高师院校教学参考用书

中学数学教材教法

解析几何
微积分
分册

十三院校协作組编

一九八〇年八月

前　　言

这一套教学参考用书是由北京师院、上海师院、广西师院、福建师院、东北师大、北京师大、上海师大、甘肃师大、江苏师院、华南师院、武汉师院、湖南师院、天津师院等十三所院校协作组共同讨论，分工编写的，初稿完成后，又经过陕西师大、昆明师院等二十多个单位参加的审稿会的讨论和修订，分代数，平面几何与立体几何、解析几何与微积分三个分册印出，作为高师院校教学参考书，在此，对参加审稿的同志们表示感谢。

在编写中，各部分都注意了从现行中学数学教学大纲和教材出发，在基础知识和基本训练方面，给以适当的提高和补充，并对现行中学数学教材中的一些主要的重点内容，进行了教材分析和教法探讨，便于即将从事和正在中等学校从事数学教学工作者使用。

这三个分册，可供高师院校数学专业《中学数学教材教法研究》课的教学参考用书，也可作为中学、中专、中技学校的数学教师教学参考资料。

这一分册是由广西师院、武汉师院、东北师大编写，最后由东北师大李世金、张永顺同志统一编校付印的，书中不当之处，恳请使用本书的师生同志们指正。

编　　者

一九八〇年八月

目　　录

第一章　曲线与方程

数学进入变量数学时期的一个决定性步骤是解析几何的建立．正如恩格斯所说：“数学中的转折点是笛卡尔的变数”．正是由于变数和坐标系的引进，才使形与数，几何与代数完满地结合起来，从而使人类对客观世界的运动规律的认识更加深刻，使数学更能适应生产实践和科学技术发展的需要，并为微积分的建立创造了条件，推动数学本身向前发展．

本章以笛卡尔的两个基本观点为线索，首先，在介绍了平面上点的各种坐标系的基础上讨论曲线方程的意义；其次对解析几何的两个基本问题，作了较深入的讨论，其中包括曲线的参数方程和极坐标方程及其应用；并且结合上述内容对中学数学教学中的有关内容作了一些初步分析和教法探讨．

一、平面上的各种坐标系

1.1　平面直角坐标系

笛卡尔的一个基本观点，就是用一对有序实数确定平面上点的位置的观点，也就是坐标的观点．笛卡尔在创建解析几何时所用的坐标系就是平面直角坐标系，为此至今人们所称平面直角坐标系为笛卡尔坐标系．为了深刻理解和熟练运用坐标的方法，我们从轴上有向线段的数量和直线上点的坐

标讲起.

1. 轴上有向线段的数量

一条直线有两个相反的方向，如果规定了其中一个方向为正方向，这样的直线，叫做有向直线或轴.

一条线段有两个端点，如果规定了其中一个端点为起点，则一个为终点，这样的线段，叫做有向线段，它的方向是从起点到终点的方向.

起点为A，终点为B的有向线段，记做AB，它的方向是从A到B的方向，

定义. 轴 l 上有向线段AB的数量规定为用长度单位所量得A、B两点间的距离（即线段AB的长）带上正量（如果AB与轴同向）或负量（如果与轴反向）.

例如，在图 1—1 中轴 l 上两点AB的距离是 5，而AB与轴同向，所以AB的数量是＋5；又BA与轴反向，所以BA的数量是－5，分别记做：

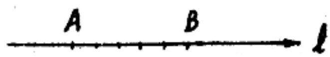


图 1—1

$$AB=+5, \quad BA=-5.$$

而把线段AB的长度是 5，记做：

$$|AB|=5.$$

由此可见，AB和BA的数量是互为相反的数，因为AB和BA的长虽然相同，但方向相反，即

$$|AB|=|BA|=5, \ AB=+5, \ BA=-5.$$

一般地，$|AB|=|BA|$，$BA=-AB$.

为了进行轴上有向线段数量的计算，我们规定有向线段的加法如下：

定义．设A、B、C为轴上任意三点（图1—2），我们规定有向线段AB与有向线段BA的代数和为有向线段AC，写做：

$$AB+BC=AC. \tag{1}$$

这种方法的合理性，可以用位移来说明：即从A到B，再从B到C，其结果等于从A到C．必须注意，第一有向线段的终点必须是第二有向线段的起点，其相加的结果等于一个有向线段，它的起点是第一有向线段的起点，它的终点是第二有向线段的终点．

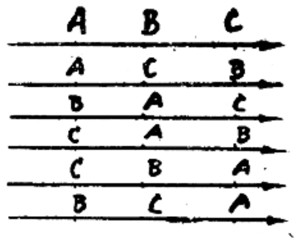


图 1—2

由于轴上有向线段的加法实际上是同一直线上连续两个位移的合成，但这种位移的大小和方向完全由各有向线段的数量所决定，因此$AB+BC=AC$，也就是已知AB，BC的数量计算AC的数量的公式．

一般地，设轴上有n个点P_1，P_2，……，P_n，就有

$$P_1P_2+P_2P_3+\cdots\cdots+P_{n-1}P_n=P_1P_n \tag{2}$$

2. **直线上点的坐标系**

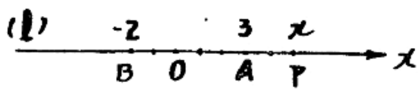


图 1—3

如果在轴（l）上取定了一点O（叫做原点）和一个长度单位（如图1—3）．设P是l上任意一点，令点P与OP

的数量x相对应，$OP=x$，特别地点O与数零相对应，于是直线l上的点的集合与全体实数的集合之间建立了一个一一对应的关系．象这样取定了原点，在规定了正向和长度单位的直线，叫做数轴．在数轴上与点P相对应的实数x，叫做点P的坐标，记做 $P(x)$．在图1—3中$OA=+3$，$OB=-2$．故点A、B的坐标分别是$+3$和-2，分别记做$A(+3)$，$B(-2)$．

3．已知两点的坐标，求有向线段的数量和两点间的距离．

设$P_1(x_1)$，$P_2(x_2)$是轴Ox上两点．那末$OP_1=x_1$，$OP_2=x_2$．如图1—4．

由有向线段加法有

$OP_1+P_1P_2=OP_2$，

即

$$P_1P_2=x_2-x_1 \quad (3)$$

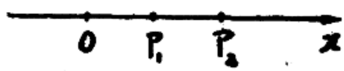


图 1—4

而P_1、P_2两点间的距离

$$d=|P_1P_2|=|x_2-x_1| \quad (4)$$

这就是说：轴上有向线段的数量等于它的终点坐标减去起点坐标的差，而两点间的距离等于这两点的坐标差的绝对值．

4．平面直角坐标系

为了确定平面上点的位置，在平面上取两条互相垂直的有向直线，一条叫x轴，一条叫做y轴，它们的交点O叫原点，再取定一个长度单位，平面上任意一点P的位置可以这样来刻划：由P分别作x轴和y轴的垂线，得到垂足M和N．设M在x轴上的坐标是x，N在y轴上的坐标是y，那末P点的位置便可以用一对有序实数，$(x，y)$来表示

（图 1 — 5 ）反过来，给了一对有序实数（x，y）我们可以在 x 轴上和在 y 轴上分别确定唯一一点 M 和 N 使 M 在 x 轴上的坐标是 x，N 在 y 轴上的坐标是 y，再由 M 和 N 分别作 x 轴和 y 轴的垂线，得到交点 P．也就是说 P 点和所给一对有序实数（x，y）相对应．这样一来，就在平面上的点的集合与有序实数对的集合之间建立了一个一一对应的关系．

象这样取定的两条互相垂直的且有确定方向的直线和长度单位一起，叫做平面上一个直角坐标系，记做 $O-xy$；有序实数对（x，y）叫做点 P 在这坐标系下的坐标，x 为横坐标，y 为纵坐标，记做 $P(x, y)$．x 和 y 可以直观地看做是从原点 O 位移到 P 时，沿 x 轴和 y 轴方向的分位移，x 表示位移 OM，y 表示位移 ON（或 MP）．

坐标轴将平面分成四个部分，称为四个象限，按其中点的坐标的符号为(＋，＋)，(－，＋)，(－，－)和(＋，－)，分别称为第一、第二、第三和第四象限（图 1 — 6 ）．

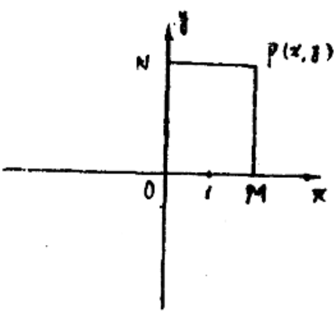


图　1 — 5

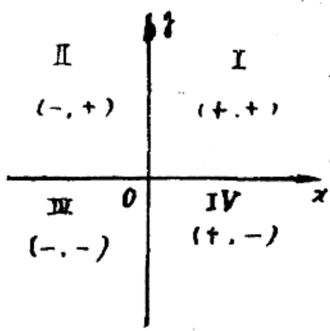


图　1 — 6

显然，x 轴上任一点的坐标，具有形式（x，O），y 轴

上任一点的坐标具有形式（O，y）；特别作为x轴和y轴的交点的坐标原点O，有坐标（O，O），因此坐标轴不属于任何象限.

例1. 有一个边长等于a的等边三角形，取一边AB所在的直线作x轴，并且取这边的中点作原点，求这三角形三个顶点的坐标.

解 设顶点C在射线oy上（图1—7）．由题设

$$OA=-\frac{a}{2}，OB=\frac{a}{2},$$

$$OC=|OC|=|AC|\sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{2}a,$$

∴ A，B，C的坐标分别是：

$$\left(-\frac{a}{2},\ 0\right),\left(\frac{a}{2},\ 0\right),\left(0,\ \frac{\sqrt{3}}{2}a\right).$$

如果顶点C在射线Oy的反向延长线上，易见点C的坐标是，$\left(0,\ -\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)$，但$A$、$B$的坐标仍和原来一样.

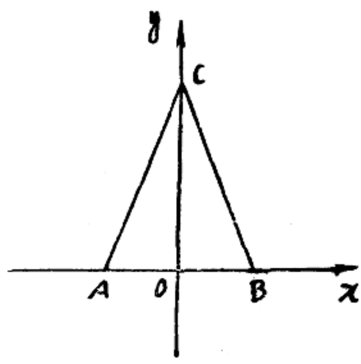


图 1—7

由中学几何知道，如果直线l是线段AB的垂直平分线，就说A、B两点关于直线l是对称的，同时也称B是A关于直线l的对称点，A是B关于直线l的对称点．这种对称叫做轴

对称，直线 l 叫做对称轴（图 1 — 8）. 又如果点 C 是线段 AB 的中点，就说 A、B 两点关于 C 点对称，同时也称 A 是 B 关于 C 的对称点，B 是 A 关于 C 的对称点. 这种对称叫做中心对称，点 C 叫做对称中心（图 1 — 9）。

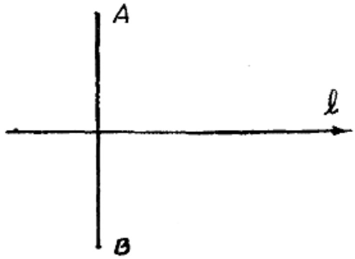


图 1 — 8

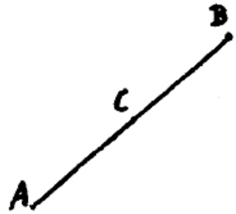


图 1 — 9

如图 1 —10，设 $A(x, y)$ 是坐标平面上任意一点，那末点 A 关于 x 轴的对称点就是 $B(x, -y)$，点 A 关于 y 轴的对称点就是 $D(-x, y)$；点 A 关于原点 O 的对称点就是 $C(-x, -y)$. 易见这时 $ABCD$ 正好构成一个中心在坐标原点而两邻边分别平行于两坐标轴的矩形. 而矩形既是轴对称图形，又是中心对称图形，这里 x 轴和 y 轴正好是矩形

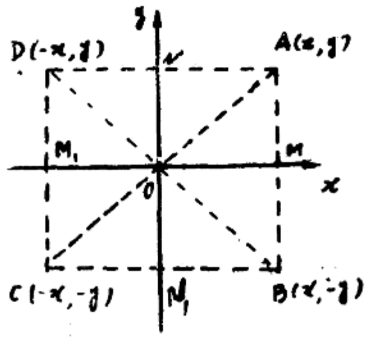


图 1 —10

$ABCD$的两条对称轴．因此只要知道其中一个顶点的坐标，就可确定其余三个顶点的坐标．

利用这种对称性，对某些问题的解决往往会带来方便．我们看下面的例子．

例2．已知一个正六边形的边长等于a，如果原点在它的中心，并且横轴经过它的两个相对的顶点．试求这正六边形的顶点的坐标（图1—11）．

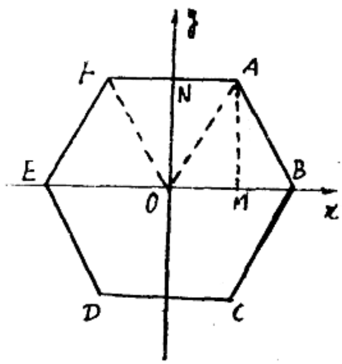


图 1—11

解：因为正六边形的顶心距即外接圆半径等于它的边长，又已知边长为a．

$\therefore \quad OB=|OB|=a.$

因此B点的坐标是（a，O）．但E是B关于y轴的对称点，所以E的坐标是$(-a, O)$．

由A向x轴引垂线AM，M为垂足．令N是AF与y轴的交点，则

$$OM=NA=\frac{a}{2},$$

$\because$ $|ON|$是边长为a的正三角形的高，$\therefore$由例1，

$$ON=|ON|=\frac{\sqrt{3}}{2}a$$

所以点A的坐标是$\left(\frac{a}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}a\right)$.

因为A、C关于x轴对称，A、F关于y轴对称，A、D关于原点O对称，所以其他顶点可以直接写出如下：

$$C\left(\frac{a}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{2}a\right),\quad F\left(-\frac{a}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}a\right),$$

$$D\left(-\frac{a}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

5．**两点间距离公式和线段的定比分点**

已知坐标平面上两点$P_1(x_1,\ y_1)$和$P_2(x_2,\ y_2)$，那末P_1、P_2两点间距离

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \tag{5}$$

设线段P_1P_2有一个分点$P(x,\ y)$，已知

$$P_1P:PP_2=\lambda$$

必须注意这里λ是有向线段P_1P与PP_2的数量的比，那末在公式

$$\begin{cases} x=\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda} \\ y=\dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda} \end{cases} \tag{6}$$

中，当$\lambda>0$，P为内分点；当$\lambda<0$，P为外分点，而当$\lambda=0$，P重合于P_1。

特别，若P是P_1P_2的中点，那末$\lambda=1$，就有中点公式：

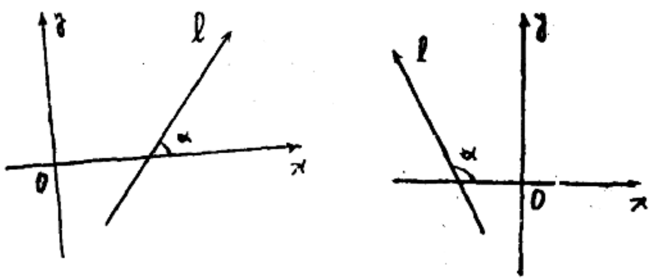
$$\begin{cases} x=\dfrac{x_1+x_2}{2} \\ y=\dfrac{y_1+y_2}{2} \end{cases} \tag{7}$$

这些都是在中学数学课程中学过的.

6. 直线方向的表示方法

在坐标平面上，表示一条直线的方向的方法，归纳起来，有下列三种：

(1) 倾角和斜率 如果一条直线 l 与 x 轴平行，规定它的倾角 $\alpha=0$. 如果 l 与 x 轴不平行，那末 l 的倾角 α 定义为由 x 轴正向依反时针方向旋转到直线 l 的最小正角. (图 1—12(*a*)和(*b*)). 仔细分析上面的定义，就会看到，上述



(a) 图 1—12 (b)

定义等价于，如 $l \parallel x$ 轴，规定正向向右；如 l 与 x 轴不平行，规定正向向上. 直线 l 的倾角 α 定义为由 x 轴的正向依反时针方向转到 l 的正向间的角. 直线 l 的倾角 α 的范围是

$$0\leqslant\alpha<\pi$$

称倾角 α 的正切为直线 l 的斜率，若用 k 表示，就有

$$k=\operatorname{tg}\alpha \qquad (1)$$

如果已知直线 l 上任意两点的坐标 $P_i(x_i, y_i)$ $i=1,2$, 那末

$$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}, \quad (x_2-x_2\neq 0) \tag{2}$$

特别如果直线 l 过原点，那末

$$k=\frac{y_1}{x_1}, \quad (x_1\neq 0) \tag{3}$$

其中 $(x_1,\ y_1)$ 是 l 上任一点 P_1 的坐标．

公式（1）可用于已知倾角求斜率或已知斜率求倾角．公式（2）和它的特殊情形（3）既可用于已知直线上两点坐标求斜率，也可用于已知斜率和一点坐标求直线方程．这些都是中学解析几何的基本公式．

已知平面上两条相交直线 l_1 和 l_2 的斜率分别为 k_1，k_2，求 l_1 和 l_2 的交角 φ 的下列公式

$$\mathrm{tg}\varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_2k_1} \tag{4}$$

是大家熟知的．为了正确掌握和运用这一公式，必须注意以下两点

1） 这里 φ 是从 l_1 按反时针方向到 l_2 的有向角；

2） 与此相对应，在公式的右边分式的分子是终边 l_2 的斜率减去始边 l_1 的斜率即 k_2-k_1．因此若要求从 l_2 依反时针方向到 l_1 的有向角 φ，只须在右边分式的分子换成 k_1-k_2 就行．

用倾角和斜率来表示直线的方向，有两个缺点，一是斜率 k 关于点的两个坐标不对称，二是当 $\alpha=\frac{\pi}{2}$ 时，斜率 k 不存在．为了克服这些缺点，我们可以引进方向角和方向余弦的概念，除了没有上述缺点以外，还有一个便于推广到三维