shuxuexuexi

数学学习

本期导读

- 格林公式及其应用
- 多元函数积分学的物理意义在解题中的应用
- 逆矩阵的求法
- 积分中对称思想的应用
- 高等数学（下）试卷
- 数学建模简介

2004 4 创刊号 第一期

创 刊 语

阳春三月，百花争艳，校园里到处是春意盎然的景象。《数学学习》杂志踩着春的旋律诞生了，她的诞生获得了巨大的支持。记得当时去宣传部申请刊号时，我是那么的忐忑不安，但在校领导和理学院的支持下，审批过程令我意想不到的顺利。我们杂志社全体成员感到兴奋和激动，但感到更多的是压力，因为她承载了同学们和老师们的期望。

刊号批准后，我们马上投入到筹稿和排版中，经过近两个月的忙碌，《数学学习》杂志创刊号在这春暖花开的季节和同学们见面了，我们相信，她会是一股清风，给我们带来学习的清凉；她更是一眼甘泉，给我们带来思考的干冽；她也会是我们学习的导航船，精湛的指导文章让我们掌握最好的学习高等数学的方法；她更是我们考试的助手，理学院提供的试卷让你尽快掌握重点，顺利通过考试。

在这里可以找到属于你的天空，你可以借此顺风帆、登云梯，为你期末考试、竞赛、考研增添成功的筹码。如果你对数学建模有兴趣的话，这里有最新的资讯，也许不久的金牌得主便是你。

杂志社的成立和筹稿过程中，承蒙理学院为我们成立专家组，为杂志质量严格把关，并提供了许多有价值的资料，在此表示衷心的感谢！

目 录

（2004年4月创刊号）

校内统一刊号：
JNYK 准字第 SP—02 号

食品学院主办
理学院协办

本刊编辑部电话：5501334
本刊投稿地址：
江大梅园校区 471A 信箱（214063）

封面介绍

新校区正在施工，你很想了解新校区的面貌吧！本期封面就将我们的豪华图书馆展入你的视野。

本刊声明：

热烈欢迎同学们踊跃投稿！来稿内容须联系高等数学教材，但形式可多样化，杜绝抄袭，否则后果自负。

校内统一刊号：
JNYK 准字第 SP—02 号

食品学院主办
理学院协办

本刊编辑部电话：5501334
本刊投稿地址：
江大梅园校区 471A 信箱（214063）

封面介绍

新校区正在施工，你很想了解新校区的面貌吧！本期封面就将我们的豪华图书馆展入你的视野。

本刊声明：

热烈欢迎同学们踊跃投稿！来稿内容须联系高等数学教材，但形式可多样化，杜绝抄袭，否则后果自负。

目　录

（2004 年 4 月创刊号）

格林公式及其应用

一，Green公式

定积分：$\int_a^b f(x)dx \xrightarrow{N-L公式}$ 边界点表示: $f(b)-f(a)$

二重积分：$\iint\limits_D f(x,y)dx \xrightarrow{Green公式}$ 边界表示:曲线积分

三重积分 $\iiint\limits_\Omega f(x,y,z)dv \xrightarrow{Gauss公式}$ 边界表示:曲线积分

1. 单连通区域

D为平面区域,如果D内任一闭曲线所围成的部分都属于D,则称D为“单连通区域”(不含“洞”或“点洞”)否则称D”复连通区域”.

D的L边界正向:沿正向走,D区域在左手.

2. Green公式

封闭 闭区域D由分片光滑的曲线L围成

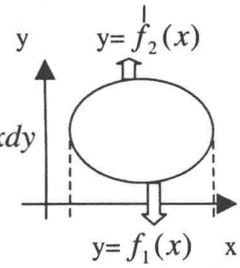
P(x,y),Q(x,y) 在D上具有一阶连续偏导数

$\Rightarrow \oint Pdx+Qdy$

$\Downarrow$

$\iint\limits_D (\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy$

正向 为D正向边界



说明：（1）若积分区域封闭，L负向，则 $\oint_L Pdx+Qdy=-\iint\limits_D(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy$

（2）若积分区域不封闭，则添辅助线，构造封闭

（3）Green公式的简单应用（注意”奇点”）

例：$Q=x,P=y$, D的面积 $S_0=\frac{1}{2}\oint_L xdy-ydx$

例题见书上

3.挖圆与挖椭圆

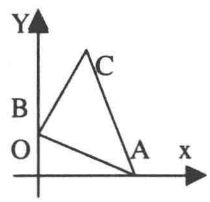
例题1：计算 $\oint_L \frac{(x+y)dx-(x-y)dy}{x^2+y^2}$

① L是以A（2，0） B（0，1） C（1，3）为顶点的三角形围界ABCA

② L是以A（2，0） B（0，1） E（-1，-1）为顶点的三角形围界AEBA

[解] $P=\frac{x+y}{x^2+y^2}$ $\qquad Q=\frac{y-x}{x^2+y^2}$

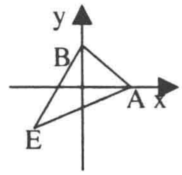
$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{x^2-2xy-y^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{\partial P}{\partial y} \qquad (x,y)\neq(0,0)$$



$(x,y)\notin(0,0)$

① $\oint_L Pdx+Qdy \xrightarrow{Green公式} -\iint_D(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})d\sigma=0$

② $(0,0)\notin D$ $\quad l: x^2+y^2=\varepsilon^2$ (ε 无穷小) 顺时针



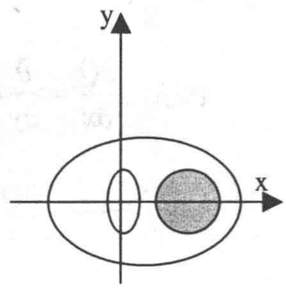
$\oint_{-L+l} Pdx+Qdy \xrightarrow{Green公式} \iint_D(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})d\sigma=0$

$\Longrightarrow \oint_L Pdx+Qdy=\oint_l\frac{(x+y)dx-(x-y)dy}{x^2+y^2}$ $\quad l:\begin{cases}x=\varepsilon\cos\theta\\ y=\varepsilon\sin\theta\end{cases}$

$=\int_{2\pi}^{0}\frac{[(\varepsilon\cos\theta+\varepsilon\sin\theta)(-\varepsilon\sin\theta)-(\varepsilon\cos\theta-\varepsilon\sin\theta)\varepsilon\cos\theta}{\varepsilon^2}d\theta$

$=\int_{2\pi}^{0}d\theta=2\pi$

例题2：计算I=$\oint_L\frac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}$,其中是以（1，0）为中心，R为半径（$R\neq1$）的圆周逆时针方向



[解]：$P=\frac{-y}{4x^2+y^2}$ $\qquad Q=\frac{x}{4x^2+y^2}$

$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{y^2-4x^2}{(4x^2+y^2)^2}\Longleftrightarrow\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{y^2-4x^2}{(4x^2+y^2)^2}$ $\quad (x,y)\neq(0,0)$

① R<1 $\qquad (x,y)\neq(0,0)$

$\oint_L Pdx+Qdy \xrightarrow{Green公式} \iint_D(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})d\sigma=0$

②R>1 $\qquad (x,y)\neq(0,0)$ 取椭圆：l: $4x^2+y^2=\varepsilon^2$(εc充分小）顺时针

$\oint_{L+l} Pdx+Qdy \xrightarrow{Green公式} \iint_D(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})d\sigma=0$

$\Longrightarrow \oint_L Pdx+Qdy=-\oint_l\frac{xdx-ydy}{4x^2+y^2}=\int_{2\pi}^{0}\frac{\varepsilon/2\cos\theta\varepsilon\cos\theta-\varepsilon\sin\theta(-\varepsilon/2\sin\theta)}{\varepsilon^2}d\theta$

$=\frac{1}{2}\int_{2\pi}^{0}d\theta=\pi$

二，平面上曲线积分与路径无关的条件

①概念

$$\left.\begin{array}{ll}\text{G—开区域} & \text{P,Q在G上一阶连续} \\ \text{假设A，B}\in\text{G} & \text{假设路径 } L_1, L_2\end{array}\right\} \Longrightarrow \text{称积分曲线} \oint_L Pdx+Qdy \text{ 在G内与路径无关}$$

（而与起点A，终点B有关）

$$\oint_{L_1} Pdx+Qdy = \oint_{L_2} Pdx+Qdy$$

另外可以推出：G内曲线积分与路径无关 $\Longleftrightarrow$ 封闭曲线 $\oint_L Pdx+Qdy=0$

② 路径无关的条件　　$\oint_L Pdx+Qdy=0$ 与路径无关

$$\left.\begin{array}{l}\text{定理：G：开区域，单连通} \\ \text{P，Q在G上一阶偏导数连续}\end{array}\right\} \quad \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$$

例题3：计算 $I=\int_L (x^2+2xy)dx+(x^2+y^4)dy$，其中L为由点（0，0）到点B（1，1）的曲线 $y=\sin\dfrac{\pi}{2}x$

[解]：$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial}{\partial y}(x^2+2xy)=2x$　　$\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial}{\partial x}(x^2+y^4)=2x$

$\Longrightarrow \dfrac{\partial Q}{\partial x}\equiv\dfrac{\partial P}{\partial y}$　　所以 $\oint_L Pdx+Qdy=0$ 与路径无关

故 $I=\int_L (x^2+2xy)dx+(x^2+y^4)dy=\int_0^1 x^2dx+\int_0^1(1+y^4)dy=\dfrac{23}{15}$，

例题4：计算 $I=\oint_L \dfrac{(x-y)dx+(x+y)dy}{x^2+y^2}$，其中L是从点A（-2，0）经抛物线 $y=8-2x^2$ 至点B（2，0）的弧度。

[解]　$P=\dfrac{x-y}{x^2+y^2}, Q=\dfrac{x+y}{x^2+y^2}$　因为 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{y^2-2xy-x^2}{(x^2+y^2)^2}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$　$(x,y)\neq(0,0)$

取 $l: x^2+y^2=4$ 上半圆，顺时针

因为与路径无关　所以 $I=\oint_L \dfrac{(x-y)dx+(x+y)dy}{x^2+y^2}$　　$l:\begin{cases}x=\varepsilon\cos\theta\\ y=\varepsilon\sin\theta\end{cases}$

（另见 29 页）

多元函数积分学的物理意义在解题中的应用

杨维 （陕西理工学院九九级自动化专业 陕西汉中 723003）

本文用高等数学知识和物理知识相结合，利用多元函数积分学的物理意义解决一类题目，显得相当简便。

例1 设 D 是以点 O(0,0).A(1,2)和 B(2,1)为顶点的三角形区域，求 $\iint\limits_D xdxdy$

解 直线 OA,OB 和 AB 的方程分别为 y=2x,y=1/2x 和 y=3-x

$$\iint\limits_D xdxdy = \iint\limits_{D_1} xdxdy + \iint\limits_{D_{2=}} xdxdy = \int_0^1 xdx\int_{x/2}^{2x} dy + \int_1^2 xdx\int_{x/2}^{3-x} dy = 3/2$$

本题若用形心公式则更为简便：

由形心公式 $\bar{x} = \dfrac{\iint\limits_D xd\sigma}{\iint\limits_D d\sigma}$ 得，$\iint\limits_D xd\sigma = \bar{x} \bullet \iint\limits_D d\sigma$ 形心横坐标为：$\bar{x} = \dfrac{0+1+2}{3} = 1$ 此三角形的面积为 3/2，所以此法具有通用性，对于规则的形体都适用。

例2 计算曲面积分 $I = \iint\limits_{\Sigma} \dfrac{xdydz + ydzdx + zdxdy}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$

其中 $\Sigma: x^2 + y^2 + z^2 = 1, 0 \le z \le 1$, 取上侧

解法一 化为对面积的曲面积分球面方程为在球面上任一点处法向量的方向余弦为

$\cos\alpha = x, \cos\beta = y, \cos\gamma = z$

于是 $I = \iint\limits_{\Sigma} \dfrac{xdydz + ydzdx + zdxdy}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} = \iint\limits_{\Sigma} \dfrac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}} ds = \iint\limits_{\Sigma} ds = 2\pi =$

若利用对坐标的曲面积分的物理意义计算此问题更为简便。

解法二将单位正电荷放在坐标原点(0,0,0),通过包围原点的任何闭曲面 S 外侧的电通量为

4π，即 $\oiint\limits_S \dfrac{xdydz + ydzdx + zdxdy}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} = 4\pi$

设下半球面为 $\Sigma_1 : z = -\sqrt{1-x^2-y^2}$ 取下侧, $S = \Sigma + \Sigma_1$ 所以

$$I = \iint\limits_{\Sigma} \frac{xdydz + ydzdx + zdxdy}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} = \frac{1}{2}\oiint\limits_S \frac{xdydz + ydzdx + zdxdy}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} = 2\pi$$

例题 3：求由抛物线 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ 和两坐标所围成的均匀薄板 D 饶过原点的直线的转动惯量的最大值和最小值（设密度为 1）

[解]：不妨先给出一种解法

设过原点的直线方程：y=kx, kx-y=0 饶它旋转的转动惯量为

$$\frac{1}{1+k^2}\iint_D (kx-y)^2 d\sigma = \frac{1}{1+k^2}\iint_D (k^2x^2-2kxy+y^2)d\sigma =$$

$$\frac{k^2}{1+k^2}\iint_D x^2 d\sigma - \frac{2k}{1+k^2}\iint_D xyd\sigma + \frac{1}{1+k^2}\iint_D y^2 d\sigma$$

由轮换对称性得 $\iint_D x^2 d\sigma = \iint_D y^2 d\sigma$，则 J= $\iint_D x^2 d\sigma - \frac{2k}{1+k^2}\iint_D xyd\sigma$

令 $(\frac{k}{1+k^2})' = \frac{1}{1+k^2} - \frac{2k^2}{(1+k^2)^2} = 0$，得 k=1 或 k=-1 又

$$\iint_D x^2 d\sigma = \int_0^1 x^2 dx \int_0^{(1-\sqrt{x})^2} dy = \int_0^1 x^2(1-2\sqrt{x}+x)dx = 1/4+1/3-4/7 = 1/84$$

$$\iint_D xyd\sigma = \int_0^1 xdx \int_0^{(1-\sqrt{x})^2} ydy =$$

$$1/2\int_0^1 x(1-\sqrt{x})^4 ydy = \int_0^1 t^3(1-t^4)dt = 23/40-4/7 = 1/280$$

所以
$$J_{\max} = 1/84+1/280 = 13/840(k=-1)$$
$$j_{\min} = 1/84-1/280 = 7/840(k=-1)$$

解法二从转动惯量的物理意义出发,由平行定理得到:物体饶过它质心的转动惯量最小，离它质心距离最远的转轴的转动惯量最大。本题是关于 $y=x$ 对称的匀质物体，其质心在 $y=x$ 轴上，且到 $y=-x$ 轴的距离最远，由上述结论知：在 $y=-x$ 处取得，在处 $y=x$ 取得，故

$$J_{\max} = 1/2\iint_D (-x-y)^2 d\sigma = \iint_D x^2 d\sigma + \iint_D xyd\sigma = 13/840$$

$$J_{\max} = 1/2\iint_D (x-y)^2 d\sigma = \iint_D x^2 d\sigma - \iint_D xyd\sigma = 7/840$$

[编者按] 从上面 3 例可以看出，多元函数积分学的物理意义在解题中相当精妙。类似的，还有力学在空间解析几何中的应用等。由此，我们平时要多注意灵活应用，注意学科间的综合，

摘自西北工业大学《高等数学研究》第六卷，2003，第一期

重积分换元积分法简介

张立卓 孙辉(大连海事大学数理系 辽宁大连 116026)

在同济四版高数中,重积分的换元法被列为选学内容。但对于准备参加数学竞赛和研究生入学考试的同学来说，有必要领会和掌握它。

1 二重积分换元法

设$f(x,y)$在xoy平面上的闭区域D上连续，变换T：$x=x(u,v), y=y(u,v)$将D变换为uov平面上的闭区域D^*，且满足

(1) $x(u,v), y(u,v)$在D^*上具有一阶连续偏导数；

(2) 在D^*上雅可比行列式

$$J(u,v)=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}\neq 0$$(注意：允许J（u，v）只在D^*内个别点或一条曲线上为零)

(3) 变换T：$D\to D^*$是一对一的，则有

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\iint_{D^*}f[x(u,v),y(u,v)]\,|J(u,v)|\,dudv$$

例 1 计算$I=\iint_D\frac{2x+y}{x^{\frac{3}{2}}}dxdy$，其中 D 由$y^2=2x, x+y=4, x+y=12$所围。

解法一

$$I=\iint_{D_1}\frac{2x+y}{x^{\frac{3}{2}}}dxdy+\iint_{D_2}\frac{2x+y}{x^{\frac{3}{2}}}dxdy=\int_2^8dx\int_{4-x}^{\sqrt{2x}}\frac{2x+y}{x^{\frac{3}{2}}}dy+\int_8^{18}dx\int_{-\sqrt{2x}}^{12-x}\frac{2x+y}{x^{\frac{3}{2}}}dy=32\sqrt{2}$$

解法二 依据 D 的边界线，作变量代换$T: y=u\sqrt{x}, y+x=v$,此时$D^*: -\sqrt{2}\le u\le\sqrt{2}$

$$4\le v\le 12, \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{vmatrix}=-\frac{2x+y}{2x^{\frac{3}{2}}}, |J|=\left|\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{2x+y}\right|,(注意:\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\left[\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right]^{-1})$$

$$I=2\iint_D dudv=32\sqrt{2}$$

上例可直接化为累次积分进行计算，换元法仅仅是一种可行的方法。但对有些题目而言，换元法恐怕是最佳的选择了。

例2 计算$I=\iint_D\sqrt{xy}dxdy$，其中 D 是由曲线$(\frac{x}{2}+\frac{y}{3})^4=\frac{xy}{6}$所围区域在第一象限内的那部分。

解 依据 D 的边界曲线作变换 T：$x=2\rho\cos^2\theta, D^*$：$\rho=\sin\theta\cos\theta \quad 0\le\theta\le\frac{\Pi}{2} \quad |J|=$

$12\rho\sin\theta\cos\theta$

$I=\iint\limits_D\sqrt{6}\rho\sin\theta\cos\theta\,|J|\,d\rho d\theta=12\sqrt{6}\int_0^{\frac{\Pi}{2}}d\theta\int_0^{\sin\theta\cos\theta}\rho^2\sin^2\theta\cos^2\theta=\frac{\sqrt{6}}{15}$ 变量变换的选取是一个带有技巧性的问题，但在重积分的计算中，由于运用变量代换的目的之一是简化积分区域 D，因此，变量代换的选取通常是与 D 的边界曲线所对应的曲线族有关的。

例3 计算$I=\iint\limits_D e^{\frac{y}{x+y}}dxdy$，其中$D$是由$x+y=1$与坐标轴所围

解法一 作代换T：$x+y=u, y=uv, D^*:0\le u\le 1, 0\le v\le 1$，（注意：u 一取定，在 D 内 x+y=u 即固定，其上$0\le y=uv\le u$，也即$0\le v\le 1$），$|J|=u$

$$I=\iint\limits_D ue^v dudv=\int_0^1 udu\int_0^1 e^v dv=\frac{1}{2}(e-1).$$

解法二 作代换T：$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta, D^*:0\le\theta\le\frac{\Pi}{2}, 0\le r\le\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}$，$|J|=r$

$$I=\iint\limits_D e^{\frac{\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta}}rdrd\theta=\int_0^{\frac{\Pi}{2}}d\theta\int_0^{\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}}rdr=\frac{1}{2}(e-1)$$

我们发现一题的多种代换解法，它使重积分的计算有多种选择。重积分的计算中，作变量代换不仅要考虑简化积分区域，使积分区域容易定限。也要考虑简化被积函数，使变换后易积。

2 三重积分换元法

设$f(x,y,z)$在$oxyz$空间的有界闭区域Ω上连续，变换T：$x=x(u,v,w), y=y(u,v,w), z=z(u,v,w)$将$\Omega$变换为$ouvw$空间的有界闭区域$\Omega^*$，且满足

（1）$x(u,v,w), y(u,v,w), z=z(u,v,w)$在$\Omega^*$上具有一阶连续偏导数；

（2）在Ω^*上雅可比行列式

$$J(u,v,w)=\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w}\\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w}\end{vmatrix}\ne 0$$

（注意：允许 J（u，v，w）只在Ω^*内个别点或一曲线、曲面上为零

（3）变换 T：$\Omega\to\Omega^*$是一对一的，则有

[编者按]本期同学们投稿很热烈，但由于版面有限，只好忍痛割爱，选了以下两篇学生论文。这两篇文章都是他们的心得。希望以后有更多的同学投稿，让大家分享你的思想与见解。一定要是自己方法的总结，文章要求短小精悍。

两道有趣的数学证明题

机械工程学院机自 0301 李朋 341A 信箱

学微分中值命题时，曾遇到这样两道题。

1：假设

$f(x)\in([a,b]\cap D(a,b))$,且$f(a)=f(b)=1$

求证：$\exists\xi,,\eta\in(a,b)$ 使$\ell^{\eta-\xi}*[f'(\eta)+f(\eta)=1]$

2：假设

$f(x)\in[a,b]\cap D(a,b)$,且$f(a)=f(b)=1$

求证：$\exists\xi$，$\eta\in(a,b)$,使$\ell^{\xi-\eta}*[f'(\eta)+f(\eta)=1]$

比较这两道题，已知条件相同，只有求证的"$\ell^{\eta-\xi}$"和"$\ell^{\xi-\eta}$"不同，怎么证呢？

1：证明：令：$g(x)=\ell^{x}f(x)$,则$g(x)\in([a,b]\cap D(a,b))$

$\therefore$由拉格朗日中值定理得：$\exists\eta\in(a,b$

使$g(a)-g(b)=f'(\eta)(a-b)$

即$\ell^{a}f(a)-\ell^{b}f(b)=\ell^{n}[f'(\eta)+f(\eta)](a-b)$

又$f(a)=f(b)=1$

$\therefore\ell^{a}-\ell^{b}=\ell^{n}[f'(\eta)+f(\eta)](a-b)\to(1)$

再利用拉格朗日中值定理得：

$\exists\xi\in(a,b)$

$\ell^{a}-\ell^{b}=\ell^{\xi}(a-b)\to(2)$

$(1)/(2)$得$:\ell^{\eta-\xi}[f'(\eta)+f(\eta)]=1$得证

2：证明：令：$g(x)=\ell^{x}f(x)g(x)\in([a,b]\cap D(a,b))$

由拉格朗日中值定理得：$\exists\eta\in(a,b)$

使$\dfrac{g(a)-g(b)}{\ell^{2a}-\ell^{2b}}=\dfrac{\ell^{\eta}[f'(\eta)+f(\eta)]}{2\ell^{2n}}$即$\dfrac{\ell^{a}-\ell^{b}}{\ell^{2a}-\ell^{2b}}=\dfrac{f'(\eta)+f(\eta)}{2\ell^{n}}\to q$

再用柯西中值定理得：$\exists\xi\in(a,b)$

使$\dfrac{\ell^{2a}-\ell^{2b}}{\ell^{a}-\ell^{b}}=\dfrac{2\ell^{2\xi}}{\ell^{\xi}}$即$\dfrac{\ell^{2a}-\ell^{2b}}{\ell^{a}-\ell^{b}}=2\ell^{\xi}\to t$

$q*t$得：

$\ell^{\xi-\eta}*[f'(\eta)+f(\eta)]=1$

比较两个证明，1 用了两次拉格朗日中值定理，2 用了两次柯西中值定理，用罗尔定理能不能做出来呢？

法二：

令$g(x)=\ell^{x}[f(x)-1]g(x)\in([a,b]\cap D(a,b))$

$\therefore g(a)=\ell^{x}[f(a)-1]=0, g(b)=0$

$\therefore$由罗尔定理得：$\exists\eta\in(a,b)f'(\eta)=0$使得$f'(\eta)=0$

即：$\ell^{\eta}[f'(\eta)+f(\eta)-1]=0$

$\therefore f'(\eta)+f(\eta)=1$

令：$\xi=\eta$则$\ell^{\xi-\eta}=\ell^{\eta-\xi}=1$

$\therefore \ell^{\eta-\xi}[f'(\eta)+f(\eta)]=1;$

$\ell^{\xi-\eta}[f'(\eta)+f(\eta)]=1$

说明：第二题是我的老师布置的作业题，很多同学却得出了 1 题中的结论，于是就问老师是不是题抄错了，老师当时也没有多加考虑，就把第二题改成了第一题，结果就把一道题变成了另一道题。至于“法二”有些同学说这种证法不对，但却说不出理由，不知大家怎么理解，有兴趣就和我交流。

（上接第 8 页）

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz=\iiint_{\Omega^*} f[x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w)]\,|\,J(u,v,w)\,|dudvdw$$

例 6 计算曲面$(\frac{x}{a}+\frac{y}{b})^2+(\frac{z}{c})^2=1(x>0,y>0,z>0,a>0,b>0,c>0)$及坐标平面所围立体的体积

解 观察积分区域的边界曲面，作变量代换T：$x=ar\sin\varphi\cos^2\theta, y=br\sin\varphi\sin^2\theta,$

$z=cr\cos\varphi,\Omega^*:0\le\theta\le\frac{\Pi}{2},0\le\varphi\le\frac{\Pi}{2},r\le1,|J|=abcr^2\sin\varphi\sin2\theta$

$$V=\iiint_{\Omega} dxdydz=\iiint_{\Omega^*} abcr^2\sin\varphi\sin2\theta drd\varphi d\theta=$$

$$abc\int_0^{\frac{\Pi}{2}}\sin2\theta d\theta\int_0^{\frac{\Pi}{2}}\sin\varphi d\varphi\int_0^1 r^2dr=\frac{abc}{3}$$

例7 计算曲面$(\frac{x}{a})^2+(\frac{y}{b})^2+(\frac{z}{c})^4=1$所围立体的体积。

解 观察积分区域的边界曲面，作变量代换T：$x=ar\sin\varphi\cos\theta, y=br\sin\varphi\cos\theta,$

$z=cr^{1/2}\cos^{1/2}\varphi,\Omega^*:0\le\theta\le2\Pi,0\le\varphi\le\Pi,0\le r\le1,|J|=\frac{abcr^{3/2}\sin\varphi}{2\cos^{1/2}\varphi}$

$$V=\iiint_{\Omega} dxdydz=\iiint_{\Omega^*}\frac{abcr^{3/2}\sin\varphi}{2\cos^{1/2}\varphi}drd\varphi d\theta=\frac{8}{5}\Pi abc$$

由一道书后习题所思

通信与控制工程学院通信0301　江海洋

抛物面$z=x^2+y^2$被平面$x+y+z=1$截成一椭圆，求原点到椭圆的最长与最短距离。（高数第五版下册习题88.10）

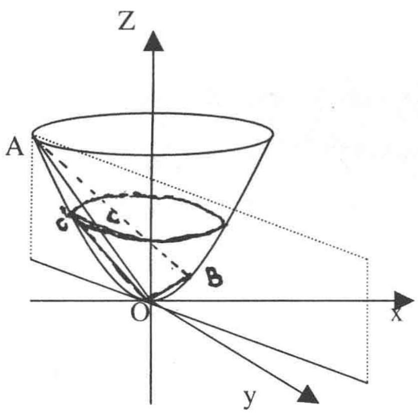
由几何图形对称性可知椭圆关于$y=x$对称且椭圆不平行于xoy面。

任取椭圆上一点C，连接CO，过C作平行于$x-y$面的平面截$z=x^2+y^2$，该圆与面$y=x$交于C'，则有$|C'O|=|CO|$。设最高点为A，在$y=x$面内有$|C'O|<|AO|$

可知最高点即为原点到椭圆最长距离所求点。

同理最低点即为原点到椭圆最短距离所求点。

由上分析则有如下解法：



$$\begin{cases} y=x \\ z=x^2+y^2 \\ x+y+z=1 \end{cases}$$

易得$z^2-4z+1=0,\quad z_{1,2}=2\pm\sqrt{3}$

距离$d=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{z+z^2}=\sqrt{5z-1}$

$$=\sqrt{9\pm5\sqrt{3}}$$

$$d_{\max}=|AO|=\sqrt{9+5\sqrt{3}}，\ d_{\min}=|BO|=\sqrt{9-5\sqrt{3}}$$

由上述思考还能得出更一般的结论：任何平面截$z=x^2+y^2$所成椭圆最高（低）点即为原点到椭圆最长（短）距离所求点。

对于此题，多数同学采取做法是构造拉格朗日函数，利用多元函数求极值。在用此方法的同时能否留意一下题目的几何意义呢？为何不作些对称、旋转、平移等做法呢？数形结合往往使我们对问题的解答和概念的理解更加清晰，有时还能收到意想不到的效果。如高数中函数和曲面的对应，导数，方向导数，积分等等。关注这些概念的几何意义，图形的几何性质，将对高数学习大有裨益。

重积分中对称思想的应用

食品学院　　周雍进

重积分中有些被积函数极其重要，从正面去积分极难求解，甚至求不出原函数，这时我们可转换角度去求解，其中一个很重要的方法——活用对称性。对称包括被积函数的对称，分区域关于原点，坐标轴的对称，甚至 $y=\pm x$ 的对称。

定积分中有一个漂亮结论

定理 1　若 f（x）的定义域为（-a，a）

$$f(x)=-f(-x) \text{ 则 } \int_{-a}^{a} f(x)dx=0$$

$$f(x)=f(-x) \text{ 则 } \int_{-a}^{a} f(x)dx=2\int_{0}^{a} f(x)dx$$

定积分有如此结论，重积分又如何呢？本文对多元函数重积分讨论，研究对称性在问题过程中的应用。

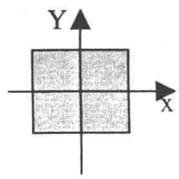
定理 2　二重积分中，若整个积分区域 D 为 Y 型区域且关于 Y 轴对称。

被积函数 f（x，y）关于 x 的奇函数，即　f（-x，y）= -f（x，y），

$$\text{则} \iint_D f(x,y)d\sigma=0$$

被积函数 f（x，y）关于 x 的偶函数时，即 f（-x，y）= f（x，y），

$$\text{则} \iint_D f(x,y)d\sigma=2\iint_D f(x,y)d\sigma$$



证明：积分区域如右图所示。

$$\iint_D f(x,y)d\sigma=\iint_{D_1} f(x,y)d\sigma+\iint_{D_2} f(x,y)d\sigma$$

若（1）：$f(-x,y)=-f(x,y), \iint_D f(x,y)d\sigma=\iint_{D_1} f(x,y)d\sigma+\iint_{D_2} f(x,y)d\sigma$

$$=\iint_{D_1} f(x,y)d\sigma+\iint_{D_2} -f(x,y)d\sigma=0$$

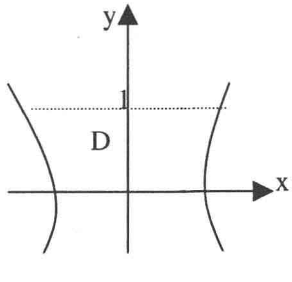
若（2）：$f(-x,y)=f(x,y), \iint_D f(x,y)d\sigma=\iint_{D_1} f(x,y)d\sigma+\iint_{D_2} f(x,y)d\sigma$

$$=\iint_{D_1} f(x,y)d\sigma+\iint_{D_2} f(x,y)d\sigma$$

$$=2\iint_{D_1} f(x,y)d\sigma$$

证毕

对于 y 有相应的性质。



例 1：求 $\iint_D xy^2dxdy$，区域 D 是有双曲线 x^2-y^2=1，

及直线 y=1,y=0 所围成的图形。

解：整个积分区域如图所示，此积分区域关于 y 轴对称，

而 $f(x,y)=xy^2$ 是关于 x 的奇函数，

由对称性知 $\iint\limits_D xy^2dxdy=0$，

可以看出，利用对称性简化了许多步骤。

定理 3：三重积分中，积分区域关于某个坐标面对称，如 xoy 面。

若 f（x，y，-z）=-f（x，y，z） $\iiint\limits_\Omega f(x,y,z)dv=0$

若 f（x，y，-z）=f（x，y，z） $\iiint\limits_\Omega f(x,y,z)dv=2\iiint\limits_{\Omega_1} f(x,y,z)dv$

证明：积分区域如图所示，分为 xoy 面上方的区域 Ω_1 和下方区域 Ω_2。

$$\iiint\limits_\Omega f(x,y,z)dv=\iiint\limits_{\Omega_1} f(x,y,z)dv+\iiint\limits_{\Omega_2} f(x,y,z)dv$$

(1)：当 f（x，y，-z）=-f（x，y，z）时

$$\iiint\limits_\Omega f(x,y,z)dv=\iiint\limits_{\Omega_1} f(x,y,z)dv+\iiint\limits_{\Omega_2} f(x,y,z)dv=\iiint\limits_{\Omega_1} f(x,y,z)dv+\iiint\limits_{\Omega 1} f(x,y,-z)dv$$

(2)：当 f（x，y，-z）=f（x，y，z）时

$$\iiint\limits_\Omega f(x,y,z)dv=\iiint\limits_{\Omega_1} f(x,y,z)dv+\iiint\limits_{\Omega_2} f(x,y,z)dv=\iiint\limits_{\Omega_1} f(x,y,z)dv+\iiint\limits_{\Omega 1} f(x,y,-z)dv$$

$$=\iiint\limits_{\Omega_1} f(x,y,z)dv+\iiint\limits_{\Omega 1} f(x,y,z)dv=2\iiint\limits_{\Omega_1} f(x,y,z)dv$$

说明：此题选择了积分区域关于面对称，被积函数 f（x，y，z）关于 x 的奇偶性来证明的。

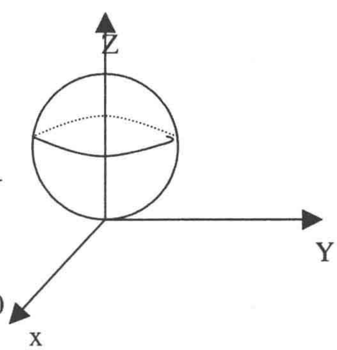
若积分区域关于 xoz 对称，被积函数关于 y 的奇偶。

若积分区域关于 zoy 对称，被积函数关于 x 的奇偶同样成立。

例 2：计算下列三重积分

（1） $\iiint\limits_\Omega \frac{|z|\ln(x^2+y^2+z^2+1)+z^3}{x^2+y^2+z^2+1}dv,\Omega是球体x^2+y^2+z^2=1$

（2） $\iiint\limits_\Omega (x+y+z)^2dxdydz,其中\Omega: x^2+y^2+z^2\le 2az$



解：(1) $I=\iiint\limits_\Omega \frac{|z|\ln(x^2+y^2+z^2+1)}{x^2+y^2+z^2+1}dv+\iiint\limits_\Omega \frac{z^3}{x^2+y^2+z^2+1}$

$=I_1+I_2$

Ω 关于 xoy 平面对称，z^3 为关于 z 的奇函数，由对称性知 $I_2=0$

$$I_1=2\iiint\limits_{\substack{x^2+y^2+z^2\le1\\ z\ge0}} \frac{z\cdot\ln(x^2+y^2+z^2+1)}{x^2+y^2+z^2+1}dv=2\int_0^{2\Pi}d\theta\int_0^{2\Pi}d\varphi\int_0^1\frac{r\cos\varphi\ln(r^2+1)}{r^2+1}r^2\sin\varphi dr$$

$$= 2\int_0^{2\Pi} d\theta \int_0^{\frac{\Pi}{2}} \sin\varphi\cos\varphi d\varphi \int_0^1 \frac{r^3 \ln(r+1)}{r^2+1} dr$$

$$= 2\Pi[(r^2+1)\ln(r^3+1)-(r^2+1)-\frac{1}{2}\ln^2(r+1)]\Big|_0^1 \quad = \Pi[4\ln 2-(\ln 2)^2-2]$$

(2) Ω 为球体 $x^2+y^2+(z-a)^2 \le a^2$，故区域关于 xoz,yoz 坐标面的对称。

$$I = \iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx)dxdydz$$

$$= \iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)dxdydz$$

$$= \int_0^{2\Pi} d\theta \int_0^{\frac{\Pi}{2}} d\varphi \int_0^{2a\cos\theta} r^2 \cdot r^2 \sin\varphi dr$$

$$= \frac{32}{15}\Pi a^5$$

Y 关于 xoz 为奇

$\Rightarrow \iiint\limits_{\Omega} 2xydv = 0$

同理: $\iiint\limits_{\Omega} 2yzdv = 0$

$\iiint\limits_{\Omega} 2xzdv = 0$

例 3：设 Ω：$0 \le z \le 1, x^2+y^2 \le 1$ 则 $\iiint\limits_{\Omega}(e^{z^3}\tan(x^2y^3)+3)dv =$ ______

解：此柱体关于 xoz 面对称，而 $e^{z^3}\tan(x^2y^3)$ 为关于 y 的奇函数。

根据三重积分对称性质：$\iiint\limits_{\Omega}(e^{z^3}\tan(x^2y^3))dv = 0$

原式= $\iiint\limits_{\Omega} 3dv = 3\Pi$

分析及说明，被积函数由多个函数组成，分别讨论其对称性，将复杂函数利用对称性简化运用。

(二) 轮换对称（亦即系统对称）：当积分区域 Ω 的边界方程和被积函数 f 同具有轮换对称（即在轮换 $x \to y, y \to z, z \to x$ 下, Ω 的边界方程和 f 具有形式不变性）。这时其利用主要有两点，即 $f(x,y,z) = f(x,z,y) = f(z,x,y)$，便可用轮换对称。

例 4：计算积分

(1) $\iiint\limits_{\Omega} x^2 dv$；$\Omega$是由$x^2+y^2+z^2=R^2$所围第一象限的部分

(2) $\iiint\limits_{\Omega}(x+z)^{-(x^2+y^2+z^2)}dxdydz$；$\Omega$是区域$1 \le x^2+y^2+z^2 \le 4, x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0$

解：(1) 由于 Ω 关于 x,y,z 具轮换对称性，所以 $\iiint\limits_{\Omega} x^2 dv = \iiint\limits_{\Omega} y^2 dv = \iiint\limits_{\Omega} z^2 dv$，

于是 $I = \frac{1}{3}\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)dv$