0w_u$ 对 w 求导,然后在结果中代入 $w=0$ (或者 1),就给出 00_{uw} (或者 01_{uw})。

显然,在某种意义上,这方阵(张量)是多余的,因为边界条件已经包括为指定角点条件的充分的信息。我们需要知道关于混合函数 F_0, F_1, G_0 及 G_1 的一些内容(但并不很多)。因此,我们将对这些函数加上一些较弱的假设。考察 F_{ij} , 这是一个符号,代表 $F_{00},$ 或 $F_{01},$ 或 $F_{10},$ 或 F_{11} ; 类似地,考察 G_{ij} , 其中 $i=0,1$ 并且 $j=0,1$, 那末

$$\begin{bmatrix} F_{ij} & F_i{}'j & F_i''j \\ G_{ij} & G_i{}'j & G_i''j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_{ij} & 0 & 0 \\ 0 & \delta_{ij} & 0 \end{bmatrix}$$

自然, δ_{ij} 是克罗内克符号。右上角标“,”表示对独立变量求导。在图 1 中,我们作出了满足这些条件的函数 F 和 G 的图形。

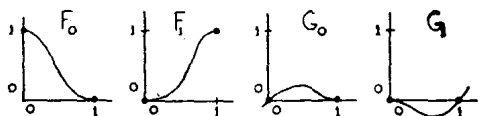


图 1

这些函数的“内部”形状不是极为重要的，我们只是关心这些函数和它们的一阶、三阶导数在 0 和 1 的行为。

当 F 和 G 函数服从克罗内克 δ 的条件时，就使得所得到的曲面具有良好的性质，即它“包含”或“通过”边界曲线；切矢函数“包含”边界导函数 $u_0w, u_1w, 0w_u$ 和 $1w_u$ ；并且边界上的二阶导矢是边界上 0 与 1 两个端点上的二阶导矢的加数组合。我们称这种边界导矢量是曲面所“固有的”。蕴含的推论是：我们可以把两张这样的曲面联接起来，保证跨过它们共有的边界时，它们是 C^2 级连续的，即曲率是连续的。两张或者一组这样的曲面片，仅假设边界曲线自身在各处有连续的曲率，这样即可产生一张组合曲面，它在各处至少有连续的曲率。

一个特殊的防错条件

若我们不打算指定边界切矢，但打算指定角点扭矢，以避免零扭矢子块会产生的伪平点，曲面片方程变为

$$\begin{aligned}
 uw = & (F_0u \ F_1u) \begin{bmatrix} 0w \\ 1w \end{bmatrix} + (u_0 \ u_1) \begin{bmatrix} F_0w \\ F_1w \end{bmatrix} \\
 & - (F_0u \ F_1u) \begin{bmatrix} 00 \ 01 \\ 10 \ 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_0w \\ F_1w \end{bmatrix} \\
 & + (G_0u \ G_1u) \begin{bmatrix} 00_{uw} \ 01_{uw} \\ 10_{uw} \ 11_{uw} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_0w \\ G_1w \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

可以调节最后一项的方张量中的四个矢量，以便除去伪平点。

B-样条

现已出现一种极其有吸引力的曲线形式，可以用来确定边界矢量 $u_0, u_1, 0w, 1w, u_0w, u_1w, 0w_u$ 与 $1w_u$ ；因为我们打算用比较简单的方式来描述这些曲线，于是列出以下公式来描述所谓的“均匀三次 B-样条”。

B-样条曲线上的一个点矢量是

$$P(u) = (S^3 \ S^2 \ S \ 1) \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_i \\ V_{i+1} \\ V_{i+2} \\ V_{i+3} \end{bmatrix}$$

其中

$S = FR(nu)$ —— 乘积 nu 的小数部分

$i = INT(nu)$ —— 乘积 nu 的整数部分

n —— 分段三次线段的数目，这些线段被联接起来组成复合曲线

V_i, \dots, V_{i+k} 表示顶点，可以想像，它们同贝齐尔多边形的顶点很相像。因为四个顶点确定一条三次线段， $n =$ 顶点个数减 3 = 三次线段的数目 (从 $4 - 3 = 1$ 开始)。

对这些分段三次的复合曲线有一些有趣的几何考虑。在每一处，它们都落在顶点多边形的凸包之内。在 $S = 0$ 或 $S = 1$ 时，曲线通过一点 P ，我们可称它是由三个接连的顶点形成的三角形之中线上的 $1/3$ 点。这从图 2 看得很清楚。在 P 点的一阶导矢是

$$P' = \frac{V_{i+2} - V_i}{2},$$

二阶导矢是

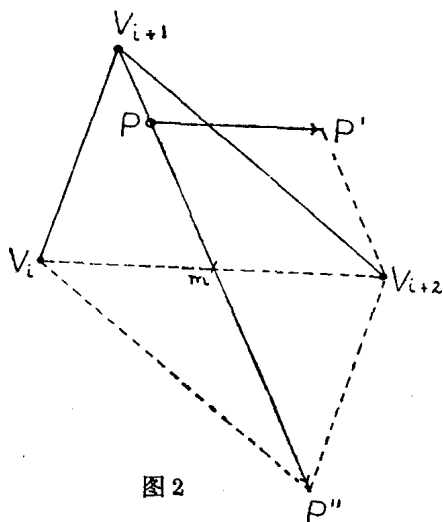


图 2

$$P'' = (V_i - V_{i+1}) + (V_{i+2} - V_{i+1})$$

这些极其简单的几何关系,允许我们得出关于B-样条的某些特殊情况。例如,当三顶点 V_0, V_1, V_2 共线时(图3),则三角形是退化的, P 是 V_1 到 m 这一中线上的 $1/3$ 点,切矢沿着 $V_0 V_1 V_2$,二阶导矢也同直线 $V_0 V_1 V_2$ 一致。

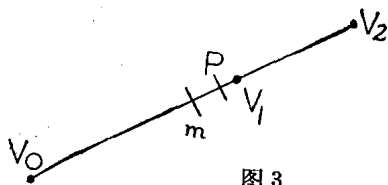


图 3

行列式

$$\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix} = 0$$

意味着有一个拐点,因此当 V_0, V_1, V_2 是三个共线的顶点时,曲线从一个拐点开始(或终止)。

当两顶点重合时(图4), 三次曲线段在P点开始(或终止), P位于 V_0 到 V_1V_2 上, 到双顶点 V_1V_2 的距离等于全距离的 $1/6$, 它仍然是一个拐点。

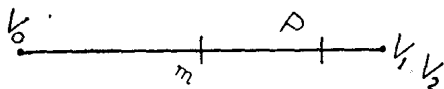


图4

最后, 当三顶点重合时(图5), 我们有七个顶点, 因而是四条曲线段。在图5中三次曲线段的交点(我们称之为“节点”)被圈了起来。在这些节点上, 曲线段是 C^2 级连续的。

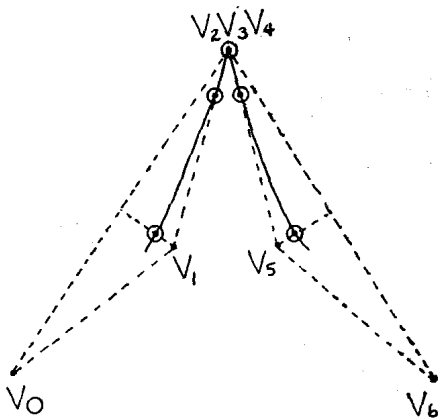


图5

在这里, 引人注意的是: 在三重顶点 $V_2V_3V_4$ 处, 复合曲线的斜率是不连续的(斜率是双值的)。但奇怪的是, 复合曲线的切矢及二阶导矢在那儿却是连续的。一阶和二

阶导矢在这样一点上同时退化为零，但即使如此，复合曲线在处处是 C^2 级连续的。

最后这一考虑表明一个反论：我们可以用一个连续两次可导的参数矢函数来表示一条带有尖点的曲线。

用B-样条作边界的曲面

我们可以采用这些B-样条作为一曲面的边界。例如：曲线 u_1 有一个尖角，且由四条线段组成。它的对边曲线 u_0 仅由一条线段组成。同样， $0w$ 是单一的三次线段，可是 $1w$ 由三段三次曲线组成（图6中，实心的黑点表示“节点”或者是组成这些复合形状的好几条分段三次线段的交接点）。

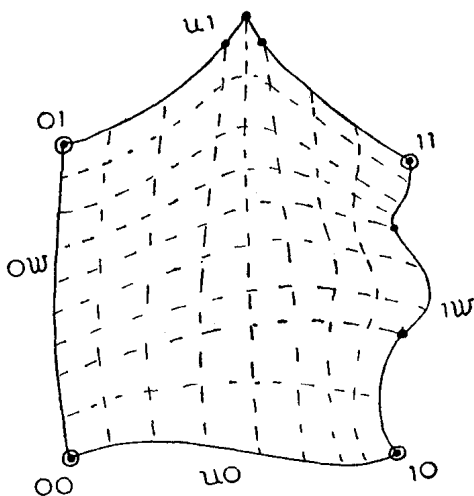


图6

曲面方程产生一张曲面，它在各处至少是 C^2 级连续的。令人吃惊的是，因为边界 u_1 有一尖角，从表面上看，

我们会以为它既不是 C^1 级连续也不是 C^2 级连续的。但是必须记住，我们使用的是单参数的矢函数以及它们的导矢。

当我们注意四条边界曲线的特征时，发现从“五边的”边界已经作成一张 C^2 级连续曲面。显然，这可以推广到任何 n 边的边界。

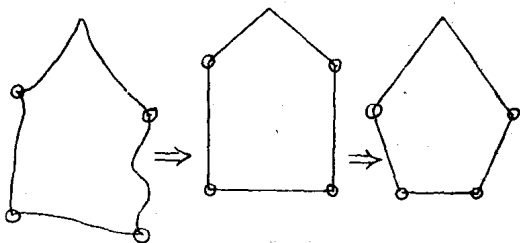


Figure 7

图 7

混 合 函 数

我们现在回过头来对于普遍存在的混合函数 F 和 G 作比较精确的定义。我们已经有了克罗内克 δ 假设：

$$\begin{bmatrix} F_{ij} & F'_{ij} & F''_{ij} \\ G_{ij} & G'_{ij} & G''_{ij} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_{ij} & 0 & 0 \\ 0 & \delta_{ij} & 0 \end{bmatrix}$$

打算采用三次曲线段去确定边界曲线与边界导矢。最好是将混合函数 F 和 G 也表示为一系列的三次式，这样，曲面方程将只依赖三次多项式。

考察 F_0 ，对于它，有明显的约定

$$\begin{aligned} (F_0 0 \quad F_0 1 \quad F_0' 0 \quad F_0' 1 \quad F_0'' 0 \quad F_0'' 1) \\ = (1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0) \end{aligned}$$

这是对 F_0 加上的六个约束，需要一个六阶多项式(即五次多项式)才能满足这些约束。采用 B-样条方程，我们可以把 F_0 构造成分段三次复合的函数，它在其接点上 C^2 级连续。

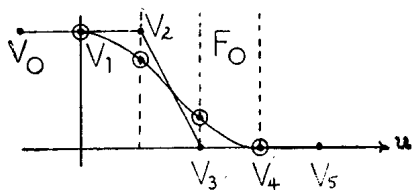


图 8

我们选择顶点

$$\begin{bmatrix} V_0 \\ V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

可分三段(顶点数 6 减 3 等于 3)，这些曲线段是

$$F_0 u = (S^3 \ S^2 \ S \ 1) \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\times \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$i = 0, 1, 2$$

$$S = FR(3u)$$

$$i = INT(3u)$$

也就是

$$F_{0i}u = (S^3 \ S^2 \ S \ 1) \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & -3 & -3 \\ 6 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$i = 0, 1, 2$$

类似地

$$F_{1i}u = (S^3 \ S^2 \ S \ 1) \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

其中 S 和 i 的定义与前相同。

G 函数也能由把三段三次式拼在一起来表示。对于 G_0 ，顶点 $V_0, V_1, V_2, V_3, V_4, V_5$ 必须这样选择，使得在 $u=0$ 的一阶导数

$$\left. \frac{dG_0}{du} \right|_{u=0} = 1$$

但 $S = 3u$ ，故 $ds = 3du$ ， $\frac{dG_0}{dS} = \frac{1}{3} \frac{dG_0}{du}$ ，

$$\frac{dG_0}{du} = 1, \quad \text{于是} \quad \frac{dG_0}{dS} = \frac{1}{3}。$$

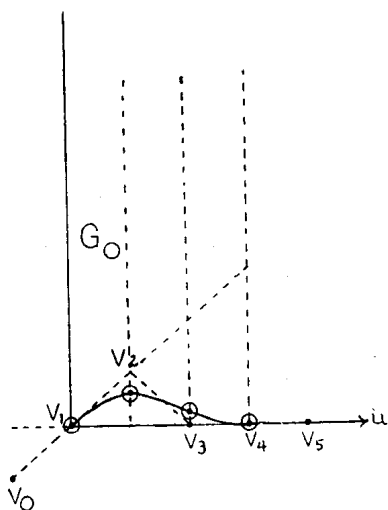


图 9

由此推出

$$\begin{bmatrix} V_0 \\ V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ 0 \\ \frac{1}{3} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$