GAO
DENG
SHU
XUE

高等数学

山东省六所师范院校《高等数学》教材编写组

山东省出版总社
临 沂 办 事 处

·下·

前　言

本书是根据三年制师范专科学校物理专业《高等数学》教学大纲与我省教学需要而编写的。编写中兼顾到除可作高师二年制物理专业、三年制化学专业以及函授、进修同类专业的教材外、还可作电大、夜大同类专业的教学参考书.

本书是《高等数学》的基础部分，分上、下两册. 上册包括一元函数微积分学、空间解析几何、行列式和矩阵等。下册包括多元函数微积分学、常微分方程、矢量分析与场论初步、无穷级数等. 书中带* 号内容，可供选用。各章配有习题，并另有附印的习题解答.

参加本书编写工作的有临沂师专吴大坤、泰安师专赵兴乐、烟台师范学院秦祥保、魏远、山东煤矿教育学院张润庠、青岛师专陈殿宣、临沂教育学院王端中等同志。

本书的审定以魏远付教授为主，还有吴大坤、赵兴乐、张润庠。参加审稿会的单位有济宁师专、山东省教育学院、济宁教育学院、青岛教育学院、潍坊教育学院、聊城教育学院、德州教育学院、济南教育学院、济南师专。

参加审稿的同志都认真审阅了部分原稿，提出了许多改进意见。在本书编印过程中，山东省教[illegible]师专、泰安师专、山东煤矿教育[illegible]大力支持，对此我们表示衷心[illegible]

限于编者水平，又加编[illegible]不妥之处定然不少，恳切希望读者提出批评指正。

——编　者

一九八五年六月

目　　录

第九章　多元函数微分学

前面我们讨论的都是只有一个自变量的函数，这种函数叫做一元函数。在实际中，研究的问题往往牵涉到多方面的因素。反映到数学上就是一个变量依赖于几个变量的情形。这就要求我们必须研究多元函数以及多元函数的微积分学。本章将在一元函数微分学的基础上，讨论多元函数的微分学。讨论中我们以二元函数为主，而一般的多元函数可以类推。

§9—1多元函数的基本概念

一、多元函数的概念

在许多自然现象以及实际问题中，经常会遇到多个变量之间的依赖关系，举例如下：

例1　圆柱的体积V和它的底半径r、高h之间具有关系

$$V=\pi r^2 h$$

这里，V是随着r、h的变化而变化的，当r、h在一定的范围（$r>0$，$h>0$）内取定一对值时，V的对应值就随之确定。

例2　一定量的理想气体，压强P、体积V和绝对温度T之间具有关系　$P=\frac{RT}{V}$

其中R为常数。这里，P是随着V，T的变化而变化的，当V、T在一定的范围（$V>0$，$T>0^0K$）内取一对值时，P的对应值就随之确定。

例3　设R是电阻R_1、R_2并联后的总电阻，根据电学知

道，它们之间具有关系 $R=\dfrac{R_1R_2}{R_1+R_2}$

这里，R是随着R_1，R_2的变化而变化的，当R_1、R_2在一定的范围内($R_1>0$，$R_2>0$)内取定一对值时，R的对应值就随之确定。

上面三个例子的具体意义虽各不同，但是却有它的共性，抽出它们的共性就可得出以下二元函数的定义。

定义1 设有三个变量x、y和z。如果当变量x、y在一定范围内任意取定一对值时，变量z按照一定的规律，总有确定的数值和它们对应，则变量z叫做变量x、y的二元函数，记作 $z=f(x、y)$ 或 $z=z(x，y)$

其中x、y叫做自变量，而变量z叫做因变量，自变量x、y的变化范围叫做函数的定义域。

类似地可以定义三元函数$u=f(x，y，z)$以及三元以上的函数。

例如，长方体体积V是它的长a、宽b和高h的函数

$$V=abh$$

电流通过电阻时所作的功P是电阻R、电流I和时间t的函数

$$P=I^2Rt$$

等等。

二元及二元以上的函数，统称为多元函数。

我们知道，可用平面上的点P(x，y)来表示一对有序数组x、y。于是函数$z=f(x、y)$也可简记为$z=f(P)$，而称z为点P的函数。类似地，可用空间内的一点P(x、y、z)来表示有序数组x、y、z。函数$u=f(x、y、z)$也可简记为$u=f(P)$，等等。

关于函数的定义域，与一元函数类似，可做如下约定：在用算式表达二元函数$z=f(x,y)$时，就以这个算式中包含的运算都能进行的自变量x、y的变化范围为这个函数的定义域. 例如$z=\ln(x+y)$的定义域为适合$x+y>0$的点的全体，即xoy平面内在直线$x+y=0$上方的全体. 所以这函数的定义域为半个平面(图9—1). 又如，函数$z=\arcsin(x^2+y^2)$的定义域为适合$x^2+y^2\leqslant 1$的点的全体，即圆周$x^2+y^2=1$上及其内部的点的全体(图9—2).

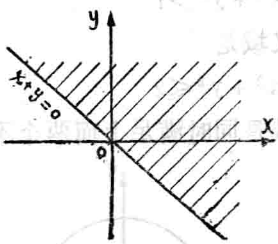

图9—1

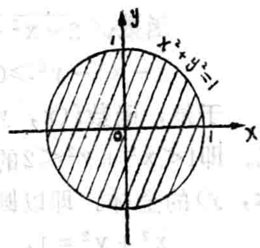

图9—1

下面通过例子，说明函数定义域的求法.

例4　求函数$z=\arcsin\dfrac{x}{2}+\arcsin\dfrac{y}{2}$的定义域.

解　函数　$\arcsin\dfrac{x}{2}$的定义域是

$$\left|\frac{x}{2}\right|\leqslant 1\quad 即\quad |x|\leqslant 2$$

函数$\arcsin\dfrac{y}{3}$的定义域是

$$\left|\frac{y}{3}\right|\leqslant 1,\quad 即\quad |y|\leqslant 3$$

于是，函数$f(x,y)$的定义域是同时满足$|x|\leqslant 2$，$|y|\leqslant 3$的点(x,y)的全体，即包括边界的矩形(图9—3)

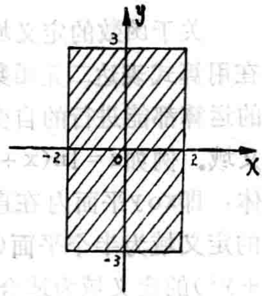

图9—3

例5 求函数

$$f(x,y)=\ln(x^2+y^2-1)+\sqrt{2-x^2-y^2}$$

的定义域.

解 函数 $\ln(x^2+y^2-1)$的定义域是

$x^2+y^2-1>0$， 即 $x^2+y^2>1$

函数$\sqrt{2-x^2-y^2}$的定义域是

$2-x^2-y^2\geqslant 0$， 即 $x^2+y^2\leqslant 2$

于是，函数$f(x,y)$的定义域是同时满足上面两个不等式。即$1<x^2+y^2\leqslant 2$的点(x,y)的全体。即以圆

$$x^2+y^2=1,$$

即 $x^2+y^2=2$

为边界所围成的圆环内部所有点及圆周$x^2+y^2=2$上所有的点(图9—4)

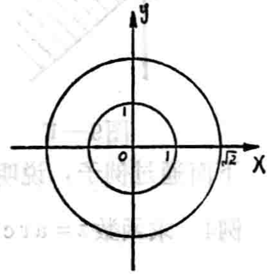

图9—4

二元函数的定义域，一般是平面上的一个区域，所谓平面上的区域，是指由一条曲线或几条曲线(这些曲线可以延伸到无穷远)所围成的平面上的一部分．例如，平面上的椭圆形、矩形、扇形、第一象限、两圆围成的环形等等，都是区域．如果一个区域可以被包含在一个以原点为圆心，而半径适当大的圆内，则称该区域是有界的；否则，称区域是无界的．围成区域的曲线称为该区域的

边界，包括全部边界的区域称为闭区域；不包括边界上任何一点的区域称为开区域。通常用D表示一个区域。在上面所举的例子中，由不等式$x+y>0$确定的区域(图9—1)是无界开区域，而由不等式$x^2+y^2\leqslant 1$确定的区域是有界闭区域(图9—2)。

所谓一点的邻域，是指以该点为中心的一个圆形开区域，例如，适合不等式

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$$

的一切点(x, y)组成以$P_0(x_0, y_0)$为圆心，δ为半径的邻域，简称为点P_0的δ邻域。区域D内部的点简称内点，区域D的边界上的点称为边界点。内点与边界点的区别是：如P为内点，则必存在点P的一个邻域完全包含在D内(图9—5)；如P为边界点，则不论P的邻域怎样小，必定同时含有D内的点及D外的点。

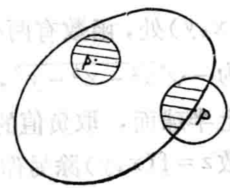

图9—5

我们曾利用平面直角坐标系来表示一元函数$y=f(x)$的图形，一般说来，它是平面上的一条曲线。对于二元函数$z=f(x,y)$，我们可以用空间直角坐标系来表示它的图形。设函数的定义域为xoy平面上某一区域D，对于D中的每一点$P(x,y)$，在空间可以作出一点$M(x,y,f(x,y))$与它的对应。当点$P(x,y)$在D中变动时，点$M(x,y,f(x,y))$就在空间相应地变

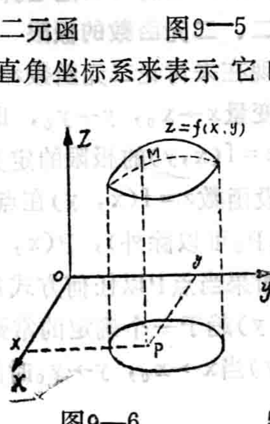

图9—6

动，一般说来，它的轨迹是一个曲面(9—6图)。这个曲面就称为二元函数$z=f(x,y)$的图形。因此，二元函数可用一个曲面作为它的几何表示。

有了二元函数的几何表示方法，我们就可以借助于几何直观性来思考和解决一些问题了。同时，也可以将一些几何问题用分析的方法加以讨论。

例如，由空间解析几何知道，线性函数

$$z=ax+by+c$$

的图形是一个平面。由方程

$$x^2+y^2+z^2=a^2$$

所确定的函数$z=f(x,y)$的图形是球心在原点、半径为a的球面，它的定义域是圆形闭区域D：$x^2+y^2\leqslant a^2$。在D上任一点(x,y)处，函数有两个对应值，一个为$\sqrt{a^2-x^2-y^2}$，另一个为$-\sqrt{a^2-x^2-y^2}$。因此，这是多值函数，取正值的一个表示上半球面，取负值的一个表示下半球面。以后我们对二元函数$z=f(x,y)$除另作声明外，总假定它是单值的，如果遇到多值函数，我们可以把它拆成单值函数，分别加以讨论。

二、二元函数的极限

现在来讨论二元函数$z=f(x,y)$的极限概念，也就是讨论自变量$x\to x_0$，$y\to y_0$，即点$P(x,y)\to P_0(x_0,y_0)$时，函数$z=f(x,y)$的极限的定义。

设函数$z=f(x,y)$在点$P_0(x_0,y_0)$的某一邻域内有定义(点P_0可以除外)，$P(x,y)$是该邻域内异于P_0的任意一点。如果当点P以任何方式趋近于点P_0时，函数的对应值$f(x,y)$趋于一个确定的常数A，我们就说，A是函数$z=f(x,y)$当$x\to x_0$，$y\to y_0$时的极限，记作

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A,$$

或 $f(x,y)\to A \quad (x\to x_0,\ y\to y_0)$.

在这里我们注意到点$P(x,y)$趋近于$P_0(x_0,\ y_0)$，就是它们之间的距离趋于零，即

$$\rho=|PP_0|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\to 0$$

因此上述极限记号也可以记作

$$f(x,y)\to A(\rho\to 0)$$

例6 设$f(x,y)=(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{xy} \qquad (x\neq 0,\ y\neq 0)$

求 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,\ y)$.

解 因为 $\left|(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{xy}\right|=\left|x^2+y^2\right|\left|\sin\dfrac{1}{xy}\right|$

$$\leqslant|x^2+y^2|$$

而当$x\to 0$，$y\to 0$时，$(x^2+y^2)\to 0$，所以有

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{xy}=0.$$

类似于一元函数极限的《ε—δ》定义，二元函数极限的定义也可以叙述如下：

定义 设函数$z=f(x,\ y)$在$P_0(x_0,\ y_0)$的某一邻域内有定义(点P_0可以除外)。如果对于每一个任意给定的正数ε(不论它多么小)，总存在一个正数δ，使得对于适合不等式 $0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$

的一切点$P(x,\ y)$，所对应的函数值$f(x,\ y)$都满足不等式

$$|f(x,\ y)-A|<\varepsilon.$$

那么常数A叫做函数$z=f(x, y)$当

$$x\to x_0,\ y\to y_0 \text{ 或 } \rho=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\to 0$$

时的极限。

从几何上说，$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f((x, y)=A$的定义是：如果作两个平行平面$z=A-\varepsilon$，$z=A+\varepsilon$，则总有一个正数$\delta$存在，相应地有一个点$P(x_0, y_0)$的$\delta$邻域，在这个邻域内($P_0$可以除外)函数$z=f(x, y)$的图形将位于上述两个平行平面之间。

一元函数极限的一些运算法则，都可以推广到多元函数，不再赘述。

例7 求 $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}}\dfrac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$

解 显然 $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}} x=1 \qquad \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}} e^y=1$

故 $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}}(x+e^y)=1+1=2$

同理 $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}}\sqrt{x^2+y^2}=1\neq 0$

于是

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}}\frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)}\ln(x+e^y)}{\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)}\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$=\frac{\ln\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)}(x+e^y)}{\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)}\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{\ln 2}{1}=\ln 2$$

例8　求$f(x,y)=\dfrac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$在(0，0)点的极限。

解　$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\xlongequal{令x^2+y^2=V}\lim_{v\to0}\frac{\sin V}{V}=1$$

例9　求　$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}$$

解　$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}=\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{xy(\sqrt{xy+1}+1)}{(\sqrt{xy+1}-1)(\sqrt{xy+1}+1)}$$

$$=\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}(\sqrt{xy+1}+1)=1+1=2$$

我们必须注意，所谓极限存在，是指P(x，y)以任何方式趋近于$P_0(x_0,y_0)$时，函数都无限接近于A。因此，如果P(x，y)以某一特殊方式，例如沿着一条定直线或定曲线趋近于$P_0(x_0,y_0)$时，即使函数无限接近于某一确定值，我们也不能由此断定函数的极限存在。下面用例子说明这种情形。

考察函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x，y不同时为0)\\ 0 & (x=y=0)\end{cases}$$

显然，当点P(x，y)沿x轴趋近于点(0，0)时，

$$\lim_{x\to0}f(x,0)=\lim_{x\to0}0=0;$$

又当点P(x，y)沿y轴趋近于点(0，0)时，

$$\lim_{y\to 0} f(0,y)=\lim_{y\to 0} 0=0.$$

虽然上面以两种特殊方式(点P(x，y)沿x轴或沿y轴)趋近于原点时函数的极限存在并且相等，但是极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$ 并不存在。这是因为当点P(x，y)沿着直线$y=kx$趋近于点(0，0)时，有

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx\to 0}} \frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{kx^2}{x^2+k^2x^2}=\frac{k}{1+k^2}.$$

显然它是随着k的不同而改变的。例如，$k=1$(即P沿第一、三象限平分线趋近于(0,0)点)，便得极限$\frac{1}{2}$。(即可沿二、四象限平分线趋(0,0)点，便得极限$-\frac{1}{2}$。所以$f(x,y)$在点(0，0)的极限不确定，没有极限。

二元以上函数的极限定义与二元函数的极限定义相类似，读者可以自己给出。

三、二元函数的连续性

连续定义　如果$f(x,y)$在一点$P_0(x_0,y_0)$的函数值与极限值都存在并且相等，即

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=f(x_0,y_0)$$

那么就称函数$f(x,y)$在点$P_0(x_0,y_0)$连续，或函数在P_0点有连续性。

由上面定义可知，函数$f(x,y)$在$P_0(x_0,y_0)$连续必须要满足三个要求：

(1) $f(x,y)$在P_0有函数值；(2) $f(x_0,y_0)$在P_0有极

限值；（3）函数值与极限值相等.

如果二元函数在区域D内各点都连续，那么就称函数在区域D内连续. 二元连续函数的图形是一个无孔隙、无裂缝的区面. 例如连续函数

$$Z=\sqrt{1-x^2-y^2} \qquad (x^2+y^2\leqslant 1)$$

的图形是球心在原点，半径为1的上半球面.

间断定义　函数在一点如果不连续(上面所说的三个要求有任一个不被满足)，该点就称为函数的间断点. 前面已讨论过函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y\text{不同时为}0)\\ 0 & (x=y=0)\end{cases}$$

当$x\to 0$，$y\to 0$时极限不存在，所以(0，0)点是函数的间断点. 二元函数的间断点可以形成一条曲线，例如函数

$$Z=\sin\frac{1}{x^2+y^2-1}$$

在圆周$x^2+y^2=1$上没有定义，所以说圆周上各点都是函数的间断点.

类似地可以给出二元以上的函数在某点连续与间断的定义，不再赘述.

与闭区间上一元连续函数的性质相类似，在有界闭区域上，多元连续函数也有如下性质，

性质1(有界性)在闭域上连续的多元函数，则它在该域上有界. 即存在一个数M>0，对闭域中任意一点(x，y)，有$|f(x,y)|\leqslant M$

性质2(最大、小值性)在闭域上连续的多元函数，它

在该域上总有一个最小值和一个最大值。

性质 3（介值性）在闭域上连续的多元函数，若在该域上取得两个不同的函数值，则它在该域上至少有一次取得这两值之间的任一值。

我们已经指出，一元函数中关于极限运算的法则对于多元函数仍然适用；根据极限运算法则，可以证明多元连续函数的和、差、积均为连续函数；在分母不为零处，连续函数的商为连续函数；多元连续函数的复合函数也是连续函数。

与一元初等函数相类似，多元的初等函数也是可由一个式子所表示的函数，而这个式子是由自变量（如x，y等）利用基本初等函数经过有限次的四则运算和复合步骤所构成的。例如，$\frac{x+x^2-y^2}{1+x^2}$，$\sin(x+y)$，$e^{x+y}\ln(1+x^2+y^2)$ 等都是多元初等函数。

根据上面指出的连续函数和、差、积、商的连续性以及连续函数的复合函数的连续性，我们进一步可得如下结论：一切多元初等函数在其定义域内是连续的。

由多元初等函数的连续性，如果要求它在一点P_0的极限值，而点P_0又在该函数的定义域内，则极限值就是函数在该点的函数值，即

$$\lim_{p\to p_0} f(p)=f(p_0)$$

例如：

$$\lim_{\substack{x\to 2\\ y\to 1}}(x^2-2xy+3y^2)=2^2-2\cdot2\cdot1+3\cdot1^2=3;$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to \frac{1}{2}}}\arcsin\sqrt{x^2+y^2}=\arcsin\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{\pi}{6}.$$