

数学大世界

数的畅想曲

SHU XUE DA SHI JIE

SHU DE CHANG XIANG QU



江苏少年儿童出版社

祖冲之(公元429—500年)
我国伟大的数学家，世界上第一个把圆周率计算到小数点后面7位数的人 ▶



乌龟背上的幻方 ▲

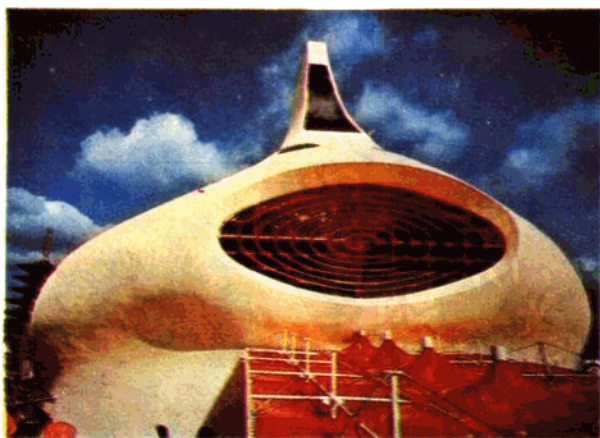


16世纪法国的“算术夫人”正在利用桌上的一些筹码教青年学习算术 ▶



◀ 阿基米德(公元前287—前212年) 古希腊著名数学家, 世界上最伟大的三个数学家之首

三千多年前人类就已经熟悉的各种几何体:
棱锥、圆锥、棱柱、圆柱、
椭球、立方体、圆台等等 ▶



在现代建筑中的圆



目 录

数的畅想曲

古人对数的认识	(1)
数进位制的来由	(4)
乌龟背上的数	(8)
有形状的数	(12)
赋予人性的数	(14)
刻在骨头上的数	(17)
和数学家捉迷藏	(19)
孪生质数之谜	(22)
一个迷人的猜想	(23)
古今大数谈	(25)
破碎数与完全数	(28)
半边黑半边红的数	(33)
黄金数和音乐数	(36)

形形色色的算术题

刻在泥板上的算术题	(39)
写在纸草上的算术题	(41)
用诗歌写成的算术题	(45)
写在遗嘱里的算术题	(49)

用民谣写成的算术题·····	(52)
大文豪出算术题·····	(56)
诗人与算术题·····	(60)
用童话编成的算术题·····	(66)
用竹棍摆成的算术题·····	(68)
古印度算术题·····	(72)

解题动画片

二分钱到哪儿去了?

——谈别把自己搞糊涂了····· (77)

狐狸的骗术

——谈掌握解题规律····· (81)

他俩何时左脚同着地?

——谈作图对解题的帮助····· (87)

怎样数石子?

——谈探求最简捷的算法····· (92)

画个口袋装胡桃

——谈自己出题考自己····· (96)

好提怪问题的爷爷

——谈学会思考和追问····· (99)

算术 A B C

能被 2、3、5、7、9、11、13 整除的数·····	(107)
使人发狂的运算·····	(109)
九九表和九九歌·····	(112)

长度单位的由来	(113)
为什么各月的天数不都一样?	(116)
十二生肖是怎样排列的?	(118)
规矩和方圆	(120)
圆周率 π 的由来	(122)
扔出个 π 来	(127)
捆地球的绳子	(128)
僧侣铺地面所想到的	(129)
分数、除法、比是一回事吗?	(132)
0 是不是偶数?	(134)
0 为什么不能作除数?	(134)
为什么 1 不是质数?	(135)

算术中的“迪斯尼乐园”

整数是数学的女王	(137)
四个 4 的游戏	(140)
虫食算	(141)
数字迷信	(145)
心算大王的奥秘	(147)
数字传奇	(151)
有趣的几何图画	(154)
“十三”的传说	(156)
韩信暗点兵	(158)
奇怪的赛程	(161)
聪明的法官	(163)

富翁失算	(165)
不会数学的猪八戒	(168)
小王子的智慧	(174)



数的畅想曲

古人对数的认识

远在文字出现之前，人类祖先就已经形成了数的概念。他们在很早以前就利用结绳或在木头上刻痕的办法来记数。比如美国纽约博物馆就藏有古代秘鲁用有颜色绳子编的一种叫“基普”的东西，绳子打了许多结。它是一种记数的工具。我国古书《周易》上也有“上古结绳而治”的记载。

五千多年前，古埃及人把数字写在一种纸草上，古巴比伦人把数刻划在泥板上，我们祖先是刻在乌龟甲和牛骨上。下面是古人1到5的写法：

古埃及数字	1	2	3	4	5
古巴比伦数字	1	2	3	4	5
中国甲骨文	一	二	三	四	五
现代阿拉伯数字	1	2	3	4	5

随着数字越来越大，用不断加划道道的方法不行了，需要创造出能表示大数的数字。三千年前出现了罗马数字，至今还有人在使用。比如钟表上就仍能见到罗马数字。

罗马数字：

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

据研究，I、II、III是表示1、2、3根手指，V表示一只手四指合并，大拇指张开的形状，这和我广东话有时将5说成“一巴掌”是一个道理。10写成X，表示两只手掌。6就是在5的右边加一道写成VI，意思是 $5 + 1 = 6$ ，而4是在5的左边加一道写成IV，意思是 $5 - 1 = 4$ 。

罗马数字、古埃及数字以及中国的筹算，都采用同一符号重复若干次之后再引入新的符号，防止重复次数太多。在罗马数字中同一符号最多写三次，比如30写成XXX，而40则写成XL，这里L是罗马数字50。又如80写成LXXX，而90则写成XC，这里C是罗马数字100。在古埃及数字中同

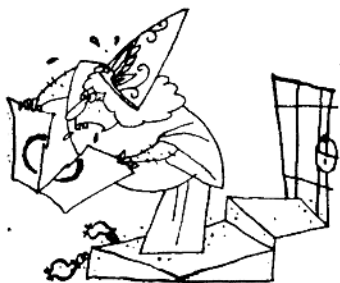
一符号可以重复九次，比如9写成

$$\begin{array}{c} \text{III} \\ \text{III} \\ \text{III} \end{array}$$
 罗马数字显然比古埃及数字进步。

在许多民族中，古代的数字常用一些名词来表示。比如，2用词“耳朵”、“手”、“翅膀”表示；4用“鸵鸟的脚趾”（鸵鸟四趾）表示。古代有些数字是用气象文字来写的。比如古埃及数字中的

1 10 100 1000 10000 100000

公元12世纪初，欧洲人开始将阿拉伯文的数学书译成拉丁文。意大利的斐波那契写成《算盘书》，这本书被学校作为教材使用了二百多年，影响很大。《算盘书》一开始就写道：“印度的九个数目字是9、8、7、6、5、4、3、2、1，用这九个数字以及阿拉伯人叫做零的记号0，任何数都可以表示出来。”



数字0，据英国史学家李约瑟考证，最初出现于中印边界，可能是两国人民共同创造的。数字0通过阿拉伯商人传入西欧，却受到罗马教会的反对。教皇尤斯蒂尼昂宣布：“罗马数字是上帝创造的，不允许0存在，

这个邪物加进来会玷污神圣的数。”有位罗马学者偷偷传播0，被教会发现。罗马教皇把他投入监狱，施以酷刑，用夹子把他十根手指紧紧夹住，使他两手残废不能再握笔写字，最后将该学者害死在监狱中。

数进位制的来由

最常用的十进位制，是因为人长有十根手指。“屈指可数”，说明手指是人计数时最方便的工具。



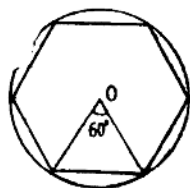
具。十个手指都数完了，就要考虑进位了。

南美的印第安人，数完了十根手指头接着再数十根脚趾，他们就使用20进位制。

介于澳大利亚北部的约克角半岛与伊利安之间的海峡，叫托列斯海峡。这个海峡附近的群岛上居住着一些部落。他们只靠两个数进行计算，“一”——“乌拉勃”和“二”——“阿柯扎”。遇到“三”就用“阿柯扎、乌拉勃”表示，“四”是“阿柯扎、阿柯扎”，“五”是“阿柯扎、阿柯扎、乌拉勃”，他们使用的是二进位制。

五进位制的手指记数法，最早起源于美洲。这种五进位制至今还在玻里尼亚群岛的居民中使用着。

1小时等于60分，1分等于60秒；圆周角为 360° ，每度60分，每分60秒。最早采用60进位制的是巴比伦人。他们为什么要用60进位制呢？现在有两种不同的看法：有的人认为巴比伦人最初以360天为一年，将圆周分为360度。太阳每天行一度。而圆内接正六边形的每边都等于圆的半径，每边所对的圆心角恰好等于 60° ，60进位制由此而来。另一些人认为巴比伦人早就知道一年有365天，选择60这个数是因为它是许多简单数字比如2、3、4、5、6、10、12等等的倍数； $60 = 12 \times 5$ ，12是一年包含的月数，而5是一只手的手指数。



古代各地区的进位制各不相同，连数的写法也不一样。我国继甲骨文和金文（铸在铜器上的文字，也叫钟鼎文）之后，开始用更方便的算筹来记数。“筹”就是竹质或骨质的

小棍。我国古代数学家就使用这些小棍，摆成不同的形式来表示不同的数目，并进行计算。1971年8月在陕西千阳县的一座西汉墓中，首次出土了骨质算筹，估计算筹的使用不会晚于公元前3世纪。

用算筹表示数目，有纵横两种方法：

纵式 | || ||| |||| ||||| T TT TTT TTTT
横式 — = ≡ ≡≡ ≡≡≡ ⊥ ⊥⊥ ⊥⊥⊥ ⊥⊥⊥⊥

⊥、TT、≡三个数字，解放前商人记帐时还经常用到。

用算筹摆数的原则在《孙子算经》中已有记载：“凡算之法，先识其位，一纵十横，百立千僵（百位是纵式，千位又是横式），千十相望，万百相当。”意思是：个位、百位、万位都用纵式；十位，千位都用横式。高位在左，低位在右，比如378就摆成⊥ || ≡。遇到零时，就留个空位，比如6708就摆成≡ ⊥ ≡。

巴比伦是使用60进位制，书写时也是低位在右，高位在左，比如𐎶表示1，𐎵表示10。

$$\begin{array}{ccc} \text{𐎶} & \text{𐎵𐎶𐎶} & \text{𐎵𐎶𐎶𐎶𐎶} \\ \underbrace{\hspace{1.5cm}} & \underbrace{\hspace{1.5cm}} & \\ 1 & 21 & 16 \end{array} = 1 \times 60^2 + 21 \times 60 + 16 = 4876$$

古埃及数字的排列次序，和我们的习惯恰好相反，他们把高位放在右边，低位放在左边。比如，1873就写成

II IIIII IIIII IIIII IIIII
I IIII IIIII IIIII IIIII

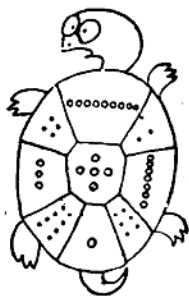
历史上曾出现过，由于错误地翻译了古埃及的记数体系，而产生了一个令人困惑不解的问题，这个问题直到不久以前才得到解决。原来，古希腊哲学家柏拉图（约公元前436—前349年），曾经根据雅典的伟大政治家和诗人梭伦（约公元前638—前559年）的回忆录，讲述了一个关于阿特兰蒂斯岛（大西岛）的故事。梭伦曾经游历过许多地方，这个故事是一些博学的埃及祭司告诉他的。这个故事说：在比梭伦那个时代早9000年的时候，有一次，巨大的灾难降临到阿特兰蒂斯岛，这个岛连同它的全体居民突然沉没到海里去了。据说，这个岛的面积是800000平方英里，因此，柏拉图不得不把它的位置安排到大西洋里去（大西洋这个名称就是这样得来的），因为整个地中海也容纳不下这么大的一个岛。近代对地中海海床所进行的地质考察表明，在地中海里确实曾经发生过一次非常巨大的火山爆发，它使米诺斯文化突然毁灭掉了。但是，这个事件大约发生在公元前1500年，也就是说，只比梭伦那个时代早900年，而不是早9000年。不仅如此，柏拉图在他写的《克利蒂亚斯》一书中描述的那个四面环山的肥沃平原，原来说是长3000斯达提亚（古希腊的长度单位，1斯达提亚=600英尺，即不到200米），宽2000斯达提亚。但是，如果把这个大小减为300×200，那就正好同克里特岛上的梅萨拉平原相符了。可见，使许多古代学者迷惑的大西岛之谜，是由于读错了古埃及数字而产生的，是把位值提高了一位（把100读成1000等等），使梭伦因数量相差10倍而犯了错误。其实，大西岛就是希腊南部的克里特岛。

据考查，世界大多数地区还是采用的十进位制。易勒斯曾做过调查，美国原始亚美利加各族的307种计数系统中，有

146种是十进位的，有106种是五进位或二十进位的，另外还有别的进位制。

乌龟背上的数

传说在很久以前，夏禹治水来到洛水。洛水中浮起一只大乌龟，乌龟背上有一个奇怪的图，图上有许多圈和点。这些圈和点表示什么意思呢？大家都弄不明白。一个人好奇地数了一下龟甲上的点数，再用数字表示出来，发现这里有非常有趣的关系。



把龟甲上的数填入正方形的方格中，不管是把横着的三个数相加，还是把竖着的三个数相加，或者把斜着的三个数相加，其和都等于15。

4	9	2
3	5	7
8	1	6

除了我国，别的民族也很早就知道这个神奇的方图。印度人和阿拉伯人认为这个方图具有一种魔力，能够避邪恶，驱瘟疫。直到现在，还可以在印度看见有人在脖子上挂着印有方图的金属片。犹太人认为方图中的1、3、9和希伯来文的字母对应，刚好写出“耶和華”（上帝）这个词。

传说、宗教当然是不足为信的。但是，这种方图却反映了正整数的一种性质。我国古代把这种方图叫“纵横图”或者“九宫图”；国外把它叫“幻方”。

纵横图是怎样排出来的？靠碰运气行吗？不行。下面介绍我国南宋数学家杨辉创造的排列方法：

先画一个图（右图），把1到9从小到大斜着排进图中。然后把最上面的1和最下面的9对调；最左边的7和最右边的3对调；最后把最外面的四个数，填进中间的空格中，就得到了乌龟背上的图了。

由9个数排列出来的是三阶“幻方”，下面再来看几个有代表性的三阶幻方：

		1		
	4		2	
7		5		3
	8		6	
		9		

		9		
	4		2	
3		5		7
	8		6	
		1		

（1）从0到8的三阶幻方。它的横、竖、斜行的三个数之和都是12（图1）；

（2）从1到17的奇数构成的三阶幻方（图2）；

（3）从0到16的偶数构成的三阶幻方（图3）。

幻方阶数越高，排起来越困难。如不掌握一定的方法，简直别想排出来。下面排一个四阶幻方：把1到16从左到右

7	0	5
2	4	6
3	8	1

（1）

11	1	15
13	9	5
3	17	7

（2）

14	0	10
4	8	12
6	16	2

（3）

依次排进方格中（图1），再把外正方形的两组对角上的两个数分别对调，内正方形的两组对角上的两个数分别对调，其余的数不动，得到图（2）。它的每一横行，每一纵列及两条对角线上的四个数之和都等于34。四阶幻方的排法不只一种，总共可以排出880种不同的四阶幻方。

利用杨辉创造的方法，可以把奇数阶幻方排出来，下面以五阶幻方为例来具体排一下：

首先把 1 到 25 按顺序斜着填进图 (1)，然后把上、下、左、右各三对数对调如图 (2)，最后再填入中间相应的空格中，就得到一个五阶幻方。电子计算机计算结果表明，五阶幻方共有 275395224 种，也就是二亿七千多万种排法，可真不少！

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

(1)

16	2	3	13
5	11	10	8
9	7	6	12
4	14	15	1

(2)

				1					
			6		2				
		11		7		3			
	16		12		8		4		
21		17		13		9			
	22		18		14		10		
		23		19		15			
			24		20				
				25					

(1)

		25		
	24		20	
11		7		3
4	12		8	16
	17	13	9	21
10	18		14	22
	23	19	15	
	6		2	
	1			

(2)

11	24	7	20	3
4	12	25	8	16
17	5	13	21	9
10	18	1	14	22
23	6	19	2	15

(3)