北京市电视教学讲座教材

微积分

（一）

北京师范大学数学系

1978.1

前　言

本教材是为北京市电视教学讲座物理专业选用的，是根据清华大学１９７２年编写的微积分试用教材稍加删改而成。主要内容是一元函数的微积分，级数和微分方程不包括在内。

北京师范大学数学系

１９７８年1月

目　　录

第一章　函数

毛主席教导说："科学研究的区分，就是根据科学对象所具有的特殊的矛盾性"。微积分是以现实世界的变量为其研究对象的一门数学。变量之间的相互影响和相互联系，即变量间的函数关系，是我们首先加以研究的对象。然后，我们再进一步研究这个对象所具有的特殊的矛盾性——微分和积分。

本章第一节介绍函数的概念及其应用，第二节是研究实际中经常遇到的基本初等函数的图形和性质，第三节研究函数的变化趋势问题。

第一节　变量与函数

1－1　常量与变量

一、在研究自然现象或解决生产问题时，会遇到两种状态的量，一种是变的，即在某个过程中，这个量可以取得不同的数值；另一种是不变的，即在某个过程中，这个量保持固定的数值，前者叫变量、后者叫常量。例如，人造地球卫星在运行过程中，它与地面的距离是变量；火车由北京开往天津的过程中，火车离开北京的距离是变量，而每节车皮的长度是常量；一根圆轴在加热过程中，轴的温度逐渐升高，是变量，轴受热膨胀，其长度也是变量，而截面周长与直径之比则是常量π，……等等。

一个量是常量还是变量，和研究的具体问题和具体过程有关。例如，气温变化虽然使机器上的轴热胀冷缩，但当气温变化引起的轴长变化不大时，通常将轴长看作常量，而在较精密的仪器上，轴的长度的小变化也可

能影响仪器的精度，这时就应将轴长看成变量，以估计它对精度的影响。这说明一个量究竟是常量还是变量，要根据具体情况作具体分析。

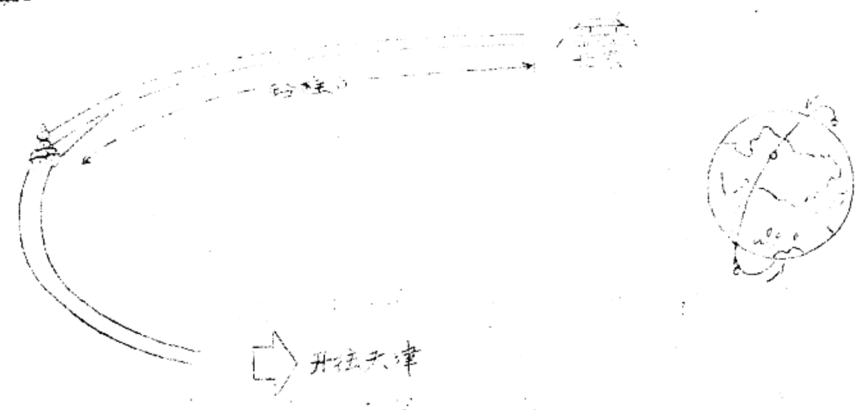


图 1－1

在数学中，常量常用字母a、b、c等表示，变量常用字母x、y等表示，而用x_0、y_0表示变量x、y取的某个特定值。

二、区间

变量的取值总有一定的范围。常见的一种情形是，变量可以取得两个数之间的所有数。例如，我国第一颗人造卫星运行时，卫星与地面距离s是变量，在近地点，s的值为439公里，在远地点，s的值为2384公里，整个运行过程中，s的变化范围为439与2384之间的所有数。这样的变化范围叫区间。区间常用下列三种方法表示：

1、几何表示法

初等数学中就知道，任何一个实数都可用数轴上的点来表示，那么区间就可用数轴上的一个线段来表示。例如，数a对应数轴上A点，数b（设b＞a）对应数轴上B点* 如果变量x的变化范围为a、b之间的所

* 在以后的叙述中，数和它在数轴上对应的点，常常不加区别，如：数x_0对应的点，就说是x_0点。

有数，则线段AB就表示这个区间。变量x的变化范围包括端点值a、b时，这样的区间叫闭区间。如果不包括端点值，就叫开区间。在图形上区间端点处用不同的记号加以区分（图1－2）。

图 1－2

2、括号表示法

开区间用(a, b)表示，闭区间用$[a, b]$表示。

3、不等式表示法

开区间用$a<x<b$表示，闭区间用$a\le x\le b$表示。

例 人造卫星离地面的距离S是变量，S的变化范围是439到2384（公里）之间的区间，包括端点值，可用$[439, 2384]$或$439\le S\le 2384$表示，几何表示是图1－3中S轴上的线段。

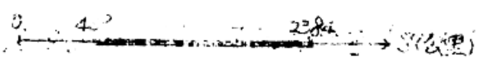


图 1－3

如果变量x能取大于和等于a的任何数，这时，x的变化范围可用数轴上一个无穷长的线段表示，如图1－4。这叫无穷区间，这个区间也可用$[a, +\infty)$表示，“$+\infty$”读作正无穷大，或用$S\le x<+\infty$表示。

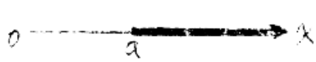


图 1－4

思考和练习

(1)、举一个实际例子，说明变量与常量。

(2)、发射炮弹，炮弹飞行过程中，哪些量是变量，哪些量是常量，对其中的变量，用三种表示法表示它的变化范围。

(3)、将下列区间换成其它形式的表示法。

① $0 \leq x \leq 3$

④ $(-\infty, 0)$

⑤ $(a, +\infty)$

⑥ $x < 2$

⑧ $-a < x < a$，$(a > 0)$

⑦ $x \geq 1$

⑧ x 取任何数值

(4)、①求区间 $[-1, 2]$ 的长度。②一区间右端点为 1，长度为 3，把这区间表示出来。

1－2　函数概念

毛主席教导我们："一切事物中包含的矛盾方面的相互依赖和相互斗争，决定一切事物的生命，推动一切事物的发展"。每一个现实的变化过程，都包含着矛盾方面的相互依赖和斗争，反映在数量上，在一个变化过程中，常常有两个或两个以上的变量，各个变量的变化不是孤立的，它们是相互联系和互相影响的。变量之间的相互关系最常见的是函数关系，很多变化过程的数量上的规律性，可以通过变量间的函数关系表现出来。

一、例

例1、从物理学知道，初速为 0 的落体，下落路程 s（米）和下落时间 t（秒）的关系是：

$$s=\frac{1}{2}gt^2$$

式中$g=9.8$米/秒^2，s和t都是变量（图1－5），物体落到地面的时间为T秒，则变量t的变化区间是：$0\leq t\leq T$，在这个变化区间内，对于每个确定的时刻t，都可由上述公式算出对应的s的值。

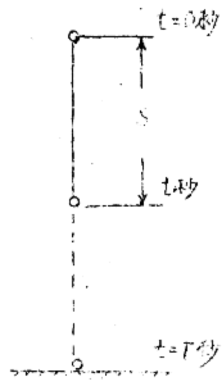


图 1－5

如$t=1$秒时，

$$s=\frac{1}{2}g1^2=\frac{1}{2}9.8=4.9\text{米}$$

t变化，s也按照条件所规定的关系相应地变化。上述公式表示了变量s和变量t之间的数值对应关系。这种关系就是函数关系。

例2　弹簧一端固定，另一端挂一重物后，弹簧就伸长，设重物的重量用P（公斤）表示，弹簧伸长用l（厘米）表示。弹簧允许挂的重量为0公斤到10公斤，即P的变化区间是$0\leq P\leq 10$。在这区间内改变P的值，l也按照条件所规定的关系相应地改变。对于P的每一个值，l都有确定的对应值，如$P=2$公斤时，测得$l=1$厘米。由实测可得一组数据，列表如下：

P（公斤）	0	1	2	3	4	5	6	7
l（厘米）	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5

这个表格表示了变量P与变量l的数值对应关系。P和l的关系也是函数关系。

例3　气象站用自动记录仪，记录了某一天气温T（℃）随时间t（小时）的变化，如图1－7所示的曲线。t的变化区间是$0\leq t\leq 24$，

对于这个区间上每一个确定的时刻t，都可由图1－7中曲线查出气温T的对应值。如t＝13.5（小时）时，查得气温T＝25℃。时间t变化，气温T也相应地变化。变量T和t的关系也是函数关系。

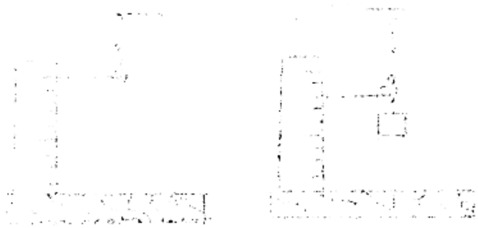


图 1－6

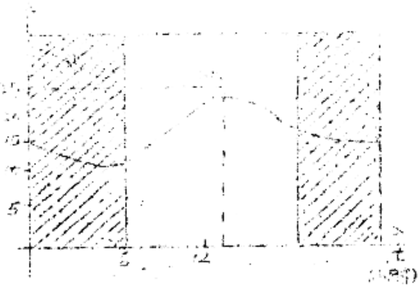


图 1－7

二、函数的定义

上面三个例子，虽然实际意义各不相同，变量之间的关系也是用不同的方法表示的，但是，都有两个变量，按照条件所规定的关系同时变化。这种关系叫函数关系。下面给出一般的定义：

定义：在一个变化过程中，有两个变量x和y，如果x变化时，y按照条件所规定的关系同时变化，就说这两个变量有函数关系。从数值来看，对于x在变化范围中的每一个值，y有确定的对应值。这时x叫自变量，y叫因变量，简称y是x的函数。自变量的变化范围叫做函数的定义域。

例1中，路程s是时间t的函数，t是自变量，s是因变量，t的变化范围$0\leq t\leq T$是函数的定义域。s与t的对应规则是用公式$s=\frac{1}{2}gt^2$表示的。

例2中，伸长l是重量P的函数，P是自变量，l是因变量，P的变化范围$0\leq P\leq 10$是函数的定义域。l与P的对应规则是用表格表示的。

例3中，气温T是时间t的函数，t是自变量，T是因变量，t的变化范围$0\leq t\leq 24$是函数的定义域。T与t的对应规则是用曲线表示的。

函数概念就是从大量的这种具体的函数关系中抽象出来的。关于函数概念说明两点：

1、函数定义中指出，两个变量有函数关系时，它们的值是按照条件所规定的关系对应起来的，至于对应规则的具体内容，那只能说明各种函数关系的差别性。抓住函数关系是变量间的数值对应关系这一共同的本质，才能对于各种各样的函数的共性进行一般的研究。还应指出，在函数关系中，两个变量的地位是不同的，如例1中，要由t的值求s的对应值，t是自变量，s是函数，对应规则是

$$s=\frac{1}{2}gt^2$$

但是，这种情况也不是固定的，有些时候，要由s的值求t的对应值，这时，s就是自变量了，t是s的函数，对应规则是

$$t=\sqrt{\frac{2s}{g}}$$

由s求t的对应规则，与由t求s的对应规则正好相反，因此说

$s=\frac{1}{2}gt^2$与$t=\sqrt{\frac{2s}{g}}$这两个函数互为反函数。

2、函数定义中还说明，研究函数关系，要注意函数的定义域，因为自变量只有在定义域中取值时，因变量才有确定的对应值，函数才有意义。

对于反映实际现象的函数关系，定义域应由实际意义确定。例如，例1中$s=\frac{1}{2}gt^2$的定义域应为$0\leq t\leq T$。

数学中需要抽去具体的物理意义，研究抽象的函数关系。这时，定义域由函数式子本身来确定。如下例。

例4 下列式子表示y是x的函数，求下列函数的定义域。

(1) $y=\frac{1}{x}$ (2) $y=\sqrt{1-x^2}$

解：(1) 对于函数$y=\frac{1}{x}$，x取不等于0的任何值，都可由公式求出y的对应值。$x=0$时，因为0不能做除数，y没有对应值。这时，函数没有意义。因此，函数的定义域为$x\neq 0$的任何实数（图1－8,(a)）。

图 1－8

(2) 对于函数$y=\sqrt{1-x^2}$，在$1-x^2<0$时，函数没有意义（为什么？），即在$x<-1$与$x>1$时，函数无意义，而在$-1\leq x\leq 1$上的任何x值，都可由公式求出y的对应值。因此，函数的定义域是$-1\leq x\leq 1$（图1－8（b）），或表示为$|x|\leq 1$。

有时，在某个变化过程中，对于变量x取得的每一个值，另一个量y的对应值总是一个常数c，也说y是x的函数，用式子表示是

$$y=c$$

用图形表示，是一条平行于x轴的直线（图1－9）。在这种意义下，常数也是函数，这种看法数学中常常用到。

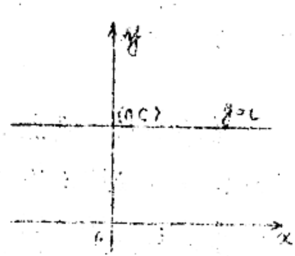


图 1－9

思考和练习

(1) 下列方程中，y（或u）是不是x（或t）的函数？

① $y=\frac{1}{x^2}$　　② $u=3\sqrt{1-t^2}$

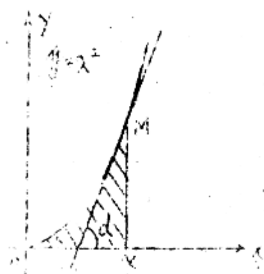
③ $2x+3y=1$　④ $x^2+y^2+1=0$

(2) 如图，M是曲线 $y=x^2$ 上的动点。问：

① OM孤长是不是x的函数？

② M点处切线的倾斜角α是不是x的函数？

③ 图上阴影部分的面积是不是x的函数？



（第(2)题）

(3) 举出生产实际中函数的例子。

(4) 求下列函数（y是x的函数）的定义域：

① $y=\frac{1}{x^2}$　　② $y=\frac{1}{1-x}$

③ $y=\frac{1}{1-x^2}$　　④ $y=\sqrt{x}$

⑤ $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$　　⑥ $y=\sqrt{x-1}$

⑦ $y=\sqrt{4-x^2}$　　⑧ $y=\sqrt{x^2-4}$

1－3　函数的三种表示法

一、为了研究函数关系，必须采用适当的形式把它表示出来。好的表

示形式常常能帮助我们更好地了解和分析函数的具体内容和特点。通常表示函数的方法有三种：

表格表示法（如1－2中例2）

图形表示法（如1－2中例3）

公式表示法（如1－2中例1）

三角函数表、对数函数表都是函数的表格表式法的例子。表格表式法的优点是：有现成数据，用起来方便，节省时间。缺点是：不直观，数据不完全。

在初等数学中已经学过，用描点的方法，可以在坐标平面上作出函数的图形，这就是函数的图形表示法。它的优点是：直观，函数变化情况一目了然，所以工程上常常采用这种表示法。缺点是：不便于作理论分析，精确度要求高时，从图形上查函数值也不够精确。

公式表示法的优点是：适宜于作理论分析和数值计算，缺点是：不直观。因此，作理论分析时，也常要辅助以图形及必要的表格。

三种表示法都是为了表示因变量与自变量的对应规则。三种表示法是互相补充的，也是可以互相转换的。

思考和练习

(1)、一物体沿s轴作等速直线运动，物体位置用坐标s表示。s是时间t的函数，设物体起始（$t=0$时）位置是$s=2$米，运动速度是2米／秒。试用三种表示法表示这个函数。

(2)、自由落体运动$s=\frac{1}{2}gt^2$，作出这个函数的图形。

二、列函数式子

列函数式子，就是要求用公式法表示变量间的函数关系。

下面是利用几何关系和物理规律列函数式子的例：

例1　将直径$d=4$的元木截成方木（图1－10）。试求方木的两个边长之间的函数关系。

解：方木的一条边长变化时，另一条边长也相应地变化。设一边长为x，另一边长为y。由勾股定理得

$$x^2+y^2=4^2$$

解得

$$y=\sqrt{4^2-x^2}$$

图　1－10

根号前取正号，因为边长y不可能是负的。这个公式表示了所求的y和x间的函数关系。函数的定义域是：

$$0<x<4$$

初学者有时把边长设为一个具体数，如设一边长为2，于是求得另一边长为$\sqrt{4^2-2^2}=\sqrt{12}$。以为这就是两个边长之间的函数关系了，其实不对！因为要找的是变量之间的函数关系，而不是求一个具体数。所以不能把变量设为一个具体数。

为了便于初学者掌握列函数式子的方法，下面将解题步骤归纳一下：

1）分析问题中哪些是变量，哪些是常量。

2）用字母表示变量。

3）利用几何关系、物理规律或其它知识，找出变量间的函数关系。

例2　弹簧受力伸长，由实验可知，伸长量与受力的大小成正比。已知一弹簧受力为4公斤时，伸长2毫米。试列出伸长量与所受力之间的函数关系。

解：弹簧所受的力变化时，伸长量也相应地变化（见图1－6）。设弹簧所受力用P（公斤）表示，它对应的伸长量用l（毫米）表示。由实验，已知规律：变量l与变量P成正比，即

$$\frac{l}{P}=\text{常数}\,k$$

或

$$l=kP$$

为了确定比例常数 k，将已知条件，$P=4$（公斤）时，$l=2$（毫米）代入上式，得

$$2=k\cdot 4$$

$$\therefore\quad k=\frac{2}{4}=0.5\ （毫米/公斤）$$

因此，所求的 l 与 P 之间的函数关系是

$$l=0.5P$$

这个函数的图形是一条直线，如图1－11。

例2中已知两个变量成正比，因此，问题只是待定比例常数，这种方法在物理学中常常用到。

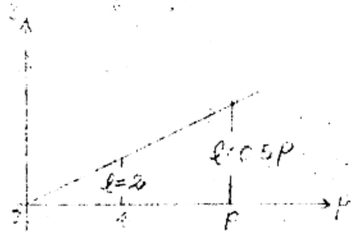


图 1－11

一般地，如果两个变量 y 和 x 成正比，即

$$\frac{y}{x}=k\ （常数）$$

则 y 与 x 的函数关系可表示为

$$y=kx$$

类似地，如果两个变量 y 和 x 成反比，即

$$x\cdot y=k\ （常数）$$

则 y 与 x 的函数关系可表示为

$$y=\frac{k}{x}$$

思考和练习

(1)、根据物理实验得出的规律，金属导线的电阻R，与导线长度l成正比，与导线截面积S成反比。已知长1米、截面积为1平方毫米的铜导线的电阻为0・017欧。写出直径为0・1毫米的铜导线电阻R与长度l的函数关系。用这种导线绕制R＝10欧的电阻，需要多长？

〔提示：$R=\rho\frac{l}{S}$，ρ是待定的比例系数〕

例3　在漏斗形的量杯上要刻上表示容积的刻度，需要找出溶液深度与其对应容积之间的函数关系，现知漏斗的顶角是30°，试找出容积与深度的函数关系。

解：设深度用h表示，它对应的容积用V表示。由元锥体积公式，知

$$V=\frac{1}{3}\pi R^2 h$$

上式中包含有三个变量：V、h和R。需要将R消去，由图1－12知，

$$tg15°=\frac{R}{h}$$

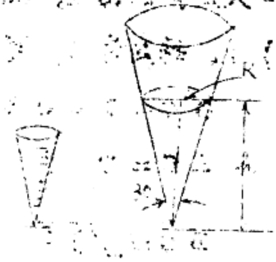


图　1－12

即

$$R=h\cdot tg15°$$

代入前式，将

$$V=\frac{1}{3}\pi(h\cdot tg15°)^2\cdot h=\frac{tg^2 15°}{3}\pi h^3$$

即

$$V=0\cdot0239\pi h^3$$