北京广播函授学校

高中班

三角复习講义

—1963—

第一单元

三角函数的定义和基本性質

一　角的概念

（一）角的定义　一条射线在平面内绕着它的端点旋转所形成的量叫做角，如图 1 所示．所以任何一个角 AOB 都可以看做是由它的一边 OB 从另一条边 OA 的位置开始，绕着顶点 O 旋转所形成的．OA 叫做角的始边，OB 叫做角的终边，O 叫做角的顶点．角的终边可以旋转一周、二周、三周等等，这样所形成的角可以是任意大小的角．

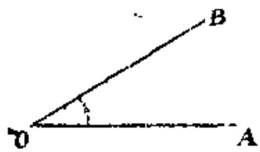


圖　1

（二）正角和負角　角的终边在平面内旋转时可以有两个不同的旋转方向，一个是反时针方向，另一个是顺时针方向，如果一个角的终边的旋转方向是反时针方向，我们就规定这个角是正角；如果是顺时针方向，我们就规定这个角是负角．

（三）終边相同的角　具有共同的始边和终边的角叫做终边相同的角，所有和角 α 终边相同的角，包括角 α 在内，都可以用下面的一般形式来表示：

$$k\cdot 360^\circ+\alpha,$$

或者

$$2k\pi+\alpha;$$

这里 k 是任意整数．

（四）象限角 在直角坐标系中，坐标轴把平面分成四部分，每一部分叫做一个象限．为了方便起见，我们使角的始边和 x 轴的正方向重合，根据终边落在哪一个象限，就把这个角叫做某一个象限的角．各象限的角可以表示如下：

第一象限角 α： $2n\pi<\alpha<2n\pi+\frac{\pi}{2}$，

第二象限角 α： $2n\pi+\frac{\pi}{2}<\alpha<2n\pi+\pi$，

第三象限角 α： $2n\pi+\pi<\alpha<2n+\frac{3\pi}{2}$，

第四象限角 α： $2n\pi+\frac{3\pi}{2}<\alpha<2n\pi+2\pi$；

式中的 n 为任意整数．

如果角的终边恰巧落在坐标轴上，像 0、$\frac{\pi}{2}$、π、$\frac{3\pi}{2}$ 等角（即 $n\pi$、$n\pi+\frac{\pi}{2}$，n 是整数）就不属于任何一个象限，我们把这些角叫做特殊角．

（五）角（或弧）的度量

1． 角（或弧）的度量单位 主要有下列两种：

(1) 六十分制（角度制）

1 周角 $=360^\circ$， $1^\circ=60'$， $1'=60''$．

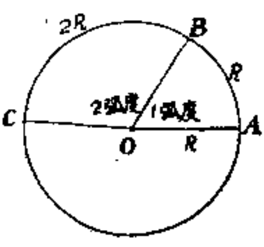


图 2

(2) 弧度制（径制）

定义 以角的顶点为圆心作一个圆，那末这个角的弧度数就是它所对的弧长和半径长的比．

由弧度定义可知，等于半径的长的弧所对的圆心角，叫做 1 弧度的角．例如在图 2 里， AOB=1 弧度；

$\angle BOC=2$ 弧度.

2. 度与弧度的互相换算

$$\pi\text{ 弧度}=180^\circ.$$

下表里所列的各个对应值常常用到，应当记熟:

度	0°	15°	18°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
弧度	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

3. 圆心角、半径和弧长间的关系 如果用 R 表示圆的半径、l 表示弧长、α 表示这弧所对圆心角的弧度数，根据角的弧度定义得

$$\alpha=\frac{l}{R}.$$

注意 使用上面的公式进行计算时，α 必须是弧度数.

例1. 已知圆的半径是 5 厘米，求 18° 的弧长（精确到百分位）.

解 $l=R\cdot\alpha=5\cdot\frac{\pi}{10}=\frac{\pi}{2}\approx1.57$(厘米).

例2. 一扇形的弧含有54°，半径等于 20 厘米，求这扇形的周长和面积（精确到 1 厘米.）

解 设扇形的弧长为 l，那么

$$l=R\cdot\alpha=20\cdot\frac{3\pi}{10}=6\pi\text{（厘米）}.$$

$\therefore$ 这扇形的周长$=2\times20+6\pi\approx59$（厘米）.

$\therefore$ 这扇形的面积$=\frac{1}{2}lR=\frac{1}{2}\cdot6\pi\cdot20\approx190$（平方厘米）.

例1. 用白铁皮剪制一种扇形的另件，设计要求扇形的半径

是 86cm. 弧长是 150cm. 需要剪成多少度的圆心角？（精确到1°.）

解　设圆心角为 α，因此得

$$\alpha=\frac{150}{86}\text{（弧度）}.$$

$\because$　　1 弧度 $=\frac{180^\circ}{\pi}$，

$\therefore$　　$\alpha=\frac{150}{86}\cdot\frac{180^\circ}{\pi}\approx100^\circ.$

所以需要剪成 100° 的圆心角.

例4.　设飞轮的半径是1.2m，每分钟旋转 300 次，

（1）求飞轮每秒钟的角速度，

（2）求轮上一点的速度.

解(1) 飞轮每秒钟旋转的弧度数叫做角速度，设为 ω，因此得

$$\omega=\frac{2\pi\times300}{60}=10\pi\text{（弧度/秒）}.$$

（2）飞轮上某一点的速度就是普通速度也就是飞轮周上这一点每秒所经过的弧长，设为 v、因此、得

$$v=\frac{2\pi\times1.2\times300}{60}=12\pi\quad\text{（米/秒）}.$$

所以所求的角速度为10π(弧度/秒）速度为 12π（米/秒）.

例5.　一条皮带环绕于两个轮子上（如图 3 所示）如果两个轮子的半径 OA 和 O'B 分别是 7 尺和 1 尺，两个轮子的轮心相距12尺，求绳的长（精确到0.1尺）

解　如图 3，作 $O'C\perp OA$，那么

$OC=OA-CA=6$（尺）；

$OO'=12$(尺)

在 $\triangle OO'C$ 中：

$\because \cos\alpha=\dfrac{OC}{OO'}=\dfrac{1}{2}$.

$\therefore \quad \alpha=\dfrac{\pi}{3}$.

$\therefore CO'=OC\cdot \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{3}$

$=6\sqrt{3}$ (尺)

$\therefore AB=A'B'=6\sqrt{3}$ (尺)

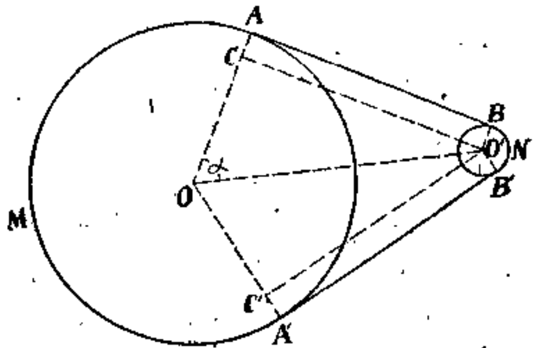


图 3

又$\therefore \quad \angle AOA'=\dfrac{2\pi}{3}$,

$\therefore \quad \overset{\frown}{AMA'}$的长是⊙O周长的$\dfrac{2}{3}$,

即 $\quad \overset{\frown}{AMA'}$ 的长 $=\dfrac{2}{3}\times 2\pi\times 7=\dfrac{28\pi}{3}$ (尺).

$\because \quad \angle CO'O=\dfrac{\pi}{6}$,

$\therefore \quad \angle CO'C'=\dfrac{\pi}{3}$.

$\therefore \quad \overset{\frown}{BNB'}$的长$=\dfrac{1}{3}\times 2\pi\times 1=\dfrac{2\pi}{3}$ (尺).

$\therefore$ 所求的皮带的长$=\dfrac{28\pi}{3}+\dfrac{2\pi}{3}+12\sqrt{3}$

$=10\pi+12\sqrt{3}$

$\approx 30\times 3.14+1.73\times 12$

≈ 52.2 (尺)

所以 皮带的长约为52.2尺。

习 题 一

1. 用弧度制表示下列各角（写成多少π的形式）：

10°、15°、18°、22°、30°、72°、75°、105°、120°、135°、150°、210°、225°、240°、-300°、-315°、-330°、-810°、n°.

2. 用角度制表示下列各角：

$\frac{\pi}{12}$、$\frac{\pi}{6}$、$\frac{\pi}{4}$、$\frac{\pi}{3}$、$\frac{\pi}{2}$、$\frac{5\pi}{9}$、$\frac{7\pi}{12}$、$-\frac{9\pi}{15}$、$-\frac{4\pi}{3}$、$-\frac{3\pi}{2}$、$-\frac{7\pi}{10}$ -3.

3. 正三角形、正五边形、正六边形、正八边形、正十边形、正n边形的一个角各是多少弧度？

4. 在半径等于22.5 cm的圆上，如果一条弧含有40.5°，求这条弧的长（精确到0.1cm）.

5. 已知长50 cm的弧含有200°，求这弧所在圆的半径(精确到15mm).

6. 已知圆的半径等于2.4 m，求这圆上长4 m的弧所含的度数（精确到$1'$）.

7. 在半径为R的圆中，一扇形的圆心角等于θ弧度，求证这扇形的面积是$\frac{1}{2}R^2\theta$.

8. 在半径等于15cm的圆中，一扇形的弧含有54°，求这扇形的周长和面积.

9. 把圆周按3:4:5分为三部分，用弧度表示以各分点为顶点的三角形的各角.

10. 用一般的形式写出和下列各角的始边与终边相同的一切角：

(1) $\frac{4\pi}{3}$，　　(2) -40°.

11. 求适合于下列条件的角：　（n 为任意整数）

1) $\alpha=\frac{\pi}{6}+2n\pi$,　　$-4\pi<\alpha<4\pi$,

2) $\alpha=-\frac{\pi}{12}+2n\pi$,　　$-3\pi<\alpha<3\pi$.

12. 在半径等于 12 cm 的轮子的周上有一点， 求这点绕着圆心旋转 2500° 所经过的距离.

13. 机器的轴在 3 分钟内旋转 1000 周、 它的平均角速度是多少弧度/秒？

14. 一个直径为 40 cm. 的滑轮以 45 弧度/秒 的角速度旋转，求轮周上一点在 5 秒钟内所经过的距离。

15. 已知一个正多边形的一个外角等于它的一个内角的六分之一：

(1) 用弧度表示每一个内角的大小，

(2) 求这正多边形的边数.

16. 某人测得 200° 的圆心角所对的弧长等于半径的 $3\frac{1}{2}$倍，根据这个结果，计算 π 的近似值（精确到 0.01）.

17. 对于下列条件，计算传动皮带的长：

(1) 在直联动机装置中， $R=22.5\ cm$, $r=12.5\ cm$, $c=4.00\ m$;

(2) 在交叉联动机装置中，$R=40.0\ cm$, $r=20.0\ cm$, $c=5.00\ m$.

18. 一个多边形的各内角成等差数列，最小的一个角是$\frac{2\pi}{3}$，公差是$\frac{\pi}{36}$，这个多边形是几边形？

19. 把一圆周分成五部分，如果这五部分成等差数列，最大部分是最小部分的6倍，最小部分的弧所对的圆心角是多少弧度？

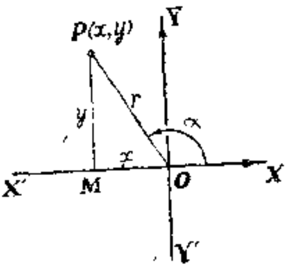


图 4

二 三角函数

(一) 三角函数的定义 如图 4，设 α 是任意角，以角 α 的始边为横坐标轴的正方向，顶点为原点，建立一个平面坐标系后，在终边上任取一点 $P(x, y)$，並设此点至原点的距离为 r，则有：

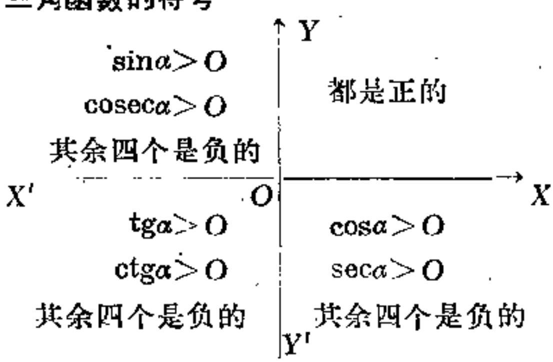
$$\sin\alpha=\frac{y}{r},\qquad \cos\alpha=\frac{x}{r},\qquad \operatorname{tg}\alpha=\frac{y}{x},$$
$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{x}{y},\qquad \sec\alpha=\frac{r}{x},\qquad \operatorname{cosec}\alpha=\frac{r}{y},$$

这些比值对于角 α 的每一个的确定的值，都有确定的值和它对应，所以这些比值都是角 α 的函数，这些函数称为角 α 的三角函数。

根据任意角的三角函数的定义可以知道，终边相同的角的三角函数的值完全相同，就是说，对于任意角 α 和任意整数 k，我们都有：

$$\sin(2k\pi+\alpha)=\sin\alpha,\qquad \cos(2k\pi+\alpha)=\cos\alpha,$$
$$\operatorname{tg}(2k\pi+\alpha)=\operatorname{tg}\alpha,\qquad \operatorname{ctg}(2k\pi+\alpha)=\operatorname{ctg}\alpha,$$
$$\sec(2k\pi+\alpha)=\sec\alpha,\qquad \operatorname{cosec}(2k\pi+\alpha)=\operatorname{cosec}\alpha.$$

(二) 三角函数的符号



例1. 确定下列积或商的符号:

(1) $\sin 105^\circ \cos 195^\circ$　　答: 积的符号是负的.

(2) $\operatorname{tg}220^\circ \operatorname{ctg}310^\circ$　　答: 积的符号是负的.

(3) $\dfrac{\sec 350^\circ}{\operatorname{cosec}130^\circ}$　　答: 商的符号是正的.

例2. (1) 设 $\sin\alpha$ 与 $\operatorname{tg}\alpha$ 同号, α 在第几象限?

答: α在第一象限或第四象限.

(2) 设 $\sin\alpha > O$; $\cos\alpha < O$, α 在第几象限?

答: α在第二象限.

例3. $\dfrac{\sin\theta}{\sec\theta}$是负值时, θ 在什么范围内? 是正值时, θ 在什么范围内?

解 $\dfrac{\sin\theta}{\sec\theta}$是负值时, θ 应在第二象限与第四象限, 即当 $2k\pi+\dfrac{\pi}{2}<\theta<(2k+1)\pi$ 与 $2k\pi+\dfrac{3\pi}{2}<\theta<(2k+2)\pi$ 时, $\dfrac{\sin\theta}{\sec\theta}<0$.

又当 θ 在第一象限与第四象限时, 即$2k\pi<\theta<2k\pi+\dfrac{\pi}{2}$ 与 $2k\pi+\pi<\theta<2k\pi+\dfrac{3\pi}{2}$时, $\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}>0$.

其中 k 为任意整数.

(三) 用线段表示三角函数

以坐标轴的原点 0 为圆心, 以等于单位长的线段为半径, 所作的圆叫做单位圆, 如图 5 所示 (α 在第一象限):

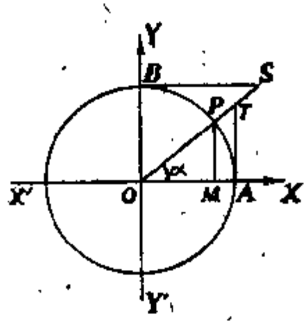


图 5

$$\sin\alpha = \frac{MP}{OP} = \frac{MP}{R} = MP.$$

同理:

$\cos\alpha = OM$, $\operatorname{tg}\alpha = AT$, $\operatorname{ctg}\alpha = BS$, $\sec\alpha = OT$, $\operatorname{cosec}\alpha = OS$.

如果 α 是其他各种情况，可参看§4图6.线段 MP、OM、AT、BS、OT 和 OS 分别叫做角 α 的正弦线、余弦线、正切线、余切线正割线和余割线.

（四）三角函数值的变化

1 三角函数值的变化

从函数线的消长，很容易看出角 α 从 $0°$ 到 $360°$ 的变化过程中各三角函数的变化，列表如下：

α	O		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π	增减情况
$\sin\alpha$	O	↗	1	↘	O	↘	-1	↗	O	Ⅰ、Ⅳ象限内增加，Ⅱ、Ⅲ象限内减少.
$\cos\alpha$	1	↘	O	↘	-1	↗	O	↗	1	Ⅰ、Ⅱ象限内减少，Ⅲ、Ⅳ象限内增加.
$\operatorname{tg}\alpha$	O	↗	不存在	↗	O	↗	不存在	↗	O	各象限内都是增加.
$\operatorname{ctg}\alpha$	不存在	↘	O	↘	不存在	↘	O	↘	不存在	各象限内都是减少.
$\sec\alpha$	1	↗	不存在	↗	-1	↘	不存在	↘	1	Ⅰ、Ⅱ象限内增加，Ⅲ、Ⅳ象限内减少.
$\operatorname{cosec}\alpha$	不存在	↘	1	↗	不存在	↗	-1	↘	不存在	Ⅰ、Ⅳ象限内减少，Ⅱ、Ⅲ象限内增加.

例1. 求 $4\operatorname{tg}^2 45° - \sec^2 60° + \sin^3 30° + \sec 0° \operatorname{ctg} 90°$ 的值.

解 原式 $= 4 \times 1^2 - 2^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + 1 \times 0 = \frac{1}{8}$.

例2. 求$a^2\sin\frac{\pi}{2}+2ab\cos0-b^2\cos\pi+4ab\sin\frac{3\pi}{2}\text{ctg}\frac{\pi}{4}$的值.

解　原式$=a^2+2ab-b^2(-1)+4ab(-1)\times1$

$$=a^2-2ab+b^2=(a-b)^2.$$

例3. 设 $0^\circ<\theta<90^\circ$，求适合方程

$\sin\theta=m^2-2$ 的 m 的值的范围.

解　$\because$ $0^\circ<\theta<90^\circ$，　$\therefore$ $0<m^2-2<1$.

即　$m^2-2>0$；　$m^2-3<0$.

$\therefore$ $m<-\sqrt{2}$，或者 $m>\sqrt{2}$；　$-\sqrt{3}<m<\sqrt{3}$.

故所求的 m 值的范围为

$$-\sqrt{3}<m<-\sqrt{2}\text{，或者}\sqrt{2}<m<\sqrt{3}.$$

例4. 如果 A、B、C 是 $\triangle ABC$ 的三个内角，下列各式在什么情况下有意义？在什么情况下没有意义？为什么？

(1)　$\lg\text{tg}\frac{B+C}{2}$；　　(2)　$\lg[-\cos(B+C)]$.

解　(1) $\because$ A、B、C 为 $\triangle ABC$ 的三个内角，

$\therefore$　$0^\circ<B+C<180^\circ$.

$\therefore$　$0^\circ<\frac{B+C}{2}<90^\circ$.

$\therefore$　$\text{tg}\frac{B+C}{2}>0$.

因此 $\lg\text{tg}\frac{B+C}{2}$ 总有意义.

(2) $\because$ A、B、C 为 $\triangle ABC$ 的三个内角，

並且　$B+C=180^\circ-A$.

因此当 $0^\circ<A<90^\circ$ 时，$90^\circ<B+C<180^\circ$.

$\therefore$　$\cos(B+C)<0$，　即 $-\cos(B+C)>0$.

$\therefore$　当 $0^\circ<A<90^\circ$ 时，$\lg[-\cos(B+C)]$ 有意义.

当 $90°<A<180°$时，$0°<B+C<90°$.

$\cos(B+C)>0$，即 $-\cos(B+C)<0$.，

因为负数没有对数，所以当 $90°<A<180°$ 时，$\lg[-\cos(B+C)]$无意义.

注意事项

1. 任意角的三角函数定义中，所指的一些比的大小和角的大小有关，而和 P 点在终边上的位置无关.

2. 正弦和余弦、正切和余切、正割和余割叫做互为余函数.

3. 在用线段表示三角函数的单位圆中，很明显，当角 α 的终边 OP 落在 OY 或者 OY' 上的时候，x 的值等于零，因此 $\text{tg}\alpha$ 和 $\sec\alpha$ 不存在；当 OP 落在 OX 或者OX' 上的时候，y 的值等于零，因此 $\text{ctg}\alpha$ 和 $\text{cosec}\alpha$ 不存在.

4. 正切线与余切线都是规定自图中A点和B点所作的切线长来表示，这是为了与前面规定的三角函数在各象限所取的符号一致.

习 题 二

1. 如果角的终边上一点的坐标是：(1) (3,4)；(2) (−5, 12)；(3) (−8, −6)；(4) (2, −1)；求这角的正弦、余弦、正切和余切的值.

2. 确定下列各函数的符号：(1) $\sin 1000°$；(2) $\cos(-2200°)$；(3) $\text{tg}\left(-\frac{3\pi}{10}\right)$；(4) $\text{ctg}\,10$.

3. 确定下列各差的符号：

(1) $\sin 123°-\sin 132°$； (2) $\cos 35°-\cos 40°$；

(3) $\text{tg}220°-\text{tg}217°$； (4) $\text{ctg}304°-\text{ctg}316°$；

(5) $\cos 58°-\sin 58°$； (6) $\text{ctg}100°-\text{tg}100°$；

(7) $\sin 81°-\text{tg}81°$； (8) $\text{ctg}125°-\cos 125°$.

4. 确定下列各积或者商的符号:

(1) $\sin 105^\circ \cdot \cos 195^\circ$; (2) $\operatorname{tg} 284^\circ \cdot \operatorname{ctg} 157^\circ$;

(3) $\cos 210^\circ \cdot \sin 115^\circ$; (4) $\cos 285^\circ \cdot \cos 316^\circ$;

(5) $\operatorname{tg} 112^\circ \cdot \sin 165^\circ$; (6) $\cos 318^\circ \cdot \cos 214^\circ$;

(7) $\operatorname{ctg} 300^\circ \cdot \sin 222^\circ$; (8) $\sec 311^\circ \cdot \operatorname{ctg} 311^\circ \cdot \cos 311^\circ$;

(9) $\operatorname{ctg} 276^\circ \cdot \sec 276^\circ \cdot \operatorname{cosec} 276^\circ$;

(10) $\cos 123^\circ \cdot \operatorname{tg} 231^\circ \cdot \sin 312^\circ$;

(11) $\frac{\sin 67^\circ 30'}{\sec 128^\circ 16'}$; (12) $\frac{\cos 270^\circ 4'}{\operatorname{cosec} 118^\circ 37'}$.

5. 设 x 为三角形的一个内角，下列函数中哪个可以是负值？可以是正值？

(1) $\sin x$; (2) $\cos x$; (3) $\operatorname{tg} x$; (4) $\operatorname{ctg}\frac{x}{2}$.

6. 依照下列条件，分别求 0° 到 360° 的角 θ 所在的象限：(1) $\sin\theta$ 是正值、$\cos\theta$ 是负值；(2) $\sin\theta$ 和 $\cos\theta$ 同号；(3) $\sin\theta$ 和 $\operatorname{ctg}\theta$ 同号；(4) $\cos\theta$ 和 $\operatorname{tg}\theta$ 異号；(5) $\sin\theta$ 是负值，$\cos\theta$ 是正值；(6) $\sin\theta$ 和 $\cos\theta$ 異号.

7. 依照下列条件，分别求 0 到 2π 的角 x 所在的象限：(1) $\sin x \cdot \cos x > 0$；(2) $\operatorname{tg} x \ \sin x < 0$；(3) $\frac{\cos x}{\operatorname{ctg} x} > 0$；(4) $\frac{\operatorname{tg} x}{\sin x} > 0$.

8. 设 α 是锐角，利用单位圆说明：

(1) $\sin\alpha + \cos\alpha > 1$; (2) $\operatorname{tg}\alpha > \sin\alpha$.

9. 当角 x 由 90° 变化到 180° 的时候，$\sin x$、$\cos x$、$\operatorname{tg} x$ 和 $\operatorname{ctg} x$ 的变化怎样？

10. 依照下列条件，求 0° 到 360° 的角 θ 所在的象限：(1) $\sin\theta$ 逐渐增加；(2) $\sin\theta$ 逐渐减少；(3) $\sin\theta$ 是负值；(4) $\cos\theta$ 是正值.

11. 设 α 是 0 到 2π 的角，α 是哪些角的时候，它的正切的值：(1) 是正的？(2) 是负的？(3) 等于零？(4) 不存在？α 是哪些象限角的时候，它的正切的值：(1) 逐渐增加？(2) 逐渐减少？

12. 对于 0° 到 360° 的哪些角它的正弦和余弦分别取得极大值？取得极小值？极大值与极小值各是多少？

13. 求下列各式的值：

(1) $5\sin 90^\circ + 2\cos 0^\circ - 2\sin 270^\circ + 10\cos 180^\circ$;

(1) $\cos 180^\circ + \sin^2 60^\circ + \operatorname{tg}45^\circ - \cos^2 30^\circ + \sin 30^\circ + \operatorname{ctg}90^\circ$;

(3) $4\sin\pi - 2\cos\frac{3\pi}{2} + 3\sin 2\pi - \operatorname{tg}\pi$;

(4) $\cos\frac{\pi}{3} - \sin^2\frac{\pi}{4}\cos\pi - \frac{1}{3}\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{3}\cdot\sin\frac{3\pi}{2} + \cos 0$.

14. 设 (1) $\alpha = \frac{\pi}{4}$，(2) $\alpha = \frac{3\pi}{4}$，求下式的值：

$$\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) + 2\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) + 4\cos 2\alpha + 3\cos\left(\alpha + \frac{3\pi}{4}\right).$$

15. θ 在什么条件下，下列各式的值是实数？

(1) $\sqrt{-\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}$;　　(2) $\sqrt{\operatorname{tg}\theta\sec\theta}$;

(3) $\sqrt{\cos\theta} + \sqrt{\sin\theta}$;　　(4) $\sqrt{-\cos\theta} + \sqrt{\operatorname{ctg}\theta}$.

16. x 取什么值的时候 $(0 \leqq x \leqq 2\pi)$，下列各式没有意义？

(1) $\frac{1+\operatorname{tg}^2 x}{1-\operatorname{tg}^2 x}$　　(2) $\frac{\operatorname{ctg}\frac{x}{2}}{1+\sin 2x}$;　　(3) $\frac{\sec x + \operatorname{cosec} x}{2\cos x - 1}$.

17. 设 x 是数实，求证 $\sin\alpha = x + \frac{1}{x}$ 不能成立.

18. 设 $0^\circ < x < 180^\circ$，並且 $\sin x < \cos 50^\circ$，求 x 的范围.

19. (1) 如果 $\cos\theta > \cos 30^\circ$，求锐角 θ 的范围；

(2) 如果 $\sin\theta < \sin\frac{5\pi}{4}$，求第Ⅲ象限内角$\theta$的范围；

(3) 如果 $\mathrm{tg}\,\theta < \mathrm{tg}\frac{7\pi}{4}$，求第Ⅳ象限内角 θ 的范围.

20. 求 0 到 2π 间适合 $\cos\theta > -\frac{1}{2}$ 并且 $\mathrm{tg}\theta > 1$ 的角 θ 的范围.

21. $\mathrm{tg}\alpha$ 在哪些象限内大于或者小于 $\sin\alpha$？并且举例说明.

22. (1) 把$\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}$写成两个锐角的正弦的差的形式；

(2) 把 $\frac{1}{2}\cos\beta+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\beta$写成$\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$.

23. 求使下列各式成立的变量 x 的范围：

(1) $\cos x \geqq \frac{1}{2}$；　　(2) $\mathrm{tg}x-\sqrt{3}>0$；

(3) $|\sin x| \geqq \frac{\sqrt{2}}{2}$；　　(4) $\cos\theta=3x+2$，并且$0\leqq\theta\leqq\pi$.

24. 作出下列各角的正弦线、余弦线、正切线和余切线：

(1) $840°$；　(2) $-150°$；　(3) $\frac{8\pi}{3}$；　(4) $-\frac{11\pi}{4}$.

(五) 同角的三角函数間的关系

1. 倒数关係

$\sin\alpha\cdot\mathrm{cosec}=1,\quad \alpha\neq n\pi$；

$\cos\alpha\cdot\sec\alpha=1,\quad \alpha\neq(2n+1)\frac{\pi}{2}$；

$\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{ctg}\alpha=1,\quad \alpha\neq n\pi,\ \alpha\neq(2n+1)\frac{\pi}{2}$.

2. 商数关係

$$\mathrm{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},\quad \alpha\neq(2n+1)\frac{\pi}{2};$$

$$\mathrm{ctg}\,\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},\quad \alpha\neq n\pi.$$

3. 平方关系

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$;

$1+\operatorname{tg}^2\alpha=\sec^2\alpha,\qquad \alpha\neq(2n+1)\frac{\pi}{2}$;

$1+\operatorname{ctg}^2\alpha=\operatorname{cosec}^2\alpha,\quad \alpha\neq n\pi.$

上面各式中，n 为任意整数.

4. 上列各基本关系式的主要应用

(1) 简化三角函数式:

例1. 化简: $\frac{1}{1+\sin^2x}+\frac{1}{1+\cos^2x}+\frac{1}{1+\sec^2x}+\frac{1}{1+\operatorname{cosec}^2x}$.

解 原式$=\frac{1}{1+\sin^2x}+\frac{1}{1+\cos^2x}+\frac{1}{1+\frac{1}{\cos^2x}}+\frac{1}{1+\frac{1}{\sin^2x}}$

$=\frac{1}{1+\sin^2x}+\frac{1}{1+\cos^2x}+\frac{\cos^2x}{1+\cos^2x}+\frac{\sin^2x}{1+\sin^2x}$

$=\frac{1+\sin^2x}{1+\sin^2x}+\frac{1+\cos^2x}{1+\cos^2x}=2.$

例2. 化简: $\frac{2\sin\alpha\cos\alpha-\cos\alpha}{1+\sin^2\alpha-\sin\alpha-\cos^2\alpha}$.

解 原式$=\frac{\cos\alpha(2\sin\alpha-1)}{(1-\cos^2\alpha)+\sin^2\alpha-\sin\alpha}=\frac{\cos\alpha(2\sin\alpha-1)}{2\sin^2\alpha-\sin\alpha}$

$=\frac{\cos\alpha(2\sin\alpha-1)}{\sin\alpha(2\sin\alpha-1)}=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\operatorname{ctg}\alpha.$

例3. 化简: $\sqrt{\frac{2}{1+\sin\alpha}+\frac{2}{1-\sin\alpha}}$.

解 原式$=\sqrt{\frac{2(1-\sin\alpha)+2(1+\sin\alpha)}{1-\sin^2\alpha}}=\sqrt{\frac{4}{\cos^2\alpha}}$

$=\frac{2}{\sqrt{\cos^2\alpha}}=\frac{2}{|\cos\alpha|}.$