

# 微積分學自修書

上 册

黃述善著

商務印書館出版

# 微積分學自修書

上 册

黃述善著

期 限 表

商 務 印 書 館 出 版

## 序 言

數理的變化，是很複雜的；在一般運算方法，不適用的時候，往往另有一新方法，來解決所遇着的難題。譬如算術的比例、開方，不能計算無窮級數；代數的方程、確率，不能求解函數變遷；三角學的八線對數，不能表明弧度極限；幾何學的点線面體，不能證明高等曲線。像這一類的問題很多。自微積分學發明以後，捨用常數，專談變數，應用簡易方法，解決繁難問題。凡算術、代數、三角及幾何所不能解決的問題，無不可以順利解決；即其他各種科學，如物理、化學、力學、電學等問題，都可應用。

我於1940年夏，在長沙購得奧斯朋“微積分”原本一冊，返家後加以翻譯，並將所有例題，一一演算，費了三年的工夫，才告完成。1946年春，赴沅陵湖南省立第九職業學校任教，即以原稿作為教本，甚為初級職業學生所歡迎。是年冬來滬任職，公餘之暇，復將原稿抄錄校訂，並於卷首增加微積分自修綱要一編，以為初學自修參考之用。其中錯誤，雖經數次改正，恐仍難避免，尚望讀者隨時指正。

1951年8月 湘潭黃述善

# 目 錄

## 第一編 自修綱要

第一章 數學綱要	1
第一節 代數	1
1. 二項定理	1
2. 行列式運算	2
3. 對數性質	2
4. 部分分數	3
第二節 函數	5
1. 變數及常數	5
2. 函數定義	5
3. 因變數及自變數	6
4. 代數函數及超越函數	6
5. 有理函數	6
6. 稱函數及隱函數	7
7. 單值函數及複值函數	7
8. 函數記號	7
9. 逆函數	8
第三節 級數	9
1. 斂級數及發級數	9
2. 絕對收斂及有條件收斂	9
3. 級數測驗	10
(a) 普通測驗法	10
(b) 比較測驗法	10

(c) 比率測驗法 .....	11
4. 常用級數 .....	12
(a) 幾何級數 .....	12
(b) 調和級數 .....	12
(c) 二項級數 .....	12
(d) 指數級數 .....	13
(e) 對數級數 .....	13
(f) 冪級數 .....	13
<b>第四節 三角公式</b> .....	<b>14</b>
1. 弧度法 .....	14
2. 基本關係 .....	14
3. 兩角和及差的函數 .....	14
4. 倍角函數 .....	15
5. 半角函數 .....	15
6. 函數的和與差 .....	15
7. 正弦定律 .....	16
8. 餘弦定律 .....	16
9. 正切定律 .....	16
10. 逆函數 .....	16
11. 三角形面積 .....	16
12. 等邊三角形面積 .....	17
<b>第五節 幾何公式</b> .....	<b>17</b>
1. 面積 .....	17
2. 表積 .....	17
3. 體積 .....	17
<b>第六節 解析幾何</b> .....	<b>18</b>
1. 兩點間的距離 .....	18
2. 三角形面積 .....	18

3. 直線方程式.....	18
4. 圓方程式.....	20
5. 拋物線方程式.....	21
6. 橢圓方程式.....	21
7. 雙曲線方程式.....	22
8. 立體解析幾何.....	22
9. 圓錐曲線.....	26
<b>第二章 微分綱要</b> .....	<b>27</b>
<b>第一節 極限</b> .....	<b>27</b>
1. 極限的意義.....	27
2. 極限的記號.....	27
3. 極限的特例.....	27
<b>第二節 增量</b> .....	<b>28</b>
<b>第三節 導數</b> .....	<b>28</b>
<b>第四節 微分法及微分公式</b> .....	<b>29</b>
1. 代數函數的微分公式.....	29
2. 對數函數及指數函數微分公式.....	32
3. 三角函數微分公式.....	34
4. 反三角函數微分公式.....	37
<b>第五節 逐次微分法</b> .....	<b>41</b>
1. 馬克勞林定理.....	41
2. 台勞定理.....	42
3. 萊本之定理.....	44
<b>第六節 微分</b> .....	<b>45</b>
<b>第七節 導數間的關係</b> .....	<b>45</b>
<b>第八節 導數變換</b> .....	<b>46</b>
<b>第九節 偏微分</b> .....	<b>48</b>

第十節 全微分.....	49
第十一節 極大及極小.....	50
1. 一自變數的極大值及極小值.....	50
2. 兩自變數的極大值及極小值.....	51
3. 三自變數的極大值及極小值.....	52
第十二節 曲線方向.....	52
(a) 直角坐標.....	52
(b) 極坐標.....	53
第十三節 兩曲線交角.....	54
(a) 直角坐標.....	54
(b) 極坐標.....	54
第十四節 切線及法線方程式.....	55
第十五節 漸近線.....	56
第十六節 弧導數.....	57
(a) 直角坐標.....	57
(b) 極坐標.....	58
第十七節 灣曲方向.....	58
第十八節 反曲點.....	59
第十九節 曲率圓.....	60
第二十節 曲率半徑.....	60
第二十一節 曲率中心.....	61
第二十二節 漸屈線及漸伸線.....	62
第二十三節 相切階.....	62
第二十四節 包絡.....	63
第三章 積分綱要.....	65
第一節 積分定義.....	65

第二節 積分原理.....	65
(a) 積分常數 .....	65
(b) 積分的和 .....	65
(c) 常因數 .....	65
第三節 積分基本公式.....	66
第四節 定積分應用.....	72
1. 求面積法.....	72
(a) 直角坐標 .....	72
(b) 極坐標 .....	73
2. 求弧長法.....	74
(a) 直角坐標 .....	74
(b) 極坐標 .....	75
3. 求體積法.....	76
4. 求表積法.....	77
5. 斷面求積法.....	78
第五節 重積分.....	78
第六節 重積分應用.....	79
1. 轉動慣量.....	79
(a) 平面轉動慣量 .....	79
(b) 立體轉動慣量 .....	82
2. 旋轉體積及表積.....	83
3. 任何立體的表積及體積.....	83
(a) 表積 .....	83
(b) 體積 .....	86
第七節 重心.....	87
1. 自波氏定理.....	88
第八節 吸引力.....	88



第四章 附錄.....	90
第一節 曲線備考.....	90
1. 菱形線.....	90
2. 箕舌線.....	90
3. 蔓葉線.....	91
4. 懸鏈線.....	92
5. 正魚弦拋物線.....	93
6. 三次拋物線.....	93
7. 半三次拋物線.....	94
8. 曲線 $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{3}{2}} = 1$ .....	94
9. 曲線 $a^4y^2 = a^2x^4 - ax^6$ .....	94
10. 圓 $r = a \sin \theta + b \cos \theta$ .....	95
11. 阿基米德螺線.....	95
12. 雙曲螺線.....	96
13. 對數螺線.....	97
14. 焦點拋物線.....	97
15. 等軸雙曲線.....	98
16. 雙紐線.....	99
17. 四瓣蕃薇線.....	99
18. 心臟線.....	100
19. 擺線.....	100
20. 准擺線.....	101
21. 外擺線.....	102
22. 內擺線.....	104
第二節 雙曲線函數及公式.....	105
第三節 微分公式備考.....	110
(A) 導數.....	110

(B) 微分.....	112
第四節 積分公式備考.....	113
第五節 積分輔助公式.....	119
附原名及譯名對照表.....	121

## 第二編 微分例題詳解

例題(一)	函數.....	129
例題(二)	導數.....	134
例題(三)	導數應用.....	141
例題(四)	初步微分法.....	147
例題(五)	對數及指數函數微分法.....	168
例題(六)	三角函數微分法.....	185
例題(七)	三角反函數微分法.....	202
例題(八)	導數關係.....	216
例題(九)	逐次微分法.....	223
例題(十)	來本之定理應用.....	236
例題(十一)	微分及無窮小.....	240
例題(十二)	隱函數導數.....	243
例題(十三)	級數測驗.....	250
例題(十四)	收斂值判定.....	256
例題(十五)	馬克勞林氏定理應用.....	259
例題(十六)	級數計算.....	277
例題(十七)	台勞氏定理應用.....	280
例題(十八)	不定分數.....	288
例題(十九)	不定式.....	293

例題(二十)	極大及極小條件.....	299
例題(二十一)	極大及極小應用問題.....	314
例題(二十二)	偏微分法.....	348
例題(二十三)	切面及法線方程式.....	355
例題(二十四)	高階偏微分法.....	360
例題(二十五)	全導數及全微分.....	369
例題(二十六)	台勞氏定理推演.....	378
例題(二十七)	導數變換.....	380
例題(二十八)	多變數函數極大與極小值.....	387
例題(二十九)	曲線方向;切線及法線;切距及交角.....	406
例題(三十)	任一點 $(x', y')$ 切線及法線方程式.....	418
例題(三十一)	漸近線方程式.....	426
例題(三十二)	極坐標曲線方向.....	431
例題(三十三)	曲率定向及反曲點.....	442
例題(三十四)	曲率半徑.....	449
例題(三十五)	曲率中心及漸屈線.....	461
例題(三十六)	相切階.....	468
例題(三十七)	包絡方程式.....	473

### 第三編 積分例題詳解

例題(一)	基本積分式.....	485
例題(二)	指數積分式.....	493
例題(三)	三角函數積分式.....	495
例題(四)	其他重要積分式.....	505
例題(五)	積分簡單應用.....	514

例題(六)	常數判定	520
例題(七)	有理分數積分法	530
	(A) 分母因數均為一次, 且無重複	530
	(B) 分母因數均為一次, 但有重複	535
	(C) 分母含有二次因數, 但無重複	539
	(D) 分母含有二次因數, 且有重複	550
例題(八)	無理函數積分法	567
	(A) 含有 $(ax+b)^{\frac{1}{2}}$ 積分法	567
	(B) 含有 $\sqrt{\pm x^2+ax+b}$ 積分法	576
例題(九)	三角函數簡易積分法	581
	(A) $\sin^n x dx$ , $\cos^n x dx$ 及 $\sin^m x \cos^n x dx$ 積分法	581
	(B) $\tan^n x dx$ , $\cot^n x dx$ , $\sec^n x dx$ , $\operatorname{cosec}^n x dx$ , $\tan^m x \sec^n x dx$ 及 $\cot^m x \operatorname{cosec}^n x dx$ 積分法	585
	(C) 用複角求 $\sin^m x \cos^n x dx$ 積分法	592
例題(十)	部分積分法	595
例題(十一)	含有 $e^{ax} \sin nax$ 及 $e^{ax} \cos nax$ 積分法	611
例題(十二)	用輔助公式求積分法	618
	(I) 二項代數式	618
	(II) 三角函數	630
例題(十三)	代入積分法	637
	(A) 含有 $(a+bx^2)^{\frac{1}{2}}$ 積分法	637
	(B) 含有 $\sqrt{a^2-x^2}$ 及 $\sqrt{x^2\pm a^2}$ 用三角函數代 入積分法	639
	(C) 三角函數用代數代入積分法	648

	(D) 以 $\tan \frac{x}{2} = z$ 有理數代入積分法	654
	(E) 混合代入法	659
例題(十四)	積分求和法	664
例題(十五)	無窮積分法	677
例題(十六)	變更極限法	678
例題(十七)	定積分求面積法	683
	(A) 直角坐標	683
	(B) 極坐標	696
例題(十八)	定積分求弧長法	706
	(A) 直角坐標	706
	(B) 極坐標	715
例題(十九)	定積分求旋轉平面體積法	723
例題(二十)	定積分求旋轉曲線表積法	734
例題(二十一)	斷面求體積法	743
例題(二十二)	重積分法	750
例題(二十三)	重積分應用	754
	(A) 直角坐標	754
	(B) 極坐標	766
	(C) 求旋轉平面體積及表積	769
例題(二十四)	求任何立體表積、體積及轉動慣量	776
	(A) 求表積法	776
	(B) 求體積法	784
	(C) 求轉動慣量	792
例題(二十五)	求重心法	797

---

例題(二十六)	應用白波氏定理求旋轉表積及體積	810
例題(二十七)	流體壓力	811
例題(二十八)	流體壓力中心	820
例題(二十九)	吸引力	825
例題(三十)	雙曲線函數	827

# 微積分學自修書

## 第一編 自修綱要

### 第一章 數學綱要

欲明瞭微積的意義及微積分的應用，當熟悉大代數，三角學，幾何學及解析幾何。茲樓列各項重要原理及公式於下：—

#### 第一節 代數

##### 1. 二項定理

$$(x+y)^n = x^n + nx^{n-1}y + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}y^2 + \dots + nxy^{n-1} + y^n$$

若將右邊首項移置於左邊，而以  $y$  除之，則有

$$\frac{(x+y)^n - x^n}{y} = nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}y + \frac{n(n-1)(n-2)}{3}x^{n-3}y^2 - \dots$$

若  $y$  漸小至無窮，則右邊含有  $y$  及  $y$  之高次幕，均得略之，故有

$$\frac{(x+y)^n - x^n}{y} = nx^{n-1}$$

若  $n$  為負數，則有

$$\frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \dots$$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = (1-x)^{-2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots$$

以上三式，學者當牢記之。

## 2. 行列式運算

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$= a_1 b_2 c_3 - a_2 b_3 c_2 + a_3 b_3 c_1 - a_2 b_1 c_3 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1$$

## 3. 對數性質

設

$$b^x = n, \text{ 則有 } x = \log_b n$$

$$\log_a mn = \log_a m + \log_a n$$

$$\log_a \frac{m}{n} = \log_a m - \log_a n$$

$$\log_a m^r = r \log_a m$$

$$\log_a \sqrt[r]{m} = \frac{1}{r} \log_a m$$

$$\log_a b = \frac{\log_a m}{\log_a m}, \text{ 若 } m = a, \text{ 則有}$$

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}, \text{ 故有}$$

$$\log_a b \times \log_b a = 1$$

$$\log_a n = \frac{\log_e n}{\log_e a} = \log_e n \times \frac{1}{\log_e a}$$

$$\log_{10} n = \log_e n \times \frac{1}{\log_e 10} = \log_e n \times \log_{10} e$$

$$= \log_e n \times .434 = \log_e n \times M$$

$$M = \text{模數} = .434$$

或

$$\log_e n = \log_{10} n \times \log_e 10$$

$$= \log_{10} n \times 2.3026$$



## 4. 部分分數

例 (一) 分母爲一次因數, 且無重複;

$$\frac{x^2+6x-8}{x^3-4x} = \frac{x^2+6x-8}{(x-2)(x+2)x} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x}$$

去分母, 則有

$$\begin{aligned} x^2+6x-8 &= Ax(x+2)+Bx(x-2)+C(x-2)(x+2) \\ &= (A+B+C)x^2+2(A-B)x-4C \end{aligned}$$

令係數相等, 則有

$$A+B+C=1$$

$$2(A-B)=6$$

$$-4C=-8$$

解之, 得

$$A=1 \quad B=-2 \quad C=2$$

故有

$$\frac{x^2+6x-8}{x^3-4x} = \frac{1}{x-2} - \frac{2}{x+2} + \frac{2}{x}$$

別法:—

設  $x=2$ , 則有  $8=A \times 2 \times 4=8A \quad \therefore A=1$

設  $x=-2$ , 則有  $4-12-8=B(-2) \times (-4)$

即  $-16=8B \quad \therefore B=-2$

設  $x=0$ , 則有  $-8=C \times (-2) \times (2)=-4C$

$$\therefore C=2$$

。例 (二) 分母因數, 均爲一次, 但有重複;

$$\frac{x^3+1}{x(x+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-1)} + \frac{D}{(x-1)}$$

去分母, 則有

$$\begin{aligned} x^3+1 &= A(x-1)^2+Bx+Cx(x-1)+Dx(x-1)^2 \\ &= (A+D)x^3+(C-2D)x^2+(3A+B-C+D)x-A \end{aligned}$$