高等数学习题集题解

（三）

一九八五年三月

第九章　矢量代数与空间解析几何

空间点的直角坐标

9．2　指出下列各点位置的特殊性：$A(2,0,0)$；$B(0,-3,0)$；$C(0,-3,1)$；$D(-5,0,3)$；$E(3,2,0)$；$F(0,0,0)$。

解　A在x轴上，B在y轴上，C在yz平面上；D在xz平面上，F为原点。

9．3　求出定点$(2,-3,-1)$、(a,b,c)关于：（1）各坐标平面；（2）各坐标轴；（3）坐标原点的对称点的坐标。

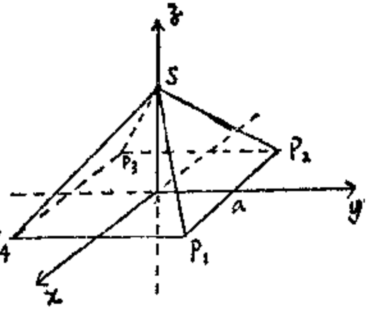
解　（1）(a,b,c)关于xy面对称的点为$(a,b,-c)$，关于xz面对称点为$(a,-b,c)$，关于yz面为$(-a,b,c)$；（2）(a,b,c)关于x轴的对称点为$(a,-b,-c)$，关于y轴为$(-a,b,-c)$，关于z轴为$(-a,-b,c)$；（3）(a,b,c)关于原点的对称点为$(-a,-b,-c)$．令$(a,b,c)=(2,-3,-1)$即得关于$(2,-3,-1)$的相应结果。

9．4*　适合于：（1）$x=y$；（2）$y=z$；（3）$x=z$；（4）$x=y=z$的点在空间取怎样的位置呢？

解　（1）点到xz和yz平面的距离相等$(x=y)$，故在平分这两平面间夹角的平面上．（2）同理，点在平分xz面与xy面间二面角的平面上．（3）在平分xy面与yz面间二面角的平面上．（4）点坐标满足（1）—（3），故点在这三个平面的交线上。

9．5　设正四棱锥$SP_1P_2P_3P_4$的棱长是a，它的顶点在S在z轴上，它的底在xOy平面上，棱P_1P_2垂直于y轴，棱P_1P_4垂直于x轴，求点S,P_1,P_2,P_3,P_4的坐标。

解　如图即得各点坐标为$P_1\left(\frac{a}{2},\frac{a}{2},0\right)$，$P_2\left(-\frac{a}{2},\right.$



9.5.

$\left.\frac{a}{2},0\right)$ $P_3\left(-\frac{a}{2},-\frac{a}{2},0\right)$，$P_4\left(\frac{a}{2},-\frac{a}{2},0\right)$

$S\left(0,0,\frac{a}{\sqrt{2}}\right)$

9．6　求两点（1，2，2）和（－1，0，1）间的距离。

解　$d=\sqrt{(1+1)^2+(2-0)^2+(2-1)^2}=3$

9．7　求出点$A(4,-3,5)$到坐标原点和各坐标轴的距离。

解　$|AO|=\sqrt{4^2+(-3)^2+5^2}=5\sqrt{2}$，

$d_x=\sqrt{y^2+z^2}=\sqrt{3^2+5^2}=\sqrt{34}$. $d_y=\sqrt{4^2+5^2}=\sqrt{41}$.
$d_z=\sqrt{4^2+3^2}=5$

9.8 求顶点为$A(2,5,0)$、$B(11,3,8)$、$C(5,1,11)$的三角形各边的边长。

解 $|AB|=\sqrt{(11-2)^2+(3-5)^2+(8-0)^2}=\sqrt{149}$，$|AC|=\sqrt{(5-2)^2+(1-5)^2+(11-0)^2}=\sqrt{146}$，$|BC|=\sqrt{(11-5)^2+(3-1)^2+(8-11)^2}=7$

9.9 试证以点$A(4,1,9)$、$B(10,-1,6)$、$C(2,4,3)$为顶点的三角形是等腰直角三角形。

证明 因$|AB|=\sqrt{(10-4)^2+(-1-1)^2+(6-9)^2}=7$，$|AC|=\sqrt{(2-4)^2+(4-1)^2+(3-9)^2}=7$，$|BC|=\sqrt{(10-2)^2+(-1-4)^2+(6-3)^2}=\sqrt{98}$ 故$|AB|=|AC|$，且$|BC|^2=|AB|^2+|AC|^2$，从而$\triangle ABC$是等腰直角三角形。

9.10 根据下列条件求B的未知坐标：(1) $A(4,-7,1)$，$B(6,2,z)$，$|AB|=11$；(2) $A(2,3,4)$，$B(x,-2,4)$，$|AB|=5$

解 (1) $\sqrt{(6-4)^2+(2+7)^2+(z-1)^2}=11$，得$(z-1)^2=36$，$z_1=-5$，$z_2=7$。$B$点坐标为$(6,2,-5)$或$(6,2,7)$。(2) $5=\sqrt{(x-2)^2+(-2-3)^2+(4-4)^2}$，即$(x-2)^2=0$，得$x=2$

9.11 在z轴上求与点$A(-4,1,7)$和点$B(3,5,-2)$等距的点C。

解 设C坐标为$(0,0,z)$，则由$|AC|=|BC|$有
$\sqrt{(-4-0)^2+(1-0)^2+(7-z)^2}=$

$\sqrt{(3-0)^2+(5-0)^2+(-2-z)^2}$

得$z=\frac{14}{9}$，即$C\left(0, 0, \frac{14}{9}\right)$

9.12 在 yOz平面内求与三个已知点$A(3, 1, 2)$、$B(4, -2, -2)$, $C(0, 5, 1)$等距离的点D.

解 因D在yz平面内，可设其坐标为$(0, y, z)$则由 $|AD|=|BD|=|CD|$ 有$\sqrt{3^2+(1-y)^2+(2-z)^2}=\sqrt{4^2+(-2-y)^2+(-2-z)^2}$，

$\sqrt{3^2+(1-y)^2+(2-z)^2}=\sqrt{0+(5-y)^2+(1-z)^2}$解得 $y=1$，$z=-2$ 即$D(0, 1, -2)$

9.13 在第三象限内求一点M，已知它与三个坐标轴的距离分别为$d_x=5$，$d_y=3\sqrt{5}$，$d_z=2\sqrt{13}$。

解 设M点坐标为$(x, y, z,)$，则$\sqrt{y^2+z^2}=5$，$\sqrt{x^2+z^2}=3\sqrt{5}$，$\sqrt{x^2+z^2}=2\sqrt{13}$，得$x^2=36$，$y^2=16$，$z^2=9$，因$M$在第三卦限，故坐标为$(-6, -4, 3,)$

9 14 求点$A(1, -3, 2)$关于点$O(-1, 2, 1)$的对称点B

解 设$B(x, y, z)$，则$\frac{1}{2}(x+1)=-1$，$\frac{1}{2}(y-3)=2$ $\frac{1}{2}(z+2)=1$故B点坐标为$(-3, 7, 0)$

9.15* 把两点$A(1, 2, 3)$和$B(-1, 2, 3)$间的线段分成两部分，使其比是1：2，求分点M的坐标。

解 设$M(x, y, z)$，则$\frac{x-1}{-1-x}=\frac{y-2}{2-y}=\frac{1}{2}$ $z=3$

故$x=\frac{1}{3}$，$y=2$，$z=3$，即$M\left(\frac{1}{3},2,3\right)$

9.16* 线段AB被点C分成5：2的两部分，设点A，和点C的坐标分别是(3，7，4)和(8，2，3)，求点B的坐标，

解 设$B(x,y,z)$，则$\frac{8-3}{x-8}=\frac{2-7}{y-2}=\frac{3-4}{z-3}=\frac{5}{2}$，

解得$(x,y,z)=(10,0,\frac{13}{5})$

9.17* 设三角形的顶点是$A(2,5,0)$,$B(11,3,8)$,$C(5,1,12)$,求其三边的长和重心G的坐标。

解 $|AB|=\sqrt{9^2+2^2+8^2}=\sqrt{149}$,
$|AC|=\sqrt{3^2+4^2+12^2}=13$，$|BC|=\sqrt{6^2+2^2+4^2}=2\sqrt{14}$．设$G(x,y,z)$则$x=\frac{1}{3}(2+11+5)=6$，

$y=\frac{1}{3}(5+1+3)=3$，$z=\frac{1}{3}(0+8+12)=\frac{20}{3}$

9.18 线段AB被分成五等分，已知第一个分点$C(3,-5,7)$和最后一个分点$F(-2,4,-8)$，求线段的端点和其它分点的坐标。

解 C、F之间有二个分点，设为D，E，则D为$\left(3+\frac{-2-3}{3},-5+\frac{4+5}{3},7+\frac{-8-7}{3}\right)=\left(\frac{4}{3},-2,2\right)$ E为$\left(3+2\cdot\frac{-2-3}{3},-5+2\cdot\frac{4+5}{3},7+2\cdot\frac{-8-7}{3}\right)=\left(-\frac{1}{3},\right.$

$1,-3)$．A为$\left(3-\frac{-2-3}{3},\ -5-\frac{4+5}{3},\ 7-\frac{-8-7}{3}\right)=$

$\left(\frac{14}{3},-8,12\right)$．$B$为$\left(-2+\frac{-2-3}{3},\ 4+\frac{4+5}{3},\ -8+\frac{-8-7}{3}\right)=\left(-\frac{11}{3},7,-13\right)$．

矢量代数初步

9．19 在平行四边形$ABCD$内，设$\overrightarrow{AB}=\mathbf{a}$，$\overrightarrow{AD}=\mathbf{b}$．试用$\mathbf{a}$和$\mathbf{b}$矢量组成$\overrightarrow{MA}$，$\overrightarrow{MB}$，$\overrightarrow{MC}$和$\overrightarrow{MD}$；这里$M$是平行四边形对角线的中点

解 $\overrightarrow{MA}=-\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})=-\frac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b})$；$\overrightarrow{MB}=\frac{1}{2}(\mathbf{a}-\mathbf{b})$；$\overrightarrow{MC}=\frac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b})$；$\overrightarrow{MD}=-\frac{1}{2}(\mathbf{a}-\mathbf{b})$

9．20 如果$ABCDEF$是一正六边形，O是它的中心，则在矢量组(1) $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{OD}$，$\overrightarrow{OE}$，$\overrightarrow{OF}$；(2) $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{CD}$，$\overrightarrow{DE}$，$\overrightarrow{EF}$；(3) $\overrightarrow{FE}$，$\overrightarrow{ED}$，$\overrightarrow{DC}$，$\overrightarrow{CB}$，$\overrightarrow{BA}$中，哪些是相等矢量？哪些是相反矢量？

解 (1) $\overrightarrow{OA}$与$\overrightarrow{OD}$，$\overrightarrow{OB}$与$\overrightarrow{OE}$，$\overrightarrow{OC}$与$\overrightarrow{OF}$相反(2) $\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{DE}$，$\overrightarrow{BC}$与$\overrightarrow{EF}$相反 (3) $\overrightarrow{FE}$与$\overrightarrow{CB}$，$\overrightarrow{ED}$与$\overrightarrow{BA}$相反

9．21 一矢量的终点在点$B(2,-1,7)$，它在坐标轴上的投影顺次是4，-4和7。求这矢量的起点A的坐标。

解 设起点为$A(x,y,z)$，则$2-x=4$，$-1-y=-4$，

$7-z=7$。故A为$(-2,3,0)$

9.22 给定两点$M_1(2,5,-3)$和$M_2(3,-2,5)$设在线段M_1M_2上的一点M满足$\overrightarrow{M_1M}=3\overrightarrow{MM_2}$求矢量$\overrightarrow{OM}$的坐标。

解 设$\overrightarrow{OM}=(x,y,z)$，则由$\overrightarrow{M_1M}=3\overrightarrow{MM_2}$有$x-2=3(3-x)$，$y-5=3(-2-y)$，$z+3=3(5-z)$，故$(x,y,z)=$
$\left(\frac{11}{4},\ -\frac{1}{4},\ 3\right)$

9.23 已知两矢量$\mathbf{a}=6\mathbf{i}-4\mathbf{j}+10\mathbf{k}$，$\mathbf{b}=3\mathbf{i}+4\mathbf{j}-9\mathbf{k}$，试求：(1)$\mathbf{a}+2\mathbf{b}$；(2) $3\mathbf{a}-2\mathbf{b}$。

解 $\mathbf{a}+2\mathbf{b}=6\mathbf{i}-4\mathbf{j}+10\mathbf{k}+2(3\mathbf{i}+4\mathbf{j}-9\mathbf{k})=12\mathbf{i}+4\mathbf{j}-8\mathbf{k}$；$3\mathbf{a}-2\mathbf{b}=3(6\mathbf{i}-4\mathbf{j}+10\mathbf{k})-2(3\mathbf{i}+4\mathbf{j}-9\mathbf{k})=12\mathbf{i}-20\mathbf{j}+48\mathbf{k}$

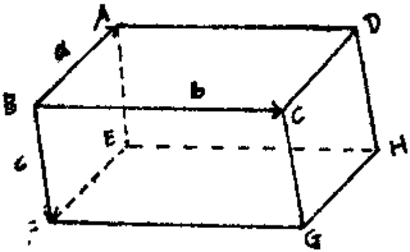
9.24 已知ΔABC。求证$\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}=0$

证明 $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}=0$

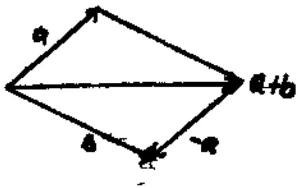
9.25 求图中平行六面体的对角线$\overrightarrow{AG}$，$\overrightarrow{FD}$，$\overrightarrow{EC}$，$\overrightarrow{BH}$，并表成a，b，c的式子(其中$\mathbf{a}=\overrightarrow{BA}$，$\mathbf{b}=\overrightarrow{BC}$，$\mathbf{c}=\overrightarrow{BF}$)。

解 $\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AE}=-\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}$；$\overrightarrow{FD}=\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{FE}=+\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}$；$\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{EG}=-\mathbf{c}+\mathbf{a}+\mathbf{b}$；$\overrightarrow{BH}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BF}=\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}$；

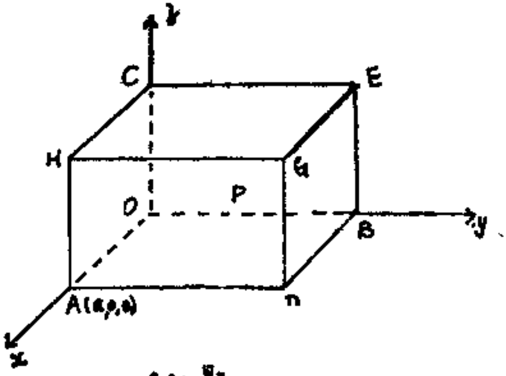
9.26 已知平行四边形的三个顶点$A(\mathbf{r}_1)$，$B(\mathbf{r}_2)$，$C(\mathbf{r}_3)$，求与顶点B相对的第四个顶点D



9.25 题



9.27



9.30 题

解 $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_3-\mathbf{r}_2$

9．27　已知两个非零矢量a和b，用几何法和代数法分别求出矢量$a+b$与$a-b$的和。

解　几何法　如图$\mathbf{a}+\mathbf{b}+(-\mathbf{a})=\mathbf{b}$

代数法　设$\mathbf{a}=(x_1,y_1,z_1)$，$\mathbf{b}=(x_2,y_2,z_2)$，则$\mathbf{a}+\mathbf{b}+(-\mathbf{a})=(x_1,y_1,z_1)+(x_2,y_2,z_2)+(-x_1,-y_1,-z_1)=(x_2,y_2,z_2)$

9．29　已知不共线矢量a，b及平行四边形$ABCD$并知其两邻边$\overrightarrow{AB}=3\mathbf{a}$，$\overrightarrow{AD}=2\mathbf{b}$，求$\square ABCD$两个对角线矢量。

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=3\mathbf{a}+2\mathbf{b}$$

$$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}=-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=-3\mathbf{a}+2\mathbf{b}$$

9、30　一个长方体如图所示，已知$OA=\mathbf{a}$，$OB=\mathbf{b}$，$OC=\mathbf{c}$，且两两垂直，$A(a,0,0)$，$P(\frac{a}{2},\frac{b}{2},\frac{c}{2})$

(1) $\overrightarrow{AP}$，$\overrightarrow{PA}$各表示什么矢量；(2) $\overrightarrow{PA}$有几种表达形式；(3) 求$\overrightarrow{AP}$的单位矢量，(4)求$\overrightarrow{AP}$，$\overrightarrow{PA}$在各个坐标轴的投影。

解　(1) $\overrightarrow{AP}=(-\frac{a}{2},\frac{b}{2},\frac{c}{2})$ $\overrightarrow{PA}=(\frac{a}{2},-\frac{b}{2},-\frac{c}{2})$，(2)可有许多种表示，如$\overrightarrow{PA}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC})$等　(3) $\overrightarrow{AP^0}=\overrightarrow{AP}/|\overrightarrow{AP}|=2\overrightarrow{AP}$

$\sqrt{a^2+b^2+c^2} = (-ai+bj+ck)/\sqrt{a^2+b^2+c^2}$. (4)

$\overrightarrow{AP}$ 在x,y,z,轴上投影就是$-\frac{a}{2}$,$-\frac{b}{2}$和$\frac{c}{2}$

9．31　设a,b是非零矢量且不平行，证明：$2|a|^2+2|b|^2=|a+b|^2+|a-b|^2$.并说明其几何意义。

证明　$|a+b|^2+|a-b|^2=(a+b)^2+(a-b)^2=a^2+b^2+2ab+a^2+b^2-2ab=2a^2+2b^2=2|a|^2+2|b|^2$.该式的几何意义是平行四边形两对角线长度平方之和为两边长平方之和的两倍。

9．32　写出矢量 $a=\frac{1}{3}(2i+2j-k)$，$b=\frac{1}{3}(-i+2j+2k)$的坐标。并分别求出它们的模。

解　$a=(\frac{2}{3},\frac{2}{3},-\frac{1}{3})$，$b=(-\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3})$．$|a|\sqrt{\frac{4}{9}+\frac{4}{9}+\frac{1}{9}}=1$，$|b|=1$

9．33　分别求出矢量$a=i+j+k$，$b=2i-3j+5k$及$c=-2i-j+2k$的模，并分别用单位矢量a^0，$b^0$$c^0$表达出a，b，c。

解　$|a|=\sqrt{3}$，$|b|=\sqrt{38}$，$|c|=3$；$a=\sqrt{3}a^0$，$b=\sqrt{38}b^0$，$c=3c^0$

9．34、点A的坐标是$x=15$，$y=8$和$z<0$，矢量$\overrightarrow{OA}$与x轴成30^0角　求$\overrightarrow{OA}$的长、点A的坐标及$\overrightarrow{OA}$的方向余弦。

解 我们有$\sqrt{x^2+z^2}=x\cdot\mathrm{tg}30^\circ$，$z^2=\frac{x^2}{3}-y^2=11$，因$z<0$，故$z=-\sqrt{11}$．$A$坐标为$(15,8,-\sqrt{11})$，$|\overrightarrow{OA}|=\sqrt{15^2+8^2+11}=10\sqrt{3}$，$\overrightarrow{OA}$方向余弦为$\frac{15}{10\sqrt{3}}$，$\frac{8}{10\sqrt{3}}$，$-\frac{\sqrt{11}}{10\sqrt{3}}$即$\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\frac{4\sqrt{3}}{15}$，$-\frac{\sqrt{33}}{30}$．

9．35　矢量$\overrightarrow{OM}$与三个坐标轴正向轴成相等的锐角，求$\overrightarrow{OM}$的方向余弦。

解 设该锐角为θ，则$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=3\cos^2\theta=1$，故$\cos\alpha=\cos\beta=\cos\gamma=\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}$．

9．36　矢量$\overrightarrow{OM}$与x轴的负方向及y轴z轴的正方向成相等的锐角．求$\overrightarrow{OM}$的方向余弦

解 设锐角为θ，则$\alpha=\pi-\theta$，$\beta=\gamma=\theta$．故$\cos^2(\pi-\theta)+\cos^2\theta+\cos^2\theta=1$　得　$\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}$，故$\cos\alpha=-\frac{1}{\sqrt{3}}$，$\cos\beta=\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{3}}$．

9．37　力F在各坐标轴上的分力是$\mathbf{F}_x=-6\mathbf{i}$，$\mathbf{F}_y=-2\mathbf{j}$，$\mathbf{F}_z=9\mathbf{k}$。求$\mathbf{F}$的大小方向。

解 $|F|=\sqrt{(-6)^2+(-2)^2+9^2}=11$方向余弦为

$-\frac{6}{11}, -\frac{2}{11}, \frac{9}{11}$.

9．38　已知矢量$\mathbf{a}=\alpha\mathbf{i}+5\mathbf{j}-\mathbf{k}$与矢量$\mathbf{b}=3\mathbf{i}+\mathbf{j}+\gamma\mathbf{k}$共线，求系数$\alpha$和$\gamma$。

解　因$\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$共线，即有$\mathbf{a}=\lambda\mathbf{b}$，$(\alpha,5,-1)=(3\lambda,\lambda,\lambda\gamma)$从而$\lambda=5$，故$\alpha=15,\gamma=-1/5$.

9．39　设矢量与各坐标轴间的夹角为α,β,γ若已知其中之二角是(1)$\alpha=60^\circ$，$\beta=120^\circ$；(2)$\alpha=135^\circ,\beta=60^\circ$，求第三角$\gamma$。

解　(1)$\cos\gamma=\sqrt{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta}=1/\sqrt{2}$，$\gamma=\pi/4$或$3\pi/4$ (2)$\cos\gamma=\sqrt{1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}$　$\gamma=\frac{\pi}{3}$或$\frac{2\pi}{3}$

9．40　求矢量$\mathbf{a}=\mathbf{i}+\sqrt{2}\mathbf{j}+\mathbf{k}$与各坐标轴间夹角。

解　$|\mathbf{a}|=\sqrt{1+2+1}=2$，$\cos\alpha=\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{i}}{|a|}=\frac{1}{2}$，$\cos\beta=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\cos\gamma=\frac{1}{2}$故$\alpha=60^\circ$，$\beta=45^\circ$，$\gamma=60^\circ$

9．41　设两非零矢量e_1与e_2不共线，确定k，使两个矢量ke_1+e_2与e_1+ke_2共线。

解　$k\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2=\lambda\mathbf{e}+\mathbf{e}_2$）即$(k-\lambda)\mathbf{e}_1+(1-\lambda k)\mathbf{e}_2=0$因$\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2$不共线，故$\lambda=k,\lambda k=1$，从而$k^2=1$，$k=1$或$k=-1$.

9．42　点M的矢径与x轴成45°角，与y轴成60°角，其长为6个单位，在z轴上的坐标是负值，求点M的坐标。

解　设M坐标为(x,y,z)，则$x=6\cdot\cos45^\circ=3\sqrt{2}$，

$y=6\cdot\cos60°=3$，$z=-\sqrt{6^2-x^2-y^2}=-3$.

9．43　给定四点$A(1,-2,3)$，$B(4,-4,-3)$，$C(2,4,3)$，$D(8,6,6)$。求矢量$\overrightarrow{AB}$在矢量$\overrightarrow{CD}$上的投影。

解　$\overrightarrow{AB}=(3,-2,-6)$，$\overrightarrow{CD}=(6,2,3)$，$Prj_{\overrightarrow{CD}}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}/|\overrightarrow{CD}|=(18-4-18)/\sqrt{36+4+9}=-4/7$

9.44　设给定矢量$\mathbf{a}=\{1,1,-4\}$，$\mathbf{b}=\{2,-2,1\}$：

(1)　计算$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$　　(2)求$|\mathbf{a}|$，$|\mathbf{b}|$及$(\widehat{\mathbf{a},\mathbf{b}})$，

(3)　求$prj_a\mathbf{b}$。

解　(1)$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=4$，(2)$|\mathbf{a}|=3\sqrt{2}$，$|\mathbf{b}|=3$，$\cos(\widehat{\mathbf{a},\mathbf{b}})=\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}/|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|--4/9\sqrt{2}$，$(\mathbf{a},\mathbf{b})=\arccos(-2\sqrt{2}/9)$，(3)$prj_a\mathbf{b}=|\mathbf{b}|\cos(\widehat{a,b})=-2\sqrt{2}/3$.

9．46　已知$\mathbf{a}$，$\mathbf{b}$两矢量，若$|\mathbf{a}|=\frac{1}{3}$，$|\mathbf{b}|=6$，$(\widehat{\mathbf{a},\mathbf{b}})=\frac{\pi}{3}$求证：$3|\mathbf{a}|\cdot2(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})+4\sqrt{\mathbf{b}^2}=23$。

证明　$3|\mathbf{a}|-2(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})+4\sqrt{\mathbf{b}^2}=3-|\mathbf{a}|-2|\mathbf{b}||\mathbf{b}|\cos(\widehat{\mathbf{a},\mathbf{b}})+4|\mathbf{b}|=23$.

9．47 (1)　求两个共线矢量的数量积；(2)求两个单位矢量的数量积。

解　(1)$\mathbf{b}=\lambda\mathbf{a}$或$\mathbf{a}=\mu\mathbf{b}$，故$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\lambda\mathbf{a}^2$者$\mu\mathbf{b}^2$.

(2)　$\mathbf{a}^0\mathbf{b}^0=|\mathbf{a}^0|\ |\mathbf{b}^0|\cos(\widehat{\mathbf{a}^0,\mathbf{b}^0})$.

9．48 求与矢量$\mathbf{a}=2\mathbf{i}-\mathbf{j}+2\mathbf{k}$共线且满足方程$\mathbf{a}\cdot\mathbf{x}=-18$的矢量$\mathbf{x}$。

解 设$\mathbf{x}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$，则由$\mathbf{x}=\lambda\mathbf{a}$，$\mathbf{a}\cdot\mathbf{x}=-18$，有$x=2\lambda$ $y=-\lambda$，$z=2\lambda$，$2x-y+2z=-18$·解得$\mathbf{x}=-4\mathbf{i}+2\mathbf{j}-4\mathbf{k}$，

9．49 一矢量通过点(0,0,0)和(10,5,10)而另一矢量通过点(−2,1,3)和(0,−1,2)，求这两矢量间的夹角。

$$\text{解}\ \cos\alpha=\frac{10\times2+5\times(-2)+10\times(-1)}{\sqrt{10^2+5^2+10^2}\cdot\sqrt{2^2+(-2)^2+(-1)^2}}=0\ ,$$

故$\alpha=\dfrac{\pi}{2}$.

9．50 求证：(1) $(\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}-\mathbf{b})=\mathbf{a}^2-\mathbf{b}^2$

(2) $(\mathbf{a}+\mathbf{b})^2+(\mathbf{a}-\mathbf{b})^2=2(\mathbf{a}^2+\mathbf{b}^2)$并说明这两个等式的几何意义。

证明 (1)$(\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}-\mathbf{b})=\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}+\mathbf{b}\mathbf{a}-\mathbf{a}\mathbf{b}-\mathbf{b}\mathbf{b}=\mathbf{a}^2-\mathbf{b}^2$ 此式表示两边长的平方差等于一对角线长与另一对角线在其上的投影之积。

(2) $(\mathbf{a}+\mathbf{b})^2+(\mathbf{a}-\mathbf{b})^2=\mathbf{a}^2+\mathbf{b}^2+2\mathbf{a}\mathbf{b}+\mathbf{a}^2+\mathbf{b}^2-2\mathbf{a}\mathbf{b}=2(\mathbf{a}^2+\mathbf{b}^2)$.它表示平行四边形对角线长平方之和为边长平方和的两倍。

9．51 已知三角形三个顶点的坐标是$A(-1,2,3)$ $B(1,1,1)$和$C(0,0,5)$，试证三角形ABC是直角三角形，并求角B。

证明 $\overrightarrow{AB}=(2,-1,-2)$，$\overrightarrow{BC}=(-1,-1,4)$，$\overrightarrow{AC}=(1,-2,2)$，$\cos\angle B=\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}/|\overrightarrow{BC}||\overrightarrow{BA}|=1/\sqrt{2}$ $\cos\angle A=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}/|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|=0$.故$\angle A$是直角，

$\angle B=45°$.

9.52 设有一质点开始时位于点$P(1,2,-1)$处今有一方向角分别为60°,60°,45°而大小为100克的力F作用于此质点,求当此质点自点P作直线运动至点$M(2,5,-1+3\sqrt{2})$时,力F所作的功(长度单位为厘米)。

解:质点位移$\overrightarrow{PM}=(1,3,3\sqrt{2})$,而$F=(100\cos 60°, 100\cdot\cos 60°, 100\cdot\cos 45°)=(50,50,50\sqrt{2})$故功$W=F\cdot\overrightarrow{PM}=500$克厘米.

9.53 如果 $\mathbf{a}=\mathbf{i}+2\mathbf{j}+3\mathbf{k}$, $\mathbf{b}=2\mathbf{i}+4\mathbf{j}+\lambda\mathbf{k}$, 试决定$\lambda$, 使(1)$(\widehat{\mathbf{a},\mathbf{b}})$是锐角. (2)$(\widehat{\mathbf{a},\mathbf{b}})$是钝角; (3) $\mathbf{a}$与$\mathbf{b}$垂直. (4)$\mathbf{a}$与$\mathbf{b}$同向, (5)$\mathbf{a}$与$\mathbf{b}$平行.

解 $\cos(\widehat{\mathbf{a},\mathbf{b}})=\dfrac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}=\dfrac{10+3\lambda}{\sqrt{14}\sqrt{20+\lambda^2}}$.(1)$(\widehat{\mathbf{a},\mathbf{b}})$是锐角时,$\cos(\widehat{\mathbf{a},\mathbf{b}})>0$,故$10+3\lambda>0$,$\lambda>-10/3$. (2) 此时$10+3\lambda<0$,即$\lambda<-10/3$. (3) $10+3\lambda=0$, $\lambda=-10/3$. (4) 此时$\cos(\widehat{\mathbf{a},\mathbf{b}})=1$,故 $10+3\lambda=\sqrt{14}\cdot\sqrt{20+\lambda^2}$,解得$\lambda=6$, (5)此时$\cos(\widehat{\mathbf{a},\mathbf{b}})=\pm 1$, $10+3\lambda=\pm\sqrt{14}\cdot\sqrt{20+\lambda^2}$, $\lambda=6$.

6.54 (1) 设$\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$是单位矢量,且$\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}=0$。求$\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}+\mathbf{c}\cdot\mathbf{a}+\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$; (2) 已知矢量$\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}=0$, $|\mathbf{a}|=1$, $|\mathbf{b}|=2$, $|\mathbf{c}|=3$, 求$\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}+\mathbf{c}\cdot\mathbf{a}+\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$。

解 (1) $\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}+\mathbf{c}\cdot\mathbf{a}+\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\frac{1}{2}[(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})^2-\mathbf{a}^2-\mathbf{b}^2-\mathbf{c}^2]=-\dfrac{3}{2}$. (2) $\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}+\mathbf{c}\cdot\mathbf{a}+\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\frac{1}{2}[(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})^2-\mathbf{a}^2-$

$b^2-c^2)=-\frac{1}{2}(|a|^2+|b|^2+|c|^2)=-7$.

9．55　已知$a=2i-j+k$，$b=3j-k$，计算$a\cdot b$和 $a\times b$。

解 $a\cdot b=-3-1=-4$. $a\times b=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix}=-2i+2j+6k$.

9.56　设矢量$a=3i+2j-k$，$b=i-j+2k$；(1) 求 a 与 b的矢量积，(2) 2a与7b的矢量积；(3) 求7a与2b的矢量积 (4) 分别求出$a\times i$，$i\times a$。

解　$a\times b=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}=-3i-7j-5k$.

(2) $2a\times 7b=14(a\times b)=42i-98j-70k$. (3) $7a\times 2b=14(a\times b)=42i-98j-70k$. (4) $a\times i=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=-j-2k$，

$i\times a=-a\times i=j+2k$.

9．58　求同时垂直于$a=2i-j-k$，$b=i+2j-k$的单位矢量。

解　求所求矢量为$\dfrac{a\times b}{|a\times b|}=\dfrac{3i+j+5k}{\sqrt{35}}$

9．56　求已量$p=(3i+6j-2k)\times(i-j+5k)$在三个坐标轴上的分矢量，

解　$p=28i-17j-9k$，故在x,y,z轴上分矢量分别为$28i,-17j,-9k$.

9　60　　已知矢量$a=2i+2j+k$和$b=4i+5j+3k$，求矢量c，使$c\perp a$，$c\perp b$，且$|c|=2$。