

中国科学院原子能研究所

用 П.Л. Чебышев 方法計算 插值多項式系数的标准程序

裴 鹿 成

一九六二年十一月

用 П.Л. Чебышев 方法計算 插值多項式系数的标准程序^(*)

設 $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)$ 是函数 $f(x)$ 对于点組 $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ 的列表值, 所要求的是一個接近函数 $f(x)$ 的 m ($m \leq n$) 次多項式。

在这里我們仅就等分节点情形来解决这一內插問題。为了便于在电子計算机上实现, 我們采用新的变量 $t = \frac{x - x_0}{h}$, 其中 h 是列表的步长。于是給定的点組 $x_0, x_1, \dots, x_n$ 变成了点組 $0, 1, \dots, n$ 。

采用 Чебышев 方法是使近似于 $f(t)$ 的多項式 $Q_m(t)$ 与 $f(t)$ 在节点上差的平方和具有极小值

$$\sum_{t=0}^n [f(t) - Q_m(t)]^2 = \min, \quad (1)$$

其中插值多項式 $Q_m(t)$ 具有如下形式

$$Q_m(t) = A_0 P_{0n}(t) + A_1 P_{1n}(t) + \dots + A_m P_{mn}(t) \quad (2)$$

$P_{mn}(t)$ 是正交多項式, 亦即

$$\sum_{t=0}^n P_{kn}(t) P_{mn}(t) = \delta_{km}. \quad (3)$$

用 Чебышев 方法所得到的 m 次多項式有如下形式

$$Q_m(t) = \sum_{k=0}^m \left[\frac{\sum_{t=0}^n P_{kn}(t) f(t)}{\sum_{t=0}^n P_{kn}^2(t)} \right] P_{kn}(t). \quad (4)$$

Чебышев 公式在实际的插值时, 对于为要确定合适的幂而增加內插多項式的幂时是有重要意义的。因为在这个公式中逐項增加項数直到当結果不需要再近似时, 前面各項系数可以保留不变。可是, 用一般的按最小二乘法的內插方法时, 当幂增加时需要重新計算全部的系数。

在多項式 $Q_m(t)$ 中的系数 A_k 是这样选择的, 使表示式

$$\Sigma_m = \sum_{t=0}^n [f(t) - A_0 P_{0n}(t) - A_1 P_{1n}(t) - \dots - A_m P_{mn}(t)]^2, \quad (5)$$

取可能的最小值。为此, Σ_m 对 A_k ($k=0, 1, \dots, m$) 求偏导数并令其为零, 于是得到方程組

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \Sigma_m}{\partial A_k} = \sum_{t=0}^n [f(t) - Q_m(t)] P_{kn}(t) = 0, \quad (6)$$

* 对于相同問題, А.Я. Фалетова 也曾編过一个标准程序 (Сборник Стандартных И Типовых Программ для БЭСМ, Изд. Акад. Наук СССР, Москва 1969), 但是在方法的实现和程序的结构方面与这里所給出的都很不同。

利用多项式的正交性，我們便得到了确定系数 A_k 的简单表示式

$$A_k = \frac{\sum_{t=0}^n P_{kn}(t)f(t)}{\sum_{t=0}^n P_{kn}^2(t)}. \quad (7)$$

在我們这里多项式 $P_{mn}(t)$ 是用公式

$$P_{mn}(t) = \sum_{k=0}^m (-1)^k C_m^k C_{m+k}^k \frac{t(t-1)\cdots(t-k+1)}{n(n-1)\cdots(n-k+1)}, \quad (8)$$

确定的，其中 C_m^k 为 m 个中取 k 个的组合数。

将公式(8)重新写成形式

$$P_{mn}(t) = \sum_{k=0}^m C_k(t), \quad (8a)$$

則我們有如下的便于在电子计算机上实现的递推公式

$$C_{k+1}(t) = \frac{(m-k)(m+k+1)(t-k)}{(k+1)^2(n-k)} C_k(t), \quad (9)$$

其中 $C_0(t) \equiv 1$ 。当插点較多时， $C_{k+1}(t)$ 的值常常很容易超出机器的最大可能值。为避免这一点，实际上我們在机器中是这样进行的

$$P_{mn}(t) = \{\cdots[(\mu_m(t)+1)\mu_{m-1}(t)+1]\cdots+1\}\mu_0(t)+1, \quad (10)$$

其中

$$\mu_k(t) = \frac{(k-m)(m+k+1)(t-k)}{(k+1)^2(n-k)}. \quad (11)$$

合适幂的确定是这样处置的，使每輪一次 m 都要与事先确定的誤差 ε 进行比较，如果所要求的准确度：

$$|f(t) - Q_m(t)| < \varepsilon \quad t=0, 1, \cdots, n, \quad (12)$$

还没有达到，那么程序会自动增加 $Q_m(t)$ 的幂，直到达到所要求的准确度为止。

程序占用的内存儲单元是 $1000 \div 1048$ ，并且要求按照数 $N(N=n+1)$ 于 $1049 \div 1049+n$ 中依次存放函数值 $f(t) \quad t=0, 1, \cdots, n$ ，另外还需要三組专用的单元：

$$a \div a+N-1 \quad \text{存放 } |f(t) - Q_m(t)|,$$

$$a+N \div a+2N-1 \quad \text{存放 } P_{mn}(t),$$

$$a+2N \div a+3N-1 \quad \text{存放系数 } A_{k_0}$$

其中 a 是使用者根据方便任意确定的。在单元 1000 中存放多项式的幂 m 。

实现上述教学目的的程序是依照如下的邏輯图編制的

$$\begin{aligned} & L_1 0 \Rightarrow m, \left\{ f(t) \Rightarrow \delta_t \right\}_{t=0}^n, L_2 0 \Rightarrow \sigma, 0 \Rightarrow \Sigma, -1 \\ & \Rightarrow t, \left\{ 1 \Rightarrow P, m \Rightarrow k, t+1 \Rightarrow t, \right\}_{t=0}^n \left\{ 1 \div \right\}_{k=m-1}^0 \\ & P \frac{(k-m)(m+k+1)(t-k)}{(k+1)^2(n-k)} \Rightarrow P \left\}^k_3, \sigma + f(t)P \Rightarrow \sigma, \end{aligned}$$

$$\Sigma + P^2 \Rightarrow \Sigma, P \Rightarrow P_t \}^t, \sigma/\Sigma \Rightarrow P, m+1 \Rightarrow m,$$

$$P \Rightarrow A_m, \left\{ \delta_t + P_t P \Rightarrow \delta_t \right\}_{t=0}^n, P(\varepsilon < \text{Max}_t |\delta_t| \left[\frac{2}{t} \right]),$$

ПЦУК.

使用本程序时要求于单元 1001 中放有(或于控制台的 0001 中有)信息

$$r' \quad 0000 \quad a \quad N$$

其中 $r' = r$, 当 $r \geq 0$; $r' = 64 - r$, 当 $r < 0$, $2^{+r} \leq \varepsilon$ 。于中央用一条指令

K: ИМУК ——— 1002(或 ИМУК ——— 1001)

即可求出 A_k 后转回中央第 $K+1$ 条。另外也可以于中央用指令

K: ИЦУК ——— 1043 1002(或 ИЦУК ——— 1043 1001)

同样能在求得 A_k 后返回中央第 $K+1$ 条。

本程序不进行自动恢复。

单元 1048 中放有由单元 1000 到 1047 间的循环累加和, 可供检查或代算时使用。

当所求系数 A_k 变得很小时, 可能发生“溢出事故”。此时可将 A_k 加大 $C(< 2^{16})$ 倍, 而变得可求。这一点只须在进行计算之前将二进制形式的 $1/C$ 送入单元 1046 即可。

編碼	操 作 碼	第一地址	第二地址	第三地址	附 注			
1000	000	0045	0000	0000				
1	102	0000	0001	1001	r'	0000	a	N
2	011	1001	0041	1002	r'	0000	0000	a 1002 o
3	012	1012	1002	1003	002	$f(x_0)$	0000	a
4	013	1001	1028	1004	000	0000	0000	N
5	012	1004	1002	1005	000	0000	0000	a+N 1005 Σ
6	012	1024	1005	1006	002	P	0000	a+N
7	111	1005	0016	1007	000	a+N	0000	0000 1007 t
8	012	1038	1007	1008	003	a+N	P	X
9	111	1002	1016	1009	000	a	0000	0000 1009 p
0	012	1009	1002	1000	000	a	0000	a 1000 m
1	012	1032	1000	1001	002	a	X	a
2	012	1035	1009	1002	002	a	0000	Y
3	111	1004	0016	1003	000	N	0000	0000
4	012	1034	1003	1004	000	1-N	0000	0000
5	012	1004	1003	1000				
1010	102	1000	1047	1000	$0 \Rightarrow m$ $\{f(t)\} \Rightarrow \delta_t$			
1	012	1003	1000	1012				
2	002	1049	0000	0000				1012 k
3	114	0000	1000	1010				
4	013	0000	1002	1005	$0 \Rightarrow \{a, \Sigma\}$			
5	103	1045	0000	1007	$-1 \Rightarrow t$			
6	101	1000	1045	1012	$m+1 \Rightarrow k$			

編 碼	操 作 碼	第一地址	第二地址	第三地址	附	注
7	101	1007	1045	1007	$t+1 \Rightarrow t$	
8	003	1012	1012	1028		
9	004	1009	1028	1009		
$\bar{0}$	001	1000	1012	1028		
$\bar{1}$	003	1009	1028	1009		
1012	102	1012	1045	1012		
$\bar{3}$	014	1007	1012	1012		
4	002	1000	1012	1028		
$\bar{5}$	102	1007	1012	1024	$\left\{ \frac{m+k+1}{(k+1)^2} \cdot \frac{(m-k)(t-k)}{k \cdot n} P+1 \Rightarrow P \right\}^k$	
1020	003	1028	1024	1028		
1	003	1009	1028	1009		
2	001	1004	1012	1028		
3	015	1028	1047	1025		
4	004	1009	1028	1009		
5	001	1009	1046	1009		
6	114	1024	1007	1018		
7	012	1044	1007	1028		
8	000	0000	0000	0355	$a + f(t)P \Rightarrow a$	
9	001	1002	1028	1002		
$\bar{0}$	003	1009	1009	1028	$\Sigma + P^2 \Rightarrow \Sigma$	
$\bar{1}$	001	1005	1028	1005		
$\bar{2}$	011	1007	0056	1024		
$\bar{3}$	012	1006	1024	1024	$P \Rightarrow P_t$	
4	002	1009	0000	0000		1024 ...
$\bar{5}$	015	1007	1004	1016		
1030	004	1002	1005	1009	$a/\Sigma \Rightarrow P$	
1	101	1000	1045	1000	$m+1 \Rightarrow m$	
2	011	1000	0056	1034		
3	012	1024	1034	1034	$P \Rightarrow A_m$	
4	000	0355	0000	0000		
5	103	1045	0000	1024	$1 \Rightarrow v$	
6	101	1024	1045	1024		
7	012	1008	1024	1038		
1038	003	0000	1009	1038		1038 X
9	011	1024	0056	1032		
$\bar{0}$	012	1024	1032	1032	$\left\{ \sum_{v=0}^n \delta_v P_v P \Rightarrow \delta_v \right\}^v$	
$\bar{1}$	012	1001	1032	1032		
$\bar{2}$	002	0000	1038	0000		
$\bar{3}$	015	1024	1004	1036		
4	012	1002	1024	1035		
$\bar{5}$	002	0000	0000	1035		1035 Y
1040	015	1001	1035	1014	$P(\mathcal{E} < \text{Max}_v \delta_v \mid \mathcal{E})$	

編 碼	操 作 碼	第一地址	第二地址	第三地址	附	注
1	102	1024	1045	1024	}	
2	014	1047	1024	1034		
3	019	0000	0000	0000	ПЦУК	
4	003	1049	1009	1028		
5	000	0001	0000	0000		
6	001	0200	0000	0000		
7	000	0001	0000	0001		
8	009	1341	0043	1287		