

高师院校教学参考用书

中学数学教材教法

解析几何 分册
微积分

十三院校协作组编

一九八〇年八月

前 言

这一套教学参考用书是由北京师院、上海师院、广西师院、福建师院、东北师大、北京师大、上海师大、甘肃师大、江苏师院、华南师院、武汉师院、湖南师院、天津师院等十三所院校协作组共同讨论，分工编写的，初稿完成后，又经过陕西师大、昆明师院等二十多个单位参加的审稿会的讨论和修订，分代数，平面几何与立体几何、解析几何与微积分三个分册印出，作为高师院校教学参考书，在此，对参加审稿的同志们表示感谢。

在编写中，各部分都注意了从现行中学数学教学大纲和教材出发，在基础知识和基本训练方面，给以适当的提高和补充，并对现行中学数学教材中的一些主要的重点内容，进行了教材分析和教法探讨，便于即将从事和正在中等学校从事数学教学工作使用。

这三个分册，可供高师院校数学专业《中学数学教材教法研究》课的教学参考用书，也可作为中学、中专、中技学校的数学教师教学参考资料。

这一分册是由广西师院、武汉师院、东北师大编写，最后由东北师大李世金、张永顺同志统一编校付印的，书中不当之处，恳请使用本书的师生同志们指正。

编 者

一九八〇年八月

目 录

第一章 曲线与方程	(1)
一 平面上的各种坐标系	(1)
1.1 平面直角坐标系	(1)
1.2 斜角坐标系	(20)
1.3 仿射坐标系	(22)
1.4 极坐标系	(27)
1.5 建立坐标系的一般方法	(31)
习题一	(33)
二 曲线方程的意义	(36)
1.6 曲线方程的意义	(36)
1.7 解析几何的两个基本问题	(38)
习题二	(53)
三 极坐标系的曲线与方程	(55)
1.8 曲线的极坐标方程	(55)
1.9 极坐标方程的曲线的讨论	(61)
1.10 求轨迹的进一步例子	(75)
习题三	(77)
四 参数方程	(79)
1.11 曲线的参数方程	(79)
1.12 参数方程与普通方程之间的关系	(85)
1.13 参数方程的曲线的讨论	(97)

1.14	由给定几何条件, 求曲线 的参数方程的例子	(103)
1.15	直线参数方程的一些应用	(110)
	习题四	(113)
五	关于中学解析几何的教学	(117)
1.16	中学解析几何教材分析和处理	(117)
1.17	中学解析几何的教学法	(118)
第二章	二次曲线	(125)
一	坐标变换	(126)
2.1	代数曲线与超越曲线	(126)
1	代数曲线与它的次数	(126)
2	二次曲线的一般形式	(128)
2.2	坐标变换	(129)
1	坐标变换的一般形式	(129)
2	坐标变换的另一种解释——点变换	(130)
2.3	在坐标变换下二次方程系数 的变化规律	(135)
1	转轴时方程系数的变化的规律	(136)
2	移轴时, 方程系数的变化的规律	(136)
2.4	坐标变换下的不变性与不变量	(139)
1	坐标变换下代数曲线次数的不变性	(139)
2	坐标变换下的不变量	(141)
3	小结	(145)
二	二次曲线的中心和它的主径	(146)
2.5	二次曲线的中心	(146)

1	有关曲线中心的定义和定理·····	(146)
2	二次曲线中心的求法·····	(148)
3	二次曲线的分类·····	(148)
2.6	二次曲线的直径,共轭直径、主径·····	(149)
1	二次曲线直径的意义和 直径方程的一般形式·····	(150)
2	有心和无心二次曲线的直径和 共轭直径·····	(152)
3	二次曲线主径的确定·····	(154)
4	关于二次曲线主径的定理·····	(156)
三	二次曲线类型的判定和 二次曲线方程的化简·····	(160)
2.7	利用不变量判别曲线类型·····	(161)
1	中心型的分类·····	(161)
2	由不变式求出中心型曲线 的简化方程·····	(162)
3	非中心型各种类别的判定·····	(165)
4	小结·····	(170)
2.8	利用“不变式”、“中心”和“主径” 的理论化简方程、并作出图形·····	(171)
	习题五·····	(175)
四	二次曲线中几个问题的教学探讨·····	(176)
2.9	求曲线的轨迹方程的教法探讨·····	(176)
2.10	转轴公式及其应用·····	(184)

第三章 微积分初步·····(193)

一	微积分内容在中学数学教材 中的地位 and 作用.....	(193)
3.1	微积分内容在中学教材 中的地位 and 作用.....	(193)
二	数列与极限的教学.....	(197)
3.2	有限数列.....	(199)
3.3	无限数列.....	(214)
3.4	数列的极限.....	(216)
3.5	无限级数求和.....	(225)
三	导数和微分的教学.....	(236)
3.6	函数的极限.....	(236)
3.7	函数的连续性·两个重要极限.....	(245)
3.8	导数概念.....	(251)
3.9	导数求法.....	(255)
3.10	导数的应用.....	(263)
四	积分的教学.....	(285)
3.11	不定积分.....	(286)
3.12	定积分概念.....	(300)
3.13	定积分的计算.....	(304)
3.14	定积分的应用.....	(311)
3.15	定积分的近似值.....	(322)

第一章 曲线与方程

数学进入变量数学时期的一个决定性步骤是解析几何的建立。正如恩格斯所说：“数学中的转折点是笛卡尔的变数”。正是由于变数和坐标系的引进，才使形与数，几何与代数完满地结合起来，从而使人类对客观世界的运动规律的认识更加深刻，使数学更能适应生产实践和科学技术发展的需要，并为微积分的建立创造了条件，推动数学本身向前发展。

本章以笛卡尔的两个基本观点为线索，首先，在介绍了平面上点的各种坐标系的基础上讨论曲线方程的意义；其次对解析几何的两个基本问题，作了较深入的讨论，其中包括曲线的参数方程和极坐标方程及其应用；并且结合上述内容对中学数学教学中的有关内容作了一些初步分析和教法探讨。

一、平面上的各种坐标系

1.1 平面直角坐标系

笛卡尔的一个基本观点，就是用一对有序实数确定平面上点的位置的观点，也就是坐标的观点。笛卡尔在创建解析几何时所用的坐标系就是平面直角坐标系，为此至今人们所称平面直角坐标系为笛卡尔坐标系。为了深刻理解和熟练运用坐标的方法，我们从轴上有向线段的数量和直线上点的坐

标讲起。

1. 轴上有向线段的数量

一条直线有两个相反的方向，如果规定了其中一个方向为正方向，这样的直线，叫做有向直线或轴。

一条线段有两个端点，如果规定了其中一个端点为起点，则一个为终点，这样的线段，叫做有向线段，它的方向是从起点到终点的方向。

起点为 A ，终点为 B 的有向线段，记做 AB ，它的方向是从 A 到 B 的方向，

定义：轴 l 上有向线段 AB 的数量规定为用长度单位所量得 A 、 B 两点间的距离（即线段 AB 的长）带上正量（如果 AB 与轴同向）或负量（如果与轴反向）。

例如，在图 1—1 中轴 l 上两点 A 、 B 的距离是 5，

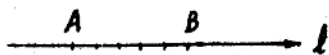


图 1—1

而 AB 与轴同向，所以 AB

的数量是 $+5$ ；又 BA 与轴反向，所以 BA 的数量是 -5 ，分别记做：

$$AB = +5, \quad BA = -5.$$

而把线段 AB 的长度是 5，记做：

$$|AB| = 5.$$

由此可见， AB 和 BA 的数量是互为相反的数，因为 AB 和 BA 的长虽然相同，但方向相反，即

$$|AB| = |BA| = 5, \quad AB = +5, \quad BA = -5.$$

一般地， $|AB| = |BA|$ ， $BA = -AB$ 。

为了进行轴上有向线段数量的计算，我们规定有向线段的加法如下：

定义. 设 A 、 B 、 C 为轴上任意三点 (图 1-2), 我们规定有向线段 AB 与有向线段 BC 的代数和为有向线段 AC , 写做:

$$AB + BC = AC. \quad (1)$$

这种方法的合理性, 可以用位移来说明: 即从 A 到 B , 再从 B 到 C , 其结果等于从 A 到 C . 必须注意, 第一有向线段的终点必须是第二有向线段的起点, 其相加的结果等于一个有向线段, 它的起点是第一有向线段的起点, 它的终点是第二有向线段的终点.

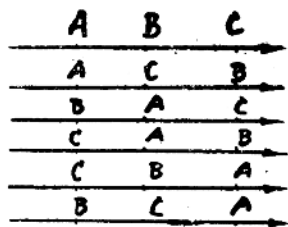


图 1-2

由于轴上有向线段的加法实际上是同一直线上连续两个位移的合成, 但这种位移的大小和方向完全由各有关有向线段的数量所决定, 因此 $AB + BC = AC$, 也就是已知 AB , BC 的数量计算 AC 的数量的公式.

一般地, 设轴上有 n 个点 $P_1, P_2, \dots, P_n$, 就有

$$P_1P_2 + P_2P_3 + \dots + P_{n-1}P_n = P_1P_n \quad (2)$$

2. 直线上点的坐标系

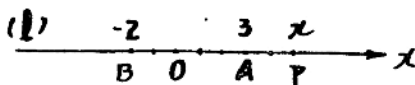


图 1-3

如果在轴 (l) 上取定了一点 O (叫做原点) 和一个长度单位 (如图 1-3). 设 P 是 l 上任意一点, 令点 P 与 OP

的数量 x 相对应, $OP=x$, 特别地点 O 与数零相对应, 于是直线 l 上的点的集合与全体实数的集合之间建立了一个一一对应的关系. 象这样取定了原点, 在规定了正向和长度单位的直线, 叫做数轴. 在数轴上与点 P 相对应的实数 x , 叫做点 P 的坐标, 记做 $P(x)$. 在图 1-3 中 $OA=+3$, $OB=-2$. 故点 A 、 B 的坐标分别是 $+3$ 和 -2 , 分别记做 $A(+3)$ 、 $B(-2)$.

3. 已知两点的坐标, 求有向线段的数量和两点间的距离.

设 $P_1(x_1)$, $P_2(x_2)$ 是轴 Ox 上两点. 那末 $OP_1=x_1$, $OP_2=x_2$. 如图 1-4.

由有向线段加法有

$$OP_1 + P_1P_2 = OP_2,$$

即

$$P_1P_2 = x_2 - x_1 \quad (3)$$

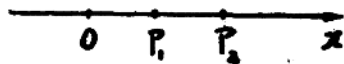


图 1-4

而 P_1 、 P_2 两点间的距离

$$d = |P_1P_2| = |x_2 - x_1| \quad (4)$$

这就是说: 轴上有向线段的数量等于它的终点坐标减去起点坐标的差, 而两点间的距离等于这两点的坐标差的绝对值.

4. 平面直角坐标系

为了确定平面上点的位置, 在平面上取两条互相垂直的有向直线, 一条叫 x 轴, 一条叫做 y 轴, 它们的交点 O 叫原点, 再取定一个长度单位, 平面上任意一点 P 的位置可以这样来刻画: 由 P 分别作 x 轴和 y 轴的垂线, 得到垂足 M 和 N . 设 M 在 x 轴上的坐标是 x , N 在 y 轴上的坐标是 y , 那末 P 点的位置便可以用一对有序实数, (x, y) 来表示

(图 1—5) 反过来, 给了一对有序实数 (x, y) 我们可以在 x 轴上和在 y 轴上分别确定唯一一点 M 和 N 使 M 在 x 轴上的坐标是 x , N 在 y 轴上的坐标是 y , 再由 M 和 N 分别作 x 轴和 y 轴的垂线, 得到交点 P . 也就是说 P 点和所给一对有序实数 (x, y) 相对应. 这样一来, 就在平面上的点的集合与有序实数对的集合之间建立了一个一一对应的关系.

象这样取定的两条互相垂直的且有确定方向的直线和长度单位一起, 叫做平面上一个直角坐标系, 记做 $O-xy$; 有序实数对 (x, y) 叫做点 P 在这坐标系下的坐标, x 为横坐标, y 为纵坐标, 记做 $P(x, y)$. x 和 y 可以直观地看做是从原点 O 位移到 P 时, 沿 x 轴和 y 轴方向的分位移, x 表示位移 OM , y 表示位移 ON (或 MP).

坐标轴将平面分成四个部分, 称为四个象限, 按其中点的坐标的符号为 $(+, +)$, $(-, +)$, $(-, -)$ 和 $(+, -)$, 分别称为第一、第二、第三和第四象限 (图 1—6).

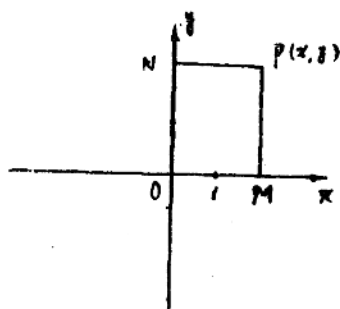


图 1—5

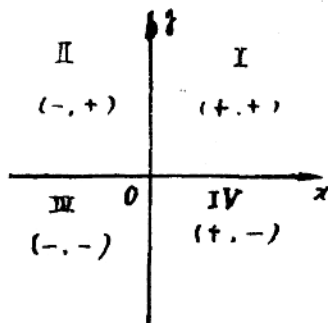


图 1—6

显然, x 轴上任一点的坐标, 具有形式 $(x, 0)$, y 轴

上任一点的坐标具有形式 (O, y) ；特别作为 x 轴和 y 轴的交点的坐标原点 O ，有坐标 (O, O) ，因此坐标轴不属于任何象限。

例1. 有一个边长等于 a 的等边三角形，取一边 AB 所在的直线作 x 轴，并且取这边的中点作原点，求这三角形三个顶点的坐标。

解 设顶点 C 在射线 Oy 上（图 1—7），由题设

$$OA = -\frac{a}{2}, \quad OB = \frac{a}{2},$$

$$OC = |OC| = |AC| \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} a,$$

$\therefore A, B, C$ 的坐标分别是：

$$\left(-\frac{a}{2}, 0\right), \left(\frac{a}{2}, 0\right), \left(0, \frac{\sqrt{3}}{2} a\right).$$

如果顶点 C 在射线 Oy 的反向延长线上，易见点 C 的坐标是，

$$\left(0, -\frac{\sqrt{3}}{2} a\right), \text{ 但 } A、$$

B 的坐标仍和原来一样。

由中学几何知道，如果直线 l 是线段 AB 的垂直平分线，就说 $A、B$ 两点关于直线 l 是对称的，同时也称 B 是 A 关于直线

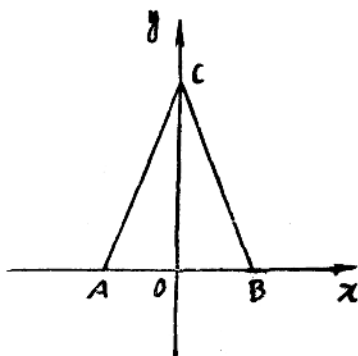


图 1—7

l 的对称点， A 是 B 关于直线 l 的对称点，这种对称叫做轴

对称，直线 l 叫做对称轴（图 1—8）。又如果点 C 是线段 AB 的中点，就说 A 、 B 两点关于 C 点对称，同时也称 A 是 B 关于 C 的对称点， B 是 A 关于 C 的对称点。这种对称叫做中心对称，点 C 叫做对称中心（图 1—9）。

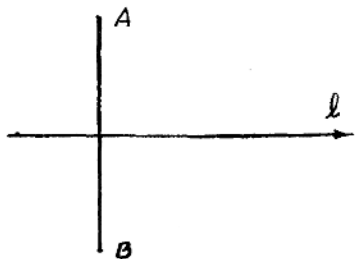


图 1—8

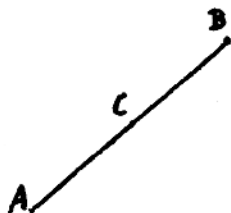


图 1—9

如图 1—10，设 $A(x, y)$ 是坐标平面上任意一点，那末点 A 关于 x 轴的对称点就是 $B(x, -y)$ ，点 A 关于 y 轴的对称点就是 $D(-x, y)$ ；点 A 关于原点 O 的对称点就是 $C(-x, -y)$ 。易见这时 $ABCD$ 正好构成一个中心在坐标原点而两邻边分别平行于两坐标轴的矩形。而矩形既是轴对称图形，又是中心对称图形，这里 x 轴和 y 轴正好是矩形

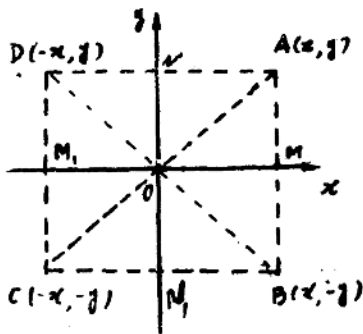


图 1—10

称图形，又是中心对称图形，这里 x 轴和 y 轴正好是矩形

$ABCD$ 的两条对称轴。因此只要知道其中一个顶点的坐标，就可确定其余三个顶点的坐标。

利用这种对称性，对某些问题的解决往往会带来方便。我们看下面的例子。

例2. 已知一个正六边形的边长等于 a ，如果原点在它的中心，并且横轴经过它的两个相对的顶点。试求这正六边形的顶点的坐标（图1—11）。

解：因为正六边形的顶心距即外接圆半径等于它的边长，又已知边长为 a 。

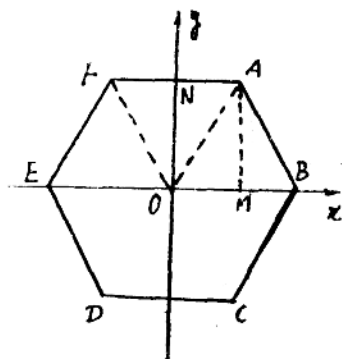


图 1—11

$$\therefore OB = |OB| = a.$$

因此 B 点的坐标是 $(a, 0)$ 。但 E 是 B 关于 y 轴的对称点，所以 E 的坐标是 $(-a, 0)$ 。

由 A 向 x 轴引垂线 AM ， M 为垂足。令 N 是 AF 与 y 轴的交点，则

$$OM = NA = \frac{a}{2},$$

$\therefore |ON|$ 是边长为 a 的正三角形的高， $\therefore$ 由例1，

$$ON = |ON| = \frac{\sqrt{3}}{2} a$$

所以点 A 的坐标是 $(\frac{a}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} a)$ 。

因为 A 、 C 关于 x 轴对称, A 、 F 关于 y 轴对称, A 、 D 关于原点 O 对称, 所以其他顶点可以直接写出如下:

$$C\left(-\frac{a}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}a\right), \quad F\left(-\frac{a}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}a\right),$$

$$D\left(-\frac{a}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}a\right).$$

5. 两点间距离公式和线段的定比分点

已知坐标平面上两点 $P_1(x_1, y_1)$ 和 $P_2(x_2, y_2)$, 那末 P_1 、 P_2 两点间距离

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad (5)$$

设线段 P_1P_2 有一个分点 $P(x, y)$, 已知

$$P_1P:PP_2 = \lambda$$

必须注意这里 λ 是有向线段 P_1P 与 PP_2 的数量的比, 那末在公式

$$\begin{cases} x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} \\ y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} \end{cases} \quad (6)$$

中, 当 $\lambda > 0$, P 为内分点; 当 $\lambda < 0$, P 为外分点, 而当 $\lambda = 0$, P 重合于 P_1 .

特别, 若 P 是 P_1P_2 的中点, 那末 $\lambda = 1$, 就有中点公式:

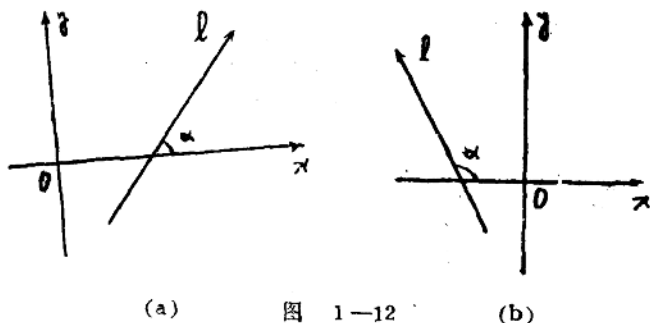
$$\begin{cases} x = \frac{x_1 + x_2}{2} \\ y = \frac{y_1 + y_2}{2} \end{cases} \quad (7)$$

这些都是在中学数学课程中学过的。

6. 直线方向的表示方法

在坐标平面上，表示一条直线的方向的方法，归纳起来，有下列三种：

(1) **倾角和斜率** 如果一条直线 l 与 x 轴平行，规定它的倾角 $\alpha = 0$ 。如果 l 与 x 轴不平行，那末 l 的倾角 α 定义为由 x 轴正向依反时针方向旋转到直线 l 的最小正角。（图 1—12(a) 和 (b)）。仔细分析上面的定义，就会看到，上述



定义等价于，如 $l \parallel x$ 轴，规定正向向右；如 l 与 x 轴不平行，规定正向向上。直线 l 的倾角 α 定义为由 x 轴的正向依反时针方向转到 l 的正向间的角。直线 l 的倾角 α 的范围是

$$0 \leq \alpha < \pi$$

称倾角 α 的正切为直线 l 的斜率，若用 k 表示，就有

$$k = \operatorname{tg} \alpha \quad (1)$$

如果已知直线 l 上任意两点的坐标 $P_i(x_i, y_i) \quad i=1, 2$ ，那末

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \quad (x_2 - x_1 \neq 0) \quad (2)$$

特别如果直线 l 过原点, 那末

$$k = \frac{y_1}{x_1}, \quad (x_1 \neq 0) \quad (3)$$

其中 (x_1, y_1) 是 l 上任一点 P_1 的坐标.

公式 (1) 可用于已知倾角求斜率或已知斜率求倾角. 公式 (2) 和它的特殊情形 (3) 既可用于已知直线上两点坐标求斜率, 也可用于已知斜率和一点坐标求直线方程. 这些都是中学解析几何的基本公式.

已知平面上两条相交直线 l_1 和 l_2 的斜率分别为 k_1 , k_2 , 求 l_1 和 l_2 的交角 φ 的下列公式

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 k_1} \quad (4)$$

是大家熟知的. 为了正确掌握和运用这一公式, 必须注意以下两点

- 1) 这里 φ 是从 l_1 按反时针方向到 l_2 的有向角;
- 2) 与此相对应, 在公式的右边分式的分子是终边 l_2 的斜率减去始边 l_1 的斜率即 $k_2 - k_1$. 因此若要求从 l_2 依反时针方向到 l_1 的有向角 φ , 只须在右边分式的分子换成 $k_1 - k_2$ 就行.

用倾角和斜率来表示直线的方向, 有两个缺点, 一是斜率 k 关于点的两个坐标不对称, 二是当 $\alpha = -\frac{\pi}{2}$ 时, 斜率 k 不存在. 为了克服这些缺点, 我们可以引进方向角和方向余弦的概念, 除了没有上述缺点以外, 还有一个便于推广到三维