

自动控制系统

下 册

北京工业学院二系 231 教研室

1981.7

目 录

第六章 复合控制

§ 6-1 引言	1
一、开环控制系统和闭环控制系统的局限性	1
二、扰动补偿和不变性原理	2
三、复合控制系统	2
§ 6-2 不变性原理的基本理论	3
一、控制系统的微分方程	3
二、不变性原理的一般数学提法	4
三、控制系统的不变性条件	9
1. 对扰动的补偿条件	11
2. 对偏差控制系统的误差补偿条件	15
四、控制系统的不变性分类	16
1. 绝对不变性	16
2. 完全不变性	16
3. 准确到 ε 的不变性	16
4. 准确到高阶无差度的不变性	16
5. 选择不变性	16
§ 6-3 控制系统中实现不变性条件的判据	16
§ 6-4 控制系统中实现不变性条件的结构形式	22
一、扰动的直接测量	23
二、扰动的相对测量	35
1. 相对于控制对象的	25
2. 相对于控制器某物理量来测量扰动	27
3. 相对于控制作用来测量扰动	28
三、扰动的间接测量	29
1. 反馈联接方式	29
2. 顺馈加反馈的联接方式	31
3. 顺馈联接方式	32
四、对控制信号的间接测量	33
§ 6-5 复合控制系统的设计计算	34
一、复合控制系统设计计算的特点	35
二、用误差系数法计算复合控制系统	37

三、用对数频率法计算复合控制系统	42
1. 复合控制系统计算依据的基本关系式	43
2. 希望等效开环对数幅频特性低频区的绘制	44
3. 希望等效开环对数幅频特性中频段的绘制	49
4. 用对数频率法计算复合控制系统举例	55
§ 6-6 双电机传动复合控制系统	61
一、双电机传动装置的特点	62
二、复合控制双传动系统的结构形式	66
三、复合控制双传动系统的稳态特性	67
四、复合控制双传动系统的动态特性	73
五、复合控制双传动系统的设计计算问题	74

第七章 非线性控制系统

§ 7-1 控制系统的非线性及其现象	76
一、什么是非线性控制系统	76
二、几种常见非线性因素及非线性特性	77
1. 饱和性	77
2. 死区(不灵敏区)	77
3. 机械传动间隙(空回)	77
4. 磁滞环	78
5. 摩擦	78
6. 继电型非线性特性	79
三、非线性控制系统的主要特性	80
四、非线性控制系统的分析设计方法	82
1. 线性化法	82
2. 描述函数分析法(谐波线性化)	83
3. 相平面法(状态轨迹法)	84
4. 李雅普诺夫第二方法	84
§ 7-2 非线性控制理论的简要复习	84
一、相平面分析法	84
1. 相平面图	84
2. 根据相迹图判断系统特性	85
二、描述函数分析法	87
1. 描述函数	87
2. 用描述函数分析非线性系统稳定性	88
三、李雅普诺夫稳定性分析	92
1. 稳定性定义	92

2. 用李雅普诺夫第二方法判断系统稳定性·····	94
§ 7-3 非线性因素对系统性能的影响·····	94
一、饱和特性的影响·····	94
二、死区的影响·····	97
三、间隙的影响·····	98
四、摩擦的影响·····	100
§ 7-4 消除控制系统中不利的非线性因素·····	102
一、用局部反馈削弱非线性因素·····	102
二、振荡线性化·····	104
1. 用振荡方法将干摩擦特性线性化·····	104
2. 外加周期振荡消除死区的影响·····	105
3. 振荡线性化的其它应用·····	106
§ 7-5 非线性控制系统·····	107
一、继电系统·····	107
二、具有非线性增益的控制系统·····	109
1. 为使动态性能好采用可变增益的非线性控制系统·····	109
2. 为提高稳态精度采用变增益非线性控制系统·····	112
§ 7-6 非线性校正·····	113
一、非线性反馈·····	113
二、非线性串联校正·····	115
三、用非线性补偿惯性环节的影响·····	117
§ 7-7 控制系统中非线性的其它应用·····	122
一、速度限制·····	122
二、电机力矩限制·····	124
三、反馈电压限制·····	124

第八章 自动控制系统的设计问题

§ 8-1 引言·····	126
一、自动控制系统设计的大致内容·····	126
二、技术条件的主要内容·····	127
§ 8-2 执行电动机的选择与计算·····	128
一、负载运动分析·····	129
二、执行电动机的选择与计算·····	134
1. 力矩电机的选择·····	135
2. 一般电机的选择·····	135
三、传动装置的选择问题·····	142
§ 8-3 敏感元件与放大装置的选择问题·····	145

§ 8-4 用对数频率特性综合校正装置的方法	149
一、概述	149
二、开环希望对数幅频特性	149
三、串联校正装置的综合	154
四、负反馈校正装置的综合	155
§ 8-5 用根轨迹综合校正装置的方法	159
一、概述	159
二、串联微分校正装置的综合	162
三、串联积分校正装置的综合	166
四、串联微分积分校正	169
五、速度负反馈的综合	169
§ 8-6 综合校正装置的传递函数法	171
一、概述	171
二、最优传递函数	172
1. 阶跃信号作用下的最优传递函数	177
2. 斜坡信号作用下的最优传递函数	177
3. 求取最优传递函数的步骤	178
三、串联校正装置的综合	181
四、状态反馈的设计	183
五、部分状态反馈的设计	185
§ 8-7 关于线性补偿问题的讨论	191
一、各种线性补偿措施简评	191
1. 串联校正	191
2. 顺馈校正	192
3. 负反馈校正	192
4. 正反馈校正	194
5. 复合控制	194
6. 复式反馈(选择性反馈)	194
二、用系统灵敏度讨论系统的结构	195

第九章 自动控制系统的模拟

§ 9-1 概述	199
§ 9-2 应用电子模拟计算机模拟控制系统	200
一、计算机运算放大器的运算原理	200
二、系统各基本环节的模拟线路	202
1. 放大环节(比例环节)	202
2. 积分环节	203

3. 微分环节.....	203
4. 惯性环节.....	203
5. 振荡环节.....	204
6. 实际微分环节.....	205
7. 实际的一阶微分环节.....	206
8. 延时环节.....	207
三、系统各典型非线性的模拟电路.....	210
1. 饱和特性.....	210
2. 间隙特性.....	211
3. 死区特性.....	211
四、按自动控制系统动态环节结构来建立系统的模拟线路.....	212
五、按控制系统的微分方程式建立系统的模拟线路.....	219
六、与实际系统相连接的模拟装置.....	223
七、模拟装置因变量与时间比例尺的确定.....	224
§ 9-3 应用数字计算机模拟控制系统.....	226
一、模拟系统的数值解法.....	227
二、连续系统的模拟.....	233
1. 微分方程组的建立.....	233
2. 程序框图设计.....	234
3. 系统数字模拟实例及计算程序.....	234
4. 应用阿当姆斯法解系统常微分方程的系统模拟方法.....	243
三、离散系统的模拟.....	248

第十章 最优控制系统

§ 10-1 概述.....	252
一、最优控制系统举例.....	252
二、最优控制问题的提法.....	254
三、最优控制系统的分类.....	256
§ 10-2 用变分法解最优控制问题.....	258
一、有约束条件极值问题.....	258
二、用古典变分法解 M_{eyar} 问题.....	260
三、拉格朗日乘子法解最优控制问题.....	264
四、两点说明.....	269
§ 10-3 庞德里雅金极大值原理.....	269
一、引进极大值原理.....	269
二、极大值原理.....	273
三、几点说明.....	281

§ 10-4 动态规划	282
一、最优化原理基本思路	283
二、用动态规划解离散型最优化控制问题	284
三、哈密顿——雅可比方程, 连续控制系统动态规划	288
§ 10-5 时间最优控制系统	291
一、时间最优控制系统	291
二、时间最优控制系统设计方法	295
§ 10-6 快速随动系统	303
一、用在线计算机实现时间最优控制的随动系统	303
二、时间最优随动系统实用构造法	306
三、实现时间最优控制中的几个问题	312
§ 10-7 具有二次型性能指标的线性最优控制系统	313
一、线性最优控制问题提法及解法	313
二、黎卡堤 (Raccati) 方程	314
三、随动系统最优控制问题	319
四、两点结论	322

第十一章 自适应控制系统

§ 11-1 自适应控制系统的一般概念	324
§ 11-2 模型参考自适应控制	327
一、引言	327
二、局部参数最优化的设计方法	329
1. 梯度法	329
2. 利用灵敏度模型求灵敏度函数的方法设计自适应机构	337
三、利用李雅普诺夫第二法设计自适应机构	340
1. 利用李雅普诺夫第二法设计自适应机构	341
2. 利用普遍化李雅普诺夫函数的自适应算法	344
3. 应用实例	349
§ 11-3 动态过程的参数辨识	355
一、引言	355
二、动态过程参数估计的最小二乘方法	356
三、参数估计的递推最小二乘算法	357
四、递推最小二乘算法的计算程序	360
五、时变参数的估计 (渐消记忆算法)	362
六、关于参数最小二乘估计性质的几点说明	365
七、参数估计的其它算法	366
八、应用举例——电机的参数辨识	369

§ 11-4 随机自适应控制——自校正调节器	372
一、最小方差控制	373
二、自校正调节器	377
三、自校正调节器应用举例	378
附录 I：信号流程图及梅逊公式	384
附录 II：常用无源校正网络简表一	386
常用有源校正网络简表二	389
附录 III：开环对数频率特性与闭环对数频率特性对应关系曲线	391
附录 IV：拉普拉斯变换简表	394
附录 V：可控性、可观测性	395
一、可控性、可观测性的概念	395
二、可控性、可观测性的判定	396
附录 VI：泛函的极值	397
一、泛函及泛函数值概念	397
二、泛函极值条件	399
三、变分法基本预备定理	401

第六章 复合控制系统

§6—1 引言

一开环控制系统和闭环控制系统的局限性

开环控制系统是指没有反馈的系统,以步进电机作执行元件的数控系统,有不少是开环控制系统。在有人参予操作的调速系统(如可控硅——电动机组合),人给定输入信号,通过仪表观测系统的输出,把人除外,它是一开环控制系统,即系统输出量并不参予系统的调节过程。闭环控制系统是反馈控制系统,它要用系统输出量反馈到系统的输入端与输入量(即控制作用,它可以是确定值,也可以是时间的已知函数或未知函数)进行比较,用得到的偏差(对随动系统亦称误差)来控制系统。这种系统的输入量对输出量的控制关系是一预先确定的函数关系。

在一定技术条件要求下,开环控制系统和闭环控制系统都能满意地进行工作。在民用自动化技术和军用自动控制工程的各个方面,它们都被广泛地采用。

对于开环控制系统说来,系统的输出量直接受给定量的控制,它获得的反应速度快、灵敏性高。但是这种控制系统输出量除了受给定量的控制外,还会受到其它作用的影响,从而破坏了系统输出量与给定量之间预先校准的对应关系,使系统不能正常工作。这些作用,我们统称为系统受到的干扰。开环控制系统会受到干扰作用的影响,这是由于系统本身结构所决定的,是无法克服的。我们说这种控制系统在一定的技术条件要求下能满意地进行工作,也仅指在干扰作用不太严重,而系统输出量与予先发校准值之间允许有较大误差的场合。

对于闭环控制系统说来,如随动系统,它的输出量是由误差进行控制的。这种误差正是控制系统的输出量与输入量不一致的体现(随动系统输出量与输入量预先确定的函数关系是一一对应的关系)。因此,系统有了误差就要进行工作,其结果是使误差减小到允许范围内。所以闭环控制系统相对于开环控制系统的优点就在于,不管存在什么干扰作用,系统都能确保其输出量在一定的误差范围内反应输入量。同时也可以看到,由于系统是由数值很小的误差量控制的,因此系统对输入量的反应速度较低,灵敏性差。要提高系统的反应速度必需增加系统的放大系数。其次,闭环控制系统存在误差是必需的,从结构上看,系统能够动作的实质就在于有误差信号。要减小系统的误差(不可能完全消除)同样也必需增加系统的放大系数。我们知道:闭环控制系统的放大系数越高越危及系统的稳定性,因此要想提高这种控制系统的工作精度,必须以牺牲系统的稳定裕度作为代价。

开环控制系统不能补偿干扰作用的影响,而闭环控制系统本身要需误差,这都是由系统结构所决定的。而且任何试图减少系统误差,提高工作质量的办法,都有其局限性。如果我

们想要进一步或者任意地提高系统工作质量,减少误差甚至消除误差,只有重新构造新型的控制系统,例如采用不变性原理建造的控制系统。

二、扰动补偿和不变性原理

对于开环控制系统,其输出量除受到系统给定量的控制以外,还受到各种干扰作用的影响,使系统作用存在误差,所以干扰对系统的作用是我们不希望有的。要消除干扰作用对系统输出量的影响,或者减弱这种影响,利用扰动补偿的办法是可以做到这一点。

什么是扰动补偿?先来看一个系统,该系统受给定量 r 的控制外,还受到干扰 f 的作用。当给定量 r 为零时,要求系统的输出量 C 也应为零,但是由于干扰 f 的作用 C 并不为零。这时,首先采用一种装置和线路将干扰 f 测量出来,然后令它通过一称为补偿装置的线路再作用到系统上。这种补偿作用,对系统输出量所产生的影响正好抵消干扰作用对输出量产生的影响。这一来,系统输出量 C 就只受给定量 r 的控制,而与干扰 f 作用无关。这一套办法从物理意义上说,称为扰动补偿或扰动调节,从数学意义上说称为不变性原理。这一物理过程可以用

图 6-1-1 所示结构图来表示

图中 f 是系统受到的干扰;

y_1 是测量装置的输出量;

y 是补偿装置的输出量;

C 是系统的输出量;

r 是系统的给定量。

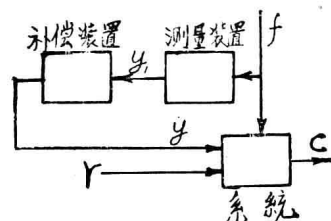


图 6-1-1 扰动补偿原理示意

由图看到,在给定量 r 为零的情况下,如果没有补偿,即没有 y 对系统作用时,由于干扰 f 对系统的作用,系统的输出量 C 将会随 f 的作用而变化,这就使系统的输出量 C 受到了干扰 f 的影响,为了 C 不受 f 的影响,人为地在系统上另外施加一作用 y ,使 y 作用对 C 的影响,在每一时刻都正好抵消 f 对 C 的影响。要做到这一点,首先 y 应和 f 有关,它要反应 f 对系统的作用;其次要明了系统对 f 作用的反应特性,这两项条件是显而易见的。但它却是补偿理论的本质和核心。基于这两条,来构造相应的测量装置、补偿装置及其线路,使 y 能准确反应 f ,使 y 对系统的作用正好抵消 f 对系统的作用,达到输出量 C 不受 f 影响的目的。

如果能使系统输出量的稳态值和过渡过程均不受干扰 f 的影响,则称系统输出量 C 对干扰 f 实现了绝对不变性。若只能做到输出量 C 的稳态值不受干扰 f 的影响,则称系统的输出量 C 对干扰 f 实现了完全不变性,倘若只能使 y 近似抵消 f 对 C 的影响。则称系统输出量 C 对干扰 f 实现了近似不变性。

三、复合控制系统

大家已经了解按偏差控制的闭环系统能有效地限制干扰对系统输出的影响,但却降低了系统的迅速性和灵敏性。闭环系统工作靠的是误差,且不能随意减小误差。因此,要求设计高精度的、快速的系统时,仅用闭环按偏差控制难于满足要求。开环控制系统虽有较高的灵

A_{ij} , B_{ij} , C_{ij} 皆为常数, 反应控制系统的有关参数, 其中有的可能为零;

$f_i(t)$ 施加于控制系统的外作用, 其中有的可能为零。

一个控制系统总是由对象和控制器所构成, 控制器又由若干装置和线路构成, 如包括比较线路、放大和变换装置以及执行机构等。按照信息传递的运动方程, 系统可分为若干环节。(6-2-1)式中的 x_i 就是系统中各环节的输入和输出变量, 每个方程表达了某个变量 x_i 在其它变量 x_j ($i \neq j$) 与外作用 $f_i(t)$ 共同作用下的动态变化关系。

二、不变性原理的一般数学提法

我们要研究的是系统的输出量或者误差, 如何才不受外加扰动的影响。从物理意义上讲, 我们是采用补偿的办法, 也即是抵消的办法, 根据扰动作用, 人为地对控制系统再施加一补偿作用, 使它对控制系统输出量或系统误差的影响, 恰好抵消扰动作用对系统输出量或者系统误差的影响。那么, 在表征控制系统的微分方程组中这个问题应该怎么表达? 在(6-2-1)微分方程组中, 如果 x_1 是控制系统的输出量或误差, 这时要使 x_1 不受某一扰动如 $f_i(t)$ 的影响, 就是要求微分方程组的一个解 x_1 不依赖于 $f_i(t)$ 。如果除了扰动 $f_i(t)$ 以外, 其它扰动 $f_j(t)$ ($j \neq i$) 都不存在, 在零初始条件下, 系统的输出量或误差与 $f_i(t)$ 无关, 就是微分方程组的一个解 x_1 恒等于零, 即 $x_1 \equiv 0$ 。 x_1 与 $f_i(t)$ 无关, x_1 不随 $f_i(t)$ 的变化而变化, 这就是 x_1 对 $f_i(t)$ 具有不变性。

进一步我们要问, 如何才能使控制系统的输出量或误差与某一外作用即扰动无关? 推而广之, 如何才能使控制系统的某一物理变量与作用于控制系统的某一扰动无关? 这就是不变性条件的问题。要得到不变性条件应解出微分方程组。

将方程组(6-2-1)写成矩阵形式

$$\begin{pmatrix} a_{11}(D) & a_{12}(D) & \dots & a_{1n}(D) \\ a_{21}(D) & a_{22}(D) & \dots & a_{2n}(D) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(D) & a_{n2}(D) & \dots & a_{nn}(D) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix} \quad (6-2-2)$$

或简写成向量形式

$$A(D)X = F \quad (6-2-3)$$

$$\text{式中 } A(D) = \begin{pmatrix} a_{11}(D) & a_{12}(D) & \dots & a_{1n}(D) \\ a_{21}(D) & a_{22}(D) & \dots & a_{2n}(D) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(D) & a_{n2}(D) & \dots & a_{nn}(D) \end{pmatrix}, \quad (6-2-4)$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}; \quad F = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}.$$

(6-2-4) 是系数矩阵, 它的每个元素 $a_{ij}(D)$ 都是算子 D 的多项式。求解微分方程组 (6-2-1) 事实上就是对矩阵 (6-2-4) 进行运算。为了正确地得到微分方程组 (6-2-1) 的所有解, 必须对矩阵 (6-2-2) 进行变换。我们知道利用矩阵的初等变换, 只要微分方程组 (6-2-1) 的主行列式 $|A(D)|$ 不恒等于零, 就可以把 (6-2-2) 式变换成简单的形式。

若 $|A(D)| \neq 0$, 则必然可以找到一个满秩矩阵 $\lambda(D)$, 使 $\lambda(D)$ 左乘 (6-2-2) 式两边就可得到

$$\begin{pmatrix} a_{11}^*(D) & 0 & \dots & \dots & 0 \\ a_{21}^*(D) & a_{22}^*(D) & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}^*(D) & a_{n2}^*(D) & \dots & \dots & a_{nn}^*(D) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n \lambda_{1j}(D) f_j(t) \\ \sum_{j=1}^n \lambda_{2j}(D) f_j(t) \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n \lambda_{nj}(D) f_j(t) \end{pmatrix} \quad (6-2-5)$$

式中

$$\begin{pmatrix} a_{11}^*(D) & 0 & \dots & \dots & 0 \\ a_{21}^*(D) & a_{22}^*(D) & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}^*(D) & a_{n2}^*(D) & \dots & \dots & a_{nn}^*(D) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_{11}(D) & \lambda_{12}(D) & \dots & \lambda_{1n}(D) \\ \lambda_{21}(D) & \lambda_{22}(D) & \dots & \lambda_{2n}(D) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_{n1}(D) & \lambda_{n2}(D) & \dots & \lambda_{nn}(D) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11}(D) & a_{12}(D) & \dots & a_{1n}(D) \\ a_{21}(D) & a_{22}(D) & \dots & a_{2n}(D) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(D) & a_{n2}(D) & \dots & a_{nn}(D) \end{pmatrix}, \quad (6-2-6)$$

$$\begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n \lambda_{1j}(D)f_j(t) \\ \sum_{j=1}^n \lambda_{2j}(D)f_j(t) \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n \lambda_{nj}(D)f_j(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_{11}(D) & \lambda_{12}(D) & \cdots & \lambda_{1n}(D) \\ \lambda_{21}(D) & \lambda_{22}(D) & \cdots & \lambda_{2n}(D) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_{n1}(D) & \lambda_{n2}(D) & \cdots & \lambda_{nn}(D) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}$$

(6-2-7)

其中

$$\lambda(D) = \begin{pmatrix} \lambda_{11}(D) & \lambda_{12}(D) & \cdots & \lambda_{1n}(D) \\ \lambda_{21}(D) & \lambda_{22}(D) & \cdots & \lambda_{2n}(D) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_{n1}(D) & \lambda_{n2}(D) & \cdots & \lambda_{nn}(D) \end{pmatrix}.$$

同时根据以微分算子多项式为元素的矩阵, 进行初等变换后可知: $\lambda_{ij}(D)$ 和 $a_{ij}^*(D)$ 都是有常系数的 D 的多项式;

$|\lambda(D)| = \Delta$ 是不依赖于 D , 且不为零的常数行列式;

在 $a_{ij}^*(D)$ 中, 当 $i < j$ 时 $a_{ij}^*(D) \equiv 0$;

在 $a_{ij}^*(D)$ 中, 当 $i > j$ 时 $a_{ij}^*(D)$ 对于 D 的阶次严格低于 $a_{ii}^*(D)$ 的阶次, 如果 $a_{ii}^*(D)$ 为常数, 则所有 $a_{ij}(D) (i > j)$ 都恒等于零;

$a_{ii}^*(D) \neq 0$, 而且它的首项系数为 1。

将矩阵 (6-2-5) 写成方程组的形式

$$\begin{aligned} a_{11}^*(D)x_1 &= \sum_{j=1}^n \lambda_{1j}(D)f_j(t) \\ a_{21}(D)x_1 + a_{22}(D)x_2 &= \sum_{j=1}^n \lambda_{2j}(D)f_j(t) \\ &\cdots \cdots \cdots \\ a_{n2}(D)x_1 + a_{n2}^*(D)x_2 + \cdots + a_{nn}^*(D)x_n &= \sum_{j=1}^n \lambda_{nj}(D)f_j(t). \end{aligned} \quad (6-2-8)$$

根据 (6-2-6) 式

$$a_{11}^*(D) = \lambda_{11}(D)a_{11}(D) + \lambda_{12}(D)a_{21}(D) + \dots + \lambda_{1n}(D)a_{n1}(D)$$

$$0 = \lambda_{11}(D)a_{12}(D) + \lambda_{12}(D)a_{22}(D) + \dots + \lambda_{1n}(D)a_{n2}(D)$$

(6-2-9)

$$0 = \lambda_{11}(D)a_{1n}(D) + \lambda_{12}(D)a_{2n}(D) + \dots + \lambda_{1n}(D)a_{nn}(D)$$

方程组(6-2-1)变换成方程组(6-2-8), 它们的解是严格等价的, 即(6-2-1)式的解就是(6-2-8)式的解, 反之亦然。因此要解方程组(6-2-1)就可转为解方程组(6-2-8)。在给定的初始条件下, 根据(6-2-8)式的第一个方程式解出 x_1 , 然后利用解出的 x_1 代到第二个方程式中解出 x_2 , 再利用解出的 x_1 和 x_2 代到第三个方程式中解出 x_3 , 以此类推最后解出 x_n 。显然 x_1 的解为

$$a_{11}^*(D)x_1 = \sum_{j=1}^n \lambda_{1j}(D)f_j(t).$$

再根据(6-2-7)式

$$a_{11}^*(D)x_1 = \lambda_{11}(D)f_1(t) + \lambda_{12}(D)f_2(t) + \dots + \lambda_{1n}(D)f_n(t),$$

(6-2-10)

式中 $a_{11}^*(D) \neq 0$ 。从这个关系式中可以看出 x_1 同 $f_1(t)$, $f_2(t)$, ..., $f_n(t)$ 的关系。

如果作用于控制系统的外作用即扰动只有一个, 例如是 $f_i(t)$, 这时(6-2-8)式变成

$$a_{11}(D)x_1 = \lambda_{1i}(D)f_i(t)$$

$$a_{21}(D)x_1 + a_{22}(D)x_2 = \lambda_{2i}(D)f_i(t)$$

(6-2-11)

$$a_{n1}(D)x_1 + a_{n2}(D)x_2 + \dots + a_{nn}(D)x_n = \lambda_{ni}(D)f_i(t).$$

这时 x_1 的解的形式就变成

$$a_{11}(D)x_1 = \lambda_{1i}(D)f_i(D). \quad (6-2-12)$$

现在来讨论一下(6-2-12)式。所谓控制系统的某一物理变量 x_1 对于扰动 $f_i(t)$ 的不变性, 在(6-2-12)式中就体现为 $x_1=0$ 。要使 $x_1=0$, 根据(6-2-12)式有三种可能情况, 即有三种形式的不变性条件: 第一种形式、当 $\lambda_{1i}(D) \neq 0$ 但 $f_i(t)=0$; 第二种形式, 当 $f_i(t) \neq 0$ 但 $\lambda_{1i}(D)=0$; 第三种形式, 当 $f_i(t) \neq 0$ 、 $\lambda_{1i}(D) \neq 0$ 但 $\lambda_{1i}(D)f_i(t)=0$ 。其中第一种形式即没有扰动作用, 这没有实际意义, 第二种和第三种特别第二种形式是最常用的形式。我们先一般地讨论第二种不变性条件形式, 以后再更具体讨论第二种和第三种不变性条件形式。

如果我们要求 x_1 与 $f_i(t)$ 无关, 即 x_1 不受 $f_i(t)$ 的影响, 在 $f_i(t)$ 作用下 $x_1=0$, 这就要求 $\lambda_{1i}(D)=0$ 。 $\lambda_{1i}(D)=0$ 是 x_1 对 $f_i(t)$ 无关的必要条件, 也就是控制系统的某一物理变量 x_1 对于作用于控制系统的某一外作用 $f_i(t)$ 的不变性条件, 是不变性的必要条件。当外作用 $f_i(t)$ 在我们讨论的时间区段内是全纯函数(即解析函数)时, 以及变量 $x_1(t)$ 在 $t=t_0$ 时, $x(t_0)$ 以及其各阶导数都为零(零初始条件)时, 则 $\lambda_{1i}(D)=0$ 不但是 x_1 对 $f_i(t)$ 的不变性必要条件, 而且还是充分条件。除 $f_i(t)$ 以外没有其它扰动作用时, 只要 $\lambda_{1i}(D)=0$ 则必然 $x=0$ 。这时我们说控制系统中的物理变量 x_1 对于外作用 $f_i(t)$ 实现了绝对不变性条件。如果 $f_i(t)$ 不是时间的全纯函数, 而且初始条件和以上所述不同, 这时 $\lambda_{1i}(D)=0$ 仅是 x_1 对于 $f_i(t)$ 的完全不变性条件, 或者实现了稳态不变性条件。

上述的所有结论我们都是从(6-2-8)式得出来的。现在我们要问 x_1 对 $f_i(t)$ 的不变性条件 $\lambda_{1i}(D)=0$ 对应于(6-2-1)式是什么? 因为(6-2-8)式与(6-2-1)式是等价的, 两式的解是完全一致的。所以在(6-2-8)式中 $\lambda_{1i}(D)=0$ 存在, 在(6-2-1)式中就一定有一对应的条件存在。

由(6-2-9)式可得到

$$\lambda_{1i}(D) = \frac{A_{i1}(D)}{|A(D)|} a_{11}(D). \quad (6-2-13)$$

式中 $A_{i1}(D)$ 为 $|A(D)|$ 的第 i 行第 1 列的代数余子式。根据(6-2-6)式

$$|A^*(D)| = |\lambda(D)| \cdot |A(D)|.$$

因为 $|\lambda(D)| = \Lambda$, 故上式变成

$$|A(D)| = \frac{1}{\Lambda} |A^*(D)| = \frac{1}{\Lambda} a_{11}(D) \cdot a_{22}(D) \cdot \dots \cdot a_{nn}(D). \quad (6-2-14)$$

将(6-2-14)式代入到(6-2-13)可得

$$\lambda_{1i}(D) = \frac{\Lambda \cdot A_{i1}(D)}{a_{22}(D) \cdot a_{33}(D) \cdot \dots \cdot a_{nn}(D)},$$

或者写成

$$A_{i1}(D) = \frac{1}{\Lambda} \lambda_{1i}(D) \cdot a_{22}(D) \cdot a_{33}(D) \cdot \dots \cdot a_{nn}(D). \quad (6-2-15)$$

由(6-2-15)式看出, 由于 $\Lambda \neq 0$, $a_{ii}^*(D) \neq 0$, 所以, 要求 $\lambda_{1i}(D)=0$, 实际上就是要求 $A_{i1}(D)=0$ 。因此要求由微分方程组(6-2-1)式所描述的控制系统的物理变量 x_1 对于作用于控制系统的外作用 $f_i(t)$ 实现不变性, 则需要使微分方程组(6-2-1)式的系数行列式 $|A(D)|$ 的元素 $a_{i1}(D)$ 的代数余子式 $A_{i1}(D)$ 为零。

这一结论是根据数学推导得出的不变性条件。工程上分析和设计单输入、单输出系统, 常用传递函数这一数学工具, 故有必要寻求不变性条件的传递函数表达式。

$$\begin{aligned} & a_{i_1}(s)X_1(s) + a_{i_2}(s)X_2(s) + \dots\dots + a_{i_n}(s)X_n(s) = 0 \\ & \dots\dots\dots \\ & a_{j_1}(s)X_1(s) + a_{j_2}(s)X_2(s) + \dots\dots + a_{j_n}(s)X_n(s) = F_j(s) \\ & \dots\dots\dots \\ & a_{n_1}(s)X_1(s) + a_{n_2}(s)X_2(s) + \dots\dots + a_{n_n}(s)X_n(s) = 0 \end{aligned}$$
$$x_1(s) = \begin{pmatrix} a_{11}(s)a_{12}(s)\dots\dots a_{1n}(s) \\ \vdots \\ a_{i1}(s)a_{i2}(s)\dots\dots a_{in}(s) \\ \vdots \\ a_{n1}(s)a_{n2}(s)\dots\dots a_{nn}(s) \end{pmatrix}$$
$$\therefore \frac{X_1(s)}{F_1(s)} = W(s) = \frac{A_{11}(s)}{|A(s)|}.$$
$$A_{i+1}(s) \equiv 0 (|A(s)| \neq 0, F_i(s) \neq 0).$$

三、控制系统的不变性条件

$$\begin{aligned} a_{11}(D)x + a_{12}(D)y + a_{13}(D)z &= c_1 r(t) \\ a_{21}(D)x + a_{22}(D)y + a_{23}(D)z &= c_2 r(t) + b_2 f(t) \\ a_{31}(D)x + a_{32}(D)y + a_{33}(D)z &= b_3 f(t). \end{aligned} \quad (6-2-16)$$