自动控制系统

下　册

北京工业学院二系231教研室

1981.7

目　录

第六章　复合控制

第八章 自动控制系统的设计问题

第十章 最优控制系统

第十一章 自适应控制系统

第六章 复合控制系统

§6—1 引　　言

一开环控制系统和闭环控制系统的局限性

开环控制系统是指没有反馈的系统，以步进电机作执行元件的数控系统，有不少是开环控制系统。在有人参予操作的调速系统（如可控硅——电动机组合），人给定输入信号，通过仪表观测系统的输出，把人除外，它是一开环控制系统，即系统输出量并不参予系统的调节过程。闭环控制系统是反馈控制系统，它要用系统输出量反馈到系统的输入端与输入量（即控制作用，它可以是确定値，也可以是时间的已知函数或未知函数）进行比较，用得到的偏差（对随动系统亦称误差）来控制系统。这种系统的输入量对输出量的控制关系是一予先确定的函数关系。

在一定技术条件要求下，开环控制系统和闭环控制系统都能满意地进行工作。在民用自动化技术和军用自动控制工程的各个方面，它们都被广泛地采用。

对于开环控制系统说来，系统的输出量直接受给定量的控制，它获得的反应速度快、灵敏性高。但是这种控制系统输出量除了受给定量的控制外，还会受到其它作用的影响，从而破坏了系统输出量与给定量之间予先校准的对应关系，使系统不能正常工作。这些作用，我们统称为系统受到的干扰。开环控制系统会受到干扰作用的影响，这是由于系统本身结构所决定的，是无法克服的。我们说这种控制系统在一定的技术条件要求下能满意地进行工作，也仅指在干扰作用不太严重，而系统输出量与予先发校准値之间允许有较大误差的场合。

对于闭环控制系统说来，如随动系统，它的输出量是由误差进行控制的。这种误差正是控制系统的输出量与输入量不一致的体现（随动系统输出量与输入量予先确定的函数关系是一一对应的关系）。因此，系统有了误差就要进行工作，其结果是使误差减小到允许范围内。所以闭环控制系统相对于开环控制系统的优点就在于，不管存在什么干扰作用，系统都能确保其输出量在一定的误差范围内反应输入量。同时也可以看到，由于系统是由数值很小的误差量控制的，因此系统对输入量的反应速度较低，灵敏性差。要提高系统的反应速度必需增加系统的放大系数。其次，闭环控制系统存在误差是必需的，从结构上看，系统能够动作的实质就在于有误差信号。要减小系统的误差（不可能完全消除）同样也必需增加系统的放大系数。我们知道：闭环控制系统的放大系数越高越危及系统的稳定性，因此要想提高这种控制系统的工作精度，必须以牺牲系统的稳定裕度作为代价。

开环控制系统不能补偿干扰作用的影响，而闭环控制系统本身要需误差，这都是由系统结构所决定的。而且任何试图减少系统误差，提高工作质量的办法，都有其局限性。如果我

们想要进一步或者任意地提高系统工作质量，减少误差甚至消除误差，只有重新构造新型的控制系统，例如采用不变性原理建造的控制系统。

二、扰动补偿和不变性原理

对于开环控制系统，其输出量除受到系统给定量的控制以外，还受到各种干扰作用的影响，使系统作用存在误差、所以干扰对系统的作用是我们不希望有的。要消除干扰作用对系统输出量的影响，或者减弱这种影响，利用扰动补偿的办法扰可以做到这一点。

什么是扰动补偿？先来看一个系统，该系统受给定量 r 的控制外，还受到干扰 f 的作用。当给定量 r 为零时，要求系统的输出量 C 也应为零，但是由于干扰 f 的作用 C 并不为零。这时，首先采用一种装置和线路将干扰 f 测量出来，然后令它通过一称为补偿装置的线路再作用到系统上。这种补偿作用，对系统输出量所产生的影响正好抵消干扰作用对输出量产生的影响。这一来，系统输出量 C 就只受给定量 r 的控制，而与干扰 f 作用无关。这一套办法从物理意义上说，称为扰动补偿或扰动调节，从数学意义上说称为不变性原理。这一物理过程可以用图 6－1－1 所示结构图来表示

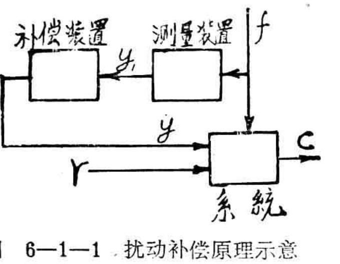

图 6—1—1 扰动补偿原理示意

图中　f 是系统受到的干扰；

y_1 是测量装置的输出量；

y 是补偿装置的输出量；

C 是系统的输出量；

r 是系统的给定量。

由图看到，在给定量 r 为零的情况下，如果沒有补偿，即沒有 y 对系统作用时，由于干扰 f 对系统的作用，系统的输出量 C 将会随 f 的作用而变化，这就使系统的输出量 C 受到了干扰 f 的影响，为了 C 不受 f 的影响，人为地在系统上另外施加一作用 y，使 y 作用对 C 的影响，在每一时刻都正好抵消 f 对 C 的影响。要做到这一点，首先 y 应和 f 有关，它要反应 f 对系统的作用；其次要明了系统对 f 作用的反应特性，这两项条件是显而易见的。但它却是补偿理论的本质和核心。基于这两条，来构造相应的测量装置、补偿装置及其线路，使 y 能准确反应 f，使 y 对系统的作用正好抵消 f 对系统的作用，达到输出量 C 不受 f 影响的目的。

如果能使系统输出量的稳态值和过渡过程均不受干扰 f 的影响，则称系统输出量 C 对干扰 f 实现了绝对不变性。若只能做到输出量 C 的稳态值不受干扰 f 的影响，则称系统的输出量 C 对干扰 f 实现了完全不变性，倘若只能使 y 近似抵消 f 对 C 的影响。则称系统输出量 C 对干扰 f 实现了近似不变性。

三、复合控制系统

大家已经了解按偏差控制的闭环系统能有效地限制干扰对系统输出的影响，但却降低了系统的迅速性和灵敏性。闭环系统工作靠的是误差，且不能随意减小误差。因此，要求设计高精度的、快速的系统时，仅用闭环按偏差控制难于满足要求。开环控制系统虽有较高的灵

敏性和快速性，但它抗干扰的能力很低，也不能适应高精度的要求。

如果将开环和闭环两种形式结合起来，组成所谓的复合控制（亦称开——闭环控制）系统。互相取长补短，可以大大提高系统的精度。图6－1－2结构便是一种按补偿原理（或称不变性原理）构造的控制系统。

图中 $W_r(s)$ 和 $W_2(s)$ 即开环控制部分，$W_1(s)$和$W_2(s)$又形成闭环。当只有闭环时，误差θ是使系统工作的信号，θ为零，闭环系统一般停止工作。有了开环控制通道，控制信号 r 可经过$W_r(s)$、$W_2(s)$达到输出端，而原理上误差θ可以等于零。闭环的作用在于补偿干扰作用的影响。因此，可以提高系统的精度和快速性。

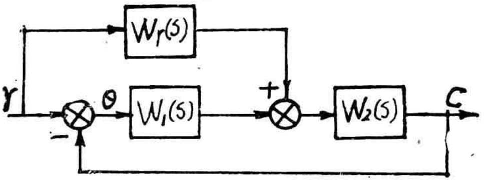

图　6—1—2　复合控制系统的结构形式

为进一步理解复合控制系统构造的理论依据，和补偿原理更为一般性的理论与实践问题下面将分别予以介绍。

§6—2　不变性原理的基本理论

用扰动补偿不变性原理建立的复合控制系统，其精度和快速都要比单纯的开环控制或单纯的闭环控制优越。理论上讲，可以做到系统的输出量与作用于系统的任何干扰无关，在工程实践上虽不可能做到这一点，但至少可以做到系统的输出量与作用于系统的主要扰动（如一个主要扰动）无关或近似无关。要研究这个问题先应从系统运动微分方程着手。

一、控制系统的微分方程

我们要研究的控制系统是线性的常参数系统，无论何种结构，总可以用如下微分方程组来表示

$$
\begin{aligned}
&a_{11}(D)x_1+a_{12}(D)x_2+\cdots\cdots+a_{1n}(D)x_n=f_1(t);\\
&a_{21}(D)x_1+a_{22}(D)x_2+\cdots\cdots+a_{2n}(D)x_n=f_2(t);\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad (6-2-1)\\
&a_{n1}(D)x_1+a_{n2}(D)x_2+\cdots\cdots+a_{nn}(D)x_n=f_n(t).
\end{aligned}
$$

式中，x_i 微分方程的广义坐标，是控制系统中的物理变量；

$$aij(D)=A_{ij}D^2+B_{ij}D+C_{ij}$$

对于 D 次数不高于 2 的多项式（i，j=1，2，…，n）；

$$D=\frac{d}{dt}\qquad \text{微分算子；}$$

A_{ij}，B_{ij}，C_{ij} 皆为常数，反应控制系统的有关参数，其中有的可能为零；

$f_i(t)$施加于控制系统的外作用，其中有的可能为零。

一个控制系统总是由对象和控制器所构成，控制器又由若干装置和线路构成，如包括比较线路、放大和变换装置以及执行机构等。按照信息传递的运动方程，系统可分为若干环节。（6－2－1）式中的 x_i 就是系统中各环节的输入和输出变量，每个方程表达了某个变量 x_i 在其它变量 x_j（$i \neq j$）与外作用 $f_i(t)$共同作用下的动态变化关系。

二、不变性原理的一般数学提法

我们要研究的是系统的输出量或者误差，如何才不受外加扰动的影响。从物理意义上讲，我们是采用补偿的办法，也即是抵消的办法，根据扰动作用，人为地对控制系统再施加一补偿作用，使它对控制系统输出量或系统误差的影响，恰好抵消扰动作用对系统输出量或者系统误差的影响。那么，在表征控制系统的微分方程组中这个问题应该怎么表达？在（6－2－1）微分方程组中，如果 x_1 是控制系统的输出量或误差，这时要使 x_1 不受某一扰动如 $f_i(t)$的影响，就是要求微分方程组的一个解 x_1 不依赖于 $f_i(t)$。如果除了扰动 $f_i(t)$以外，其它扰动 $f_j(t)$（$j \neq i$）都不存在，在零初始条件下，系统的输出量或误差与$f_i(t)$无关，就是微分方程组的一个解 x_1 恒等于零，即 $x_1 \equiv 0$。x_1 与 $f_i(t)$ 无关，x_1 不随$f_i(t)$的变化而变化，这就是 x_1 对 $f_i(t)$具有不变性。

进一步我们要问，如何才能使控制系统的输出量或误差与某一外作用即扰动无关？推而广之，如何才能使控制系统的某一物理变量与作用于控制系统的某一扰动无关？这就是不变性条件的问题。要得到不变性条件应解出微分方程组。

将方程组（6－2－1）写成矩阵形式

$$\begin{pmatrix} a_{11}(D) & a_{12}(D)\cdots\cdots a_{1n}(D) \\ a_{21}(D) & a_{22}(D)\cdots\cdots a_{2n}(D) \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}(D) & a_{n2}(D)\cdots\cdots a_{nn}(D) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ t_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix} \qquad (6-2-2)$$

或简写成向量形式

$$A(D)X = F \qquad (6-2-3)$$

式中

$$A(D) = \begin{pmatrix} a_{11}(D) & a_{12}(D)\cdots\cdots a_{1n}(D) \\ a_{21}(D) & a_{22}(D)\cdots\cdots a_{2n}(D) \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}(D) & a_{n2}(D)\cdots\cdots a_{nn}(D) \end{pmatrix}; \qquad (6-2-4)$$

$$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix};\quad F=\begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}.$$

（6－2－4）是系数矩阵，它的每个元素 $a_{ij}(D)$ 都是算子 D 的多项式。求解微分方程组（6－2－1）事实上就是对矩阵（6－2－4）进行运算。为了正确地得到微分方程组（6－2－1）的所有解，必须对矩阵（6－2－2）进行变换。我们知道利用矩阵的初等变换，只要微分方程组（6－2－1）的主行列式 $|A(D)|$ 不恆等于零，就可以把（6－2－2）式变换成简单的形式。

若 $|A(D)|\neq 0$，则必然可以找到一个满秩矩阵 $\lambda(D)$，使 $\lambda(D)$ 左乘（6－2－2）式两边就可得到

$$\begin{pmatrix} a^*_{11}(D) & 0 \cdots\cdots\cdots\cdots 0 \\ a^*_{21}(D) & a^*_{22}(D) \quad 0 \cdots\cdots 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a^*_{n1}(D) & a^*_{n2}(D)\cdots\cdots\cdots a^*_{nn}(D) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \sum\limits_{j=1}^{n}\lambda_{1j}(D)f_j(t) \\ \sum\limits_{j=1}^{n}\lambda_{2j}(D)f_j(t) \\ \vdots \\ \sum\limits_{j=1}^{n}\lambda_{nj}(D)f_j(t) \end{pmatrix}$$

（6－2－5）

式中

$$\begin{pmatrix} a^*_{11}(D) & 0 \cdots\cdots\cdots\cdots 0 \\ a^*_{21}(D) & a^*_{22}(D) \quad 0 \cdots\cdots 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a^*_{n1}(D) & a^*_{n2}(D)\cdots\cdots\cdots a^*_{nn}(D) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda_{11}(D) & \lambda_{12}(D)\cdots\lambda_{1n}(D) \\ \lambda_{21}(D) & \lambda_{22}(D)\cdots\lambda_{2n}(D) \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ \lambda_{n1}(D) & \lambda_{n2}(D)\cdots\lambda_{nn}(D) \end{pmatrix}$$

$$\cdot\begin{pmatrix} a_{11}(D) & a_{12}(D)\cdots\cdots a_{1n}(D) \\ a_{21}(D) & a_{22}(D)\cdots\cdots a_{2n}(D) \\ & \\ a_{n1}(D) & a_{n2}(D)\cdots\cdots a_{nn}(D) \end{pmatrix},\qquad (6-2-6)$$

$$\begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} \lambda_{1j}(D) f_j(t) \\ \sum_{j=1}^{n} \lambda_{2j}(D) f_j(t) \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} \lambda_{nj}(D) f_j(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_{11}(D) & \lambda_{12}(D) \cdots\cdots \lambda_{1n}(D) \\ \lambda_{21}(D) & \lambda_{22}(D) \cdots\cdots \lambda_{2n}(D) \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \lambda_{n1}(D) & \lambda_{n2}(D) \cdots\cdots \lambda_{nn}(D) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix} \tag{6-2-7}$$

其中
$$\lambda(D) = \begin{pmatrix} \lambda_{11}(D) & \lambda_{12}(D) \cdots\cdots \lambda_{1n}(D) \\ \lambda_{21}(D) & \lambda_{22}(D) \cdots\cdots \lambda_{2n}(D) \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \lambda_{n1}(D) & \lambda_{n2}(D) \cdots\cdots \lambda_{nn}(D) \end{pmatrix}.$$

同时根据以微分算子多项式为元素的矩阵，进行初等变换后可知：$\lambda_{ij}(D)$和$a^*_{ij}(D)$都是具有常系数的D的多项式；

$|\lambda(D)| = \Lambda$ 是不依赖于D，且不为零的常数行列式；

在$a^*_{ij}(D)$中，当 $i<j$ 时 $a^*_{ij}(D) \equiv 0$；

在$a^*_{ij}(D)$中，当 $i>j$ 时 $a^*_{ij}(D)$对于D的阶次严格低于$a^*_{ii}(D)$的阶次，如果$a^*_{ii}(D)$为常数，则所有$a_{ij}(D)(i>j)$都恆等于零；

$a^*_{ii}(D) \neq 0$，而且它的首项系数为1。

将矩阵（6－2－5）写成方程组的形式

$$\begin{aligned} & a^*_{11}(D)x_1 && = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{1j}(D) f_j(t) \\ & a_{21}(D)x_1 + a_{22}(D)x_2 && = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{2j}(D) f_j(t) \qquad (6-2-8) \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots && \\ & a_{n2}(D)x_1 + a^*_{n2}(D)x_2 + \cdots\cdots + a^*_{nn}(D)x_n && = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{nj}(D) f_j(t). \end{aligned}$$

根据（6－2－6）式

$$a_{11}^{*}(D)=\lambda_{11}(D)a_{11}(D)+\lambda_{12}(D)a_{21}(D)+\cdots\cdots+\lambda_{1n}(D)a_{n1}(D)$$

$$0=\lambda_{11}(D)a_{12}(D)+\lambda_{12}(D)a_{22}(D)+\cdots\cdots+\lambda_{1n}(D)a_{n2}(D)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad (6-2-9)$$

$$0=\lambda_{11}(D)a_{1n}(D)+\lambda_{12}(D)a_{2n}(D)+\cdots+\lambda_{1n}(D)a_{nn}(D)$$

方程组（6－2－1）变换成方程组（6－2－8），它们的解是严格等价的，即（6－2－1）式的解就是（6－2－8）式的解，反之亦然。因此要解方程组（6－2－1）就可转为解方程组（6－2－8）。在给定的初始条件下，根据（6－2－8）式的第一个方程式解出 x_1，然后利用解出的 x_1 代到第二个方程式中解出 x_2，再利用解出的 x_1 和 x_2 代到第三个方程式中解出 x_3，以此类推最后解出 x_n。显然 x_1 的解为

$$a_{11}^{*}(D)x_1=\sum_{j=1}^{n}\lambda_{1j}(D)f_j(t).$$

再根据（6－2－7）式

$$a_{11}^{*}(D)x_1=\lambda_{11}(D)f_1(t)+\lambda_{12}(D)f_2(t)+\cdots\cdots+\lambda_{1n}(D)f_n(t), \qquad (6-2-10)$$

式中 $a_{11}^{*}(D)\neq 0$。从这个关系式中可以看出 x_1 同 $f_1(t)$，$f_2(t)$，……，$f_n(t)$的关系。

如果作用于控制系统的外作用即扰动只有一个，例如是 $f_i(t)$，这时(6－2－8)式变成

$$\begin{aligned}
&a_{11}(D)x_1 &&=\lambda_{1i}(D)f_i(t)\\
&a_{21}(D)x_1+a_{22}(D)x_2 &&=\lambda_{2i}(D)f_i(t)\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots &&\qquad (6-2-11)\\
&a_{n1}(D)x_1+a_{n2}(D)x_2+\cdots\cdots+a_{nn}(D)x_n &&=\lambda_{ni}(D)f_i(t).
\end{aligned}$$

这时 x_1 的解的形式就变成

$$a_{11}(D)x_1=\lambda_{1i}(D)f_i(D). \qquad (6-2-12)$$

现在来讨论一下（6－2－12）式。所谓控制系统的某一物理变量 x_1 对于扰动 $f_i(t)$ 的不变性，在（6－2－12）式中就体现为 $x_1=0$。要使 $x_1=0$，根据（6－2－12）式有三种可能情况，即有三种形式的不变性条件：第一种形式、当 $\lambda_{1i}(D)\neq 0$ 但 $f_i(t)=0$；第二种形式，当 $f_i(t)\neq 0$ 但 $\lambda_{1i}(D)=0$；第三种形式，当 $f_i(t)\neq 0$、$\lambda_{1i}(D)\neq 0$ 但 $\lambda_{1i}(D)f_i(t)=0$。其中第一种形式即沒有扰动作用，这沒有实际意义，第二种和第三种特别第二种形式是最常用的形式。我们先一般地讨论第二种不变性条件形式，以后再更具体讨论第二种和第三种不变性条件形式。

如果我们要求 x_1 与 $f_i(t)$ 无关，即 x_1 不受 $f_i(t)$ 的影响，在 $f_i(t)$ 作用下 $x_1=0$，这就要求 $\lambda_{1i}(D)=0$。$\lambda_{1i}(D)=0$ 是 x_1 对 $f_i(t)$ 无关的必要条件，也就是控制系统的某一物理变量 x_1 对于作用于控制系统的某一外作用 $f_i(t)$ 的不变性条件，是不变性的必要条件。当外作用 $f_i(t)$ 在我们讨论的时间区段内是全纯函数（即解析函数）时，以及变量 $x_1(t)$ 在 $t=t_0$ 时，$x(t_0)$ 以及其各阶导数都为零（零初始条件）时，则 $\lambda_{1i}(D)=0$ 不但是 x_1 对 $f_i(t)$ 的不变性必要条件，而且还是充分条件。除 $f_i(t)$ 以外沒有其它扰动作用时，只要 $\lambda_{1i}(D)\equiv 0$ 则必然 $x\equiv 0$。这时我们说控制系统中的物理变量 x_1 对于外作用 $f_i(t)$ 实现了绝对不变性条件。如果 $f_i(t)$ 不是时间的全纯函数，而且初始条件和以上所述不同，这时 $\lambda_{1i}(D)=0$ 仅是 x_1 对于 $f_i(t)$ 的完全不变性条件，或者实现了稳态不变性条件。

上述的所有结论我们都是从（6－2－8）式得出来的。现在我们要问 x_1 对 $f_i(t)$ 的不变性条件 $\lambda_{1i}(D)=0$ 对应于（6－2－1）式是什么？因为（6－2－8）式与（6－2－1）式是等价的，两式的解是完全一致的。所以在（6－2－8）式中 $\lambda_{1i}(D)=0$ 存在，在(6－2－1)式中也一定有一对应的条件存在。

由（6－2－9）式可得到

$$\lambda_{1i}(D)=\frac{A_{i1}(D)}{|A(D)|}a_{11}(D). \qquad (6-2-13)$$

式中 $A_{1i}(D)$ 为 $|A(D)|$ 的第 i 行第 1 列的代数余子式。根据（6－2－6）式

$$|A^*(D)|=|\lambda(D)|\cdot|A(D)|.$$

因为 $|\lambda(D)|=\Lambda$，故上式变成

$$|A(D)|=\frac{1}{\Lambda}|A^*(D)|=\frac{1}{\Lambda}a_{11}(D)\cdot a_{22}(D)\cdot\cdots\cdots\cdot a_{nn}(D). \qquad (6-2-14)$$

将（6－2－14）式代入到（6－2－13）可得

$$\lambda_{1i}(D)=\frac{\Lambda\cdot A_{i1}(D)}{a_{22}(D)\cdot a_{33}(D)\cdot\cdots\cdots\cdot a_{nn}(D)},$$

或者写成

$$A_{i1}(D)=\frac{1}{\Lambda}\lambda_{1i}(D)\cdot a_{22}(D)\cdot a_{33}(D)\cdot\cdots\cdots\cdot a_{nn}(D). \qquad (6-2-15)$$

由（6－2－15）式看出，由于 $\Lambda\neq 0$，$a^*_{ii}(D)\neq 0$，所以，要求 $\lambda_{1i}(D)=0$，实际上就是要求 $A_{i1}(D)=0$。因此要求由微分方程组（6－2－1）式所描述的控制系统的物理变量 x_1 对于作用于控制系统的外作用 $f_i(t)$ 实现不变性，则需要使微分方程组（6－2－1）式的系数行列式 $|A(D)|$ 的元素 $a_{i1}(D)$ 的代数余子式 $A_{i1}(D)$ 为零。

这一结论是根据数学推导得出的不变性条件。工程上分析和设计单输入、单输出系统，常用传递函数这一数学工具，故有必要寻求不变性条件的传递函数表达式。

传递函数是在零初始条件下，系统输出量和输入量拉氏变换后的比值。以（6－2－1）微分方程组来看，假定只有一个外作用 $f_i(t)$，在零初始条件下，对（6－2－1）式进行拉氏变换，可得

$$
\begin{aligned}
&a_{11}(s)X_1(s)+a_{12}(s)X_2(s)+\cdots\cdots+a_{1n}(s)X_n(s)=0\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&a_{i1}(s)X_1(s)+a_{i2}(s)X_2(s)+\cdots\cdots+a_{in}(s)X_n(s)=F_i(s)\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&a_{n1}(s)X_1(s)+a_{n2}(s)X_2(s)+\cdots\cdots+a_{nn}(s)X_n(s)=0\ .
\end{aligned}
$$

如果要求 $x_1(t)$ 对 $f_i(t)$ 具有不变性，可把 $x_1(t)$ 看成系统的输出量，$f_i(t)$ 看成系统的输入量，按照传递函数的定义求 $X_1(s)$ 和 $F_i(s)$ 的比值，为此上式可写成

$$
\begin{vmatrix}
a_{11}(s)a_{12}(s)\cdots\cdots a_{1n}(s)\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
a_{i1}(s)a_{i2}(s)\cdots\cdots a_{in}(s)\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
a_{11}(s)a_{n2}(s)\cdots\cdots a_{nn}(s)
\end{vmatrix}
x_1(s)=
\begin{vmatrix}
0\quad a_{12}(s)\cdots\cdots a_{1n}(s)\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
F_i(s)\ a_{i2}(s)\cdots\cdots a_{in}(s)\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
a_1\quad a_{n2}(s)\cdots\cdots a_{nn}(s)
\end{vmatrix}
$$

即 $$|A(s)|X_1(s)=A_{i1}(s)F_i(s)\ .$$

$$\therefore\qquad \frac{X_1(s)}{F_i(s)}=W(s)=\frac{A_{i1}(s)}{|A(s)|}\ .$$

因此，要使 $x_1(t)$ 对 $f_i(t)$ 满足不变性，即 $x_1(t)\equiv 0$ 也即 $X_1(s)\equiv 0$，则必须

$$A_{i1}(s)\equiv 0(|A(s)|\neq 0,\ F_i(s)\neq 0)\ .$$

即当用传递函数来表示不变性条件时，$x_1(t)$ 对 $f_i(t)$ 不变性的必要条件是其传递函数 $W(s)$ 的分子 $A_{i1}(s)$ 为零。显然和前面得出的 $A_{i1}(D)=0$ 是一致的。

三、控制系统的不变性条件

对于单输入单输出的常系数线性控制系统，一般可以用下列微分方程来描述

$$
\begin{aligned}
&a_{11}(D)x+a_{12}(D)y+a_{13}(D)z=c_1r(t)\\
&a_{21}(D)x+a_{22}(D)y+a_{23}(D)z=c_2r(t)+b_2f(t)\qquad(6-2-16)\\
&a_{31}(D)x+a_{32}(D)y+a_{33}(D)z=b_3f(t)\ .
\end{aligned}
$$

式中，x，y，z 为方程组（6－2－16）中的坐标，即控制系统中的物理变量，例如 x 为系统的误差，y 为控制器的输出，z 为系统的输出；