幾何學講義

平面部

上册

上野清著
張廷華譯

商務印書館出版

幾何學講義

平面部

上册

上野清著
張廷華譯

商務印書館出版

上野清

幾何學講義 平面部

原　　序

予於編纂此講義錄之始。先蒐集平日之草稿、札記、考試紙、質題等。又取英美德法幾何學書數十種。并幾何學歷史。與之對。以定例題之秩序。次乃解釋是等之例題。參考英國幾何學教改良協會所著幾何學書之順序。而設公理、定義、定理等。由是別例題之種類。俾讀者便於檢索。分全書爲五編。每編又分爲干節。而插入同類之例題。且於各編之終。視定理所漏凡重要有名之例題。均分類記入之。

然後定編纂之次序。第一爲緒言講述幾何學中各項之緣起論理學之應用。第二以簡潔之講述。成各編之定理。第三從事例題之解釋。

至編纂之目的。則以供自修、試驗、參考三者之用也。集多種幾何學書之例題於本書。而引用本書中之定義、公理、定理及例題解釋之。欲使讀他種幾何書者。可藉此書以一一研究。蓋本書於初學者。直謂其用爲幾何學例題之字典也。

雖然。予之解釋。其或涉於煩雜。或失諸簡略。在所不免。故深望[illegible]讀[illegible]例題之後。考求其他之良解較勝於予之解釋者。又望讀者先取例題潛心研究之。至萬不得已然後翻閱予之解釋。讀於例題之困難者。姑置於後。而先取其簡易者一一讀之

易解而易忘者幾何學之例題難考而易忘者亦幾何學之例題有於難解之題見他人之解釋則驚其淺易者有於苦心考究之題易時觀之恍如初遇竟不能解者凡此諸弊皆源因於不能分別定理及例題之秩序也本書蒐集例題種類咸備同時又明瞭其分類欲使初習幾何學者深知幾何學之趣味反覺易解而難忘易考而難忘者亦幾何學之例題也予之希望若此使此希望而能達於萬一也則幸甚矣。

譯述者識

幾何學講義

目　次

緒　論

平　面　部

第壹編　直線

第貳編 圓

第叁編　面積

第肆編　比例

第伍編 作圖

上 野 清

幾何學講義

平面部

緒論

1. 命題 就一事物而敍述之謂之命題

例如「順天者中國之首府也」爲命題。

若單曰「中國之首府也」則何處爲中國之首府乎。便爲不完全之文詞矣。凡敍述一事而文詞不完全者。決不能謂之命題。卽命題必爲完全之文詞。

又如「天氣晴和故海上靜穩」爲命題。

此例若單曰「天氣晴和」或單曰「海上靜穩」亦爲意義完全之文詞。故可謂之命題。

2. 幾何學之命題 上所示之例。爲普通之命題。而幾何學之命題。則其所敍述者。以推得其學理及其應用爲限.

幾何學之命題。共分六種如次。

定義。公理。定理。推論。公法。問題。

此六種依次講述如次

3. 定義 就一事物而敍述其特別性質之命題曰定義但其敍述至其事物可與他事物判然區別而止而不及其他之事項。

定義之命題確定事物之分限甚爲嚴正例如於字典中解釋一文字之意義必有與他文字判別者方爲其文字之定義若於既判別後更敍其餘事則非定義而爲說明

4. 公理 由吾人平生之經驗而認爲眞確之命題曰公理

學幾何學不先明公理終不能躋修業之途此與無資本者不能經營商業同

公理分普通公理及幾何公理二種次所示者爲普通公理其幾何公理俟漸入幾何學之門而示之

5. 普通公理 不僅關於幾何學而關於一切數量之公理也如次之右方爲代數式可與左方對照。

(普通公理)	(普通公理之代數式)
(a) 全量大於其壹部分	(a) $6+4>6$ 或 >4
(b) 全量等於各部分之和	(b) $10=6+4$
(c) 等於同量之諸量必互相等。	(c) $a=b$, $a=c$。則 $b=c$。
(d) 等量各加等量其和相等。	(d) $a=b$, $m=n$。則 $a+m=b+n$

(e) 等量各減等量,其差相等。	(e) $a=b$, $m=n$,則 $a-m=b-n$。
(f) 不等量各加等量,其和不等,大量之和,仍大於小量之和。	(f) $a>b$, $m=n$,則 $a+m>b+n$。
(g) 不等量各減等量,其差不等,大量之差仍大於小量之差。	(g) $a>b$, $m=n$,則 $a-m>b-n$。
(h) 等量之半必相等。	(h) $a=b$,則 $\frac{a}{2}=\frac{b}{2}$。

6. 定理 由已知之命題,而證明其合理之命題,曰定理。

其已知之命題,即定義與公理及已知之定理,而已知之定理,則僅由公理與定義而證得其眞確者也。

7. 定理之二部分 凡定理,必由假設與終決二部分而成。

假設者,假定為已知之事實也。

終決者,由假設而生之事實,為定理之結果也。

例如算術中有云「兩數5及3其積為15」,此為定理,而「兩數5及3」為假設,「其積為15」為終決,故假設為已知之事實,而終決即其答也。

故終決者。爲由已知之事實而用公理或已知之定理所推求而得之事實。此推求之法。謂之證明。故證明者。卽所以確示其定理之眞者也。

例如由「兩數5及3」之假設而用乘法之定義。以證明其5×3=5+5+5=15。而得「其積爲15」之終決。又史云房玄齡善謀。杜如晦善斷。故以貞觀政治爲定理。則玄齡其假設者。而如晦其終決者也。

8. 本定理 示定理之模範。

A爲B則C爲D……………(1)

「A爲B」爲假設。而「C爲D」爲終決。

9. 對偶定理 定理(1)爲合理。則次之定理(2)亦必合理。

C非爲D。則A非爲B……(2)

(2)稱爲(1)之對偶定理。又(1)稱爲(2)之對偶定理。卽(1),(2)互爲對偶定理。

例如A爲B。則必C爲D。若C非D。則A不能爲B明矣。卽「砂糖(假設)必甘(終決)」。故此對偶若云「不甘者非砂糖」。必合於理。

10. 逆定理 假設與終決互相交換之兩定理。互稱爲逆定理。

(1)之逆定理。卽次之(3)。又(1)卽(3)之逆定理

C爲D。則A爲B。……………(3)

本定理合於理。其逆定理未必合於理。卽(1)爲合理。(3)未必爲合理。

例如「砂糖必甘」之逆爲「甘物必砂糖」必不合理。何則。以甘物除砂糖外。尚有飴糖及甘酒等物也。

11. 裏定理 (3)之對偶如次

A非爲B,則C非爲D。……………(4)

(4)稱爲(1)之裏定理

12. 四定理之集合 記前之四定理。

本定理　A爲B則C爲D。　(1),

對偶定理　C非爲D則A非爲B。(2),〔卽(4)之逆〕

逆定理　C爲D則A爲B。　(3),〔卽(2)之裏〕

裏定理　A非爲B則C非爲D。(4),〔卽(3)之對偶〕

本定理若合理。則其對偶定理亦必合理。(見9款)。故(1)能合理。則(2)必合理。又(3)能合理。則(4)必合理。

又本定理雖合理。其逆定理或不能合理。(見10款)。故(1)能合理。而(3)不能合理。卽與(3)同時合理之(3)之對偶定理(4)。亦不能合理。是則(1)能合理。其裏定理(4)。不能合理。

由是本定理雖合理。其裏定理或不能合理。

由是(1),(2),(3),(4)之內(1)與(2)同時合理。又(3)與(4)同時合理。而(1),(2)與(3),(4)合理與否。則不相關係。故在幾何學之證明。必於此四定理之內。證明其不相關係之二定理。方爲完備。卽證明(1)與(3),或(1)與(4),或(2)與(3),或(2)與(4)之二定理能合理。則他之二定理。亦同時合理。

如次例為(1),(2)合理而(3),(4)不合理。

本定理　砂糖必甘。 (1),

對偶定理 不甘者非砂糖。 (2),

逆定理　甘者必為砂糖。 (3),

裏定理　非砂糖則不甘。 (4),

又如次例,則(1),(2),(3),(4)皆能合理。

本定理　土曜日之次日為日曜日。 (1),

對偶定理 非日曜日,則非土曜日之次日。(2),

逆定理　日曜日為土曜日之次日。 (3),

裏定理　非土曜日之次日則非日曜日。(4),

13. 複假設　有時一定理中,有兩三之假設者,則為複假設,若以其複假設之一,與終決交換,即為本定理之逆定理。

例如 $\left.\begin{matrix} A\text{為}B\text{(假設)} \\ C\text{為}D\text{(假設)} \end{matrix}\right\}\text{則}E\text{為}F$

此逆定理如次。

$\left.\begin{matrix} A\text{為}B \\ E\text{為}F \end{matrix}\right\}\text{則}C\text{為}D$

及 $\left.\begin{matrix} C\text{為}D \\ E\text{為}F \end{matrix}\right\}\text{則}A\text{為}B$

此逆定理,亦不能以本定理合理即謂之合理。

14. 轉換法 有一事於此。凡由此事而起之關係。悉列舉之。而其各關係。決非僅限於此事而別無同時並起者。於是將列舉之各關係。一一用作定理。則各定理之逆定理。必以本定理合理而亦合理。此之謂轉換法。

幾何學定理所用之轉換法。有次之二例。

〔第壹〕 比較二量之大小。而推求他二量之大小

例如由比較A,B二量之大小。而推求C,D二量之大小。就此事而列舉各理。以作定理。則得

A大於B則C大於D
A等於B則C等於D (A)
A小於B則C小於D

(A)之各定理。能證明其合理。則次之逆定理(B)。亦必合理。

C大於D則A大於B
C等於D則A等於B (B)
C小於D則A小於B

(A)及(B)。各示一例於次。

兄大於弟則兄之影大於弟之影
兄等於弟則兄之影等於弟之影 (A)
兄小於弟則兄之影小於弟之影

此影爲日光中之影。故(A)合理。則次之逆定理(B)亦合理。