

幾何學講義

平面部

上册

上野清著
張廷華譯

商務印書館出版

幾何學講義

平面部

上册

上野清著

張廷華譯

商務印書館出版

上野清

幾何學講義 平面部

原 序

予於編纂此講義錄之始。先蒐集平日之草稿、札記、考試紙、質題等。又取英美德法幾何學書數十種。并幾何學歷史。與之對。以定例題之秩序。次乃解釋是等之例題。參考英國幾何學教改良協會所著幾何學書之順序。而設公理、定義、定理等。由是別例題之種類。俾讀者便於檢索。分全書爲五編。每編又分爲若干節。而插入同類之例題。且於各編之終。視定理所漏。凡重要有名之例題。均分類記入之。

然後定編纂之次序。第一爲緒言。講述幾何學中各項之緣起。論理學之應用。第二以簡潔之講述。成各編之定理。第三從事例題之解釋。

至編纂之目的。則以供自修、試驗、參考三者之用也。集多種幾何學書之例題於本書。而引用本書中之定義、公理、定理及例題解釋之。欲使讀他種幾何書者。可藉此書以一一研究。蓋本書於初學者。直冀其用爲幾何學例題之字典也。

雖然。予之解釋。其或涉於煩雜。或失諸簡畧。在所不免。故深望於檢閱例題之後。考求其他之良解。較勝於予之解釋者。又望覽者先取例題。悉心研究之。至萬不得已。然後翻閱予之解釋。讀於例題之困難者。姑置於後。而先取其簡易者。一讀之。

易解而易忘者。幾何學之例題。難考而易忘者。亦幾何學之例題。有於難解之題。見他人之解釋。則驚其淺易者。有於苦心考究之題。易時觀之。恍如初遇。竟不能解者。凡此諸弊。皆原因於不能分別定理及例題之秩序也。本書蒐集例題。種類咸備。同時又明瞭其分類。欲使初習幾何學者。深知幾何學之趣味。反覺易解而難忘。易考而難忘者。亦幾何學之例題也。予之希望若此。使此希望而能達於萬一也。則幸甚矣。

講述者識

幾何學講義

目次

緒論

命題，定義，公理，普通公理，定理，定理之二部分，
本定理，對偶定理，逆定理，裏定理，四定理之集合，
複假設，轉換法，一致法，推論，公法，問題……1-9

平 面 部

第壹編 直 線

定義 點，線，面，體，直線，平面，幾何學，幾何 公理……	10-12
第一節 (一點上之角) 角，隣角，直角，垂線，銳角及鈍角， 餘角，補角，對頂角，定理自一至三……	12-18
第一節之例題 自1至11……	18-21
第二節 (三角形) 平面圖形，全等形，平面直線圖形，四 角形，三角形，等脚三角形，直角三角形，鈍角三角形， 銳角三角形，定理自四至十五……	21-34
第二節之例題 自12至56……	35-48
第三節 (垂線) 距離，定理十六……	48-49
第三節之例題 57及58……	50

第四節 平行線，平行直線，交線之角，外角，內角，錯角，應角，幾何公理，定理十七及十八	50—53
第四節之例題 自 59 至 65	53—56
第五節 (圍繞圖形之角) 多角形，凸多角形，凹多角形，正多角形，定理自十九至二十一	56—59
第五節之例題 自 66 至 105	60—71
第六節 (平行四邊形) 平行四邊形，梯形，矩形，菱形，正方形，定理自二十二至二十四	72—74
第六節之例題 自 106 至 136	74—82
第七節 (正射影) 正射影，定理自二十五至二十七	83—85
第七節之例題 自 137 至 161	86—94
第八節 (軌跡) 軌跡，軌跡之證明法，定理二十八及二十九，軌跡之交截，定理三十及三十一	94—100
第八節之例題 自 162 至 168	100—101
節壹編例題 (三角形之線) 垂線，中線，角之二等分線，例題自 169 至 193	102—110
(三角形之心) 外心，內心，傍心，垂心，重心，例題自 194 至 214	110—117
(極大極小) 例題自 215 至 220	117—120

第貳編 圓

定義 圓，中心，半徑，直徑	121
第一節 (根原之性質) 定理自一至三	121—124
第一節之例題 自 221 至 237	124—129

第二節 (中心角及扇形之角) 弧, 中心角, 扇形, 扇形之角, 定理四.....	129-130
第二節之例題 238 及 239.....	131
第三節 (弦) 弦, 定理自五至八.....	131-134
第三節之例題 自 240 至 276.....	135-143
第四節 (弓形之角) 弓形, 圓周角, 弓形之角, 內切及外切, 定理自九至十.....	143-147
第四節之例題 自 277 至 412.....	147-184
第五節 (切綫) 割綫, 割綫之極限位置, 切綫, 切點, 定理自十二至十四.....	185-188
第五節之例題 自 413 至 510.....	189-213
第六節 (兩圓之關係) 相切及相交, 兩圓之外切, 相交, 內切, 定理自十五至十七.....	213-217
第六節之例題 自 511 至 578.....	218-238
第七節 (圓之內切及外切圖形) 內切及外切, 直線圖形之內切圓及外切圓, 定理十八及十九.....	238-240
第七節之例題 自 579 至 604.....	241-247
第八節 例題 (三角形之切圓及心) 三角形之外切圓, 內切圓 傍切圓, 例題自 605 至 665.....	247-268
(垂足三角形) 例題自 666 至 667.....	264-267
(九點圓) 例題自 668 至 676.....	267-271
(西摩松綫) 例題自 677 至 690.....	271-276
(兩圓之交角) 例題自 691 至 698.....	276-279
(極大極小) 例題自 699 至 711.....	280-285

第叁編 面積

面積之定義	面積，兩圖形之相等，普通公理(d)，普通公理(e)，幾何公理(1)，幾何公理(1)之推衍	286
第一節 (平行四邊形)	三角形及平行四邊形之高，定理自一至三	287—289
	第一節之例題 自 712 至 799	289—319
第二節 (矩形及正方形)	矩形及正方形，有限直線之內分及外分，有限二直線上之矩形，有限一直線上之正方形，定理自四至八 代數二定理自四至八	319—324
	第二節之例題 自 800 至 822	325—331
第三節 (三角形之關係)	直角三角形，鈍角及銳角三角形，定理自九至十一	332—334
	第三節之例題 自 823 至 933	334—366
第四節 (圓之關係)	弦之內分及外分，割線，切線，定理十二及十三	366—398
	第四節之例題 自 934 至 1020	368—398
第叁編例題 (三角形之面積及切節)	三角形之面積，三角形之內切圓，外切圓，傍切圓 他之切圓，例題自 1021 至 1032	398—397
	(樞軸) 二圓之樞軸，相等切線之軌跡，三圓之樞軸，例題自 1033 至 1039	397—400
	(諸點之重心) 三角形之頂及重心，多角形之角頂，諸點之重心，例題自 1040 至 1052	400—405
	(極大極小) 例題自 1053 至 1061	405—412

第肆編 比例

比例之定義 量及數之記號，比，倍量之夾法，比之記號， 兩等比，兩不等比，比例，比例之記法，外項，中項， 相應項，連比例，比例中項，比例第三項，反比，複比， 平方比，立方比，注意，複比，平方比及立方比之略記 法.....	418—415
第一節 (普通之量) 定理自一至十三.....	415—420
第二節 (幾何學之量) 調和比例，調和列點，定理自十四 至十六.....	420—423
第二節之例題 自1082至1087.....	423—424
第三節 (相似形) 相似直線圖形，相似中心，定理自十七 至二十三.....	425—430
第三節之例題 自1088至1217.....	431—473
第四節 面積：定理自二十四至三十.....	474—479
第四節之例題 自1218至1426.....	479—562
第五節 (軌跡) 定理三十一及三十二.....	563—564
第五節之例題 自1427至1444.....	565—570
第肆編例題 (三角形之切圓) 例題自1445至1509.....	571—591
(橫截線) 例題自1510至1528.....	592—599
(扇形) 例題自1529至1532.....	600—601
(方程式) 例題自1533至1536.....	602—603
(極大極小) 例題自1537至1542.....	604—606

第五編 作圖

緒論 定木, 兩脚器, 公法(1), (2), (3).....	608
第一節 (直線) 問題自一至十.....	606—611
第一節之例題 自1543至1576.....	612—619
第二節 (圓) 問題自十二至二十一.....	619—628
第二節之例題 自1577至1621.....	628—638
第三節 (面積) 問題自二十二至二十八.....	633—638
第三節之例題 自1622至1654.....	638—646
第四節 (比例) 問題自二十九至三十二.....	647—648
第四節之例題 自1655至1685.....	649—657

上 · 野 清
幾 何 學 講 義
平 面 部
緒 論

1. 命題 就一事物而敘述之。謂之命題。

例如「順天者中國之首府也」爲命題。

若單曰「中國之首府也」則何處爲中國之首府乎。便爲不完全之文詞矣。凡敘述一事而文詞不完全者。決不能謂之命題。即命題必爲完全之文詞。

又如「天氣晴和故海上靜穩」爲命題。

此例若單曰「天氣晴和」或單曰「海上靜穩」亦爲意義完全之文詞。故可謂之命題。

2. 幾何學之命題 上所示之例。爲普通之命題。而幾何學之命題。則其所敘述者。以推得其學理及其應用爲限。

幾何學之命題。共分六種如次。

定義。公理。定理。推論。公法。問題。

此六種。依次講述如次

3. 定義 就一事物而敘述其特別性質之命題曰定義但其敘述至其事物可與他事物判然區別而止而不及其他之事項。

定義之命題。確定事物之界限。甚為嚴正。例如於字典中解釋一文字之意義。必有與他文字判別者。方為其文字之定義。若於既判別後更敘其餘事。則非定義而為說明。

4. 公理 由吾人平生之經驗而認為真確之命題。曰公理

學幾何學不先明公理。終不能踐修業之途。此與無資本者不能經營商業同。

公理分普通公理及幾何公理二種。次所示者。為普通公理。其幾何公理。俟漸入幾何學之門而示之。

5. 普通公理 不僅關於幾何學而關於一切數量之公理也。如次之右方為代數式。可與左方對照。

(普通公理)

(普通公理之代數式)

(a) 全量大於其壹部分。

$$(a) \quad 6 + 4 > 6 \text{ 或 } > 4$$

(b) 全量等於各部分之和

$$(b) \quad 10 = 6 + 4$$

(c) 等於同量之諸量。必互

$$(c) \quad a = b, \quad a = c, \text{ 則}$$

$$b = c.$$

相等。

(d) 等量各加等量。其和相

$$(d) \quad a = b, \quad m = n, \text{ 則}$$

$$a + m = b + n$$

等。

- | | |
|------------------------------|---|
| (e) 等量各減等量其差相等。 | (e) $a = b, m = n$ 則
$a - m = b - n$. |
| (f) 不等量各加等量其和不等。大量之和仍大於小量之和。 | (f) $a > b, m = n$ 則
$a + m > b + n$. |
| (g) 不等量各減等量其差不等。大量之差仍大於小量之差。 | (g) $a > b, m = n$ 則
$a - m > b - n$. |
| (h) 等量之半必相等。 | (h) $a = b$ 則 $\frac{a}{2} = \frac{b}{2}$. |

6. 定理 由已知之命題而證明其合理之命題曰定理。

其已知之命題即定義與公理及已知之定理而未知之定理則僅由公理與定義而證得其真確者也。

7. 定理之二部分 凡定理必由假設與終決二部分而成。

假設者。假定為已知之事實也。

終決者。由假設而生之事實為定理之結果也。

例如算術中有云「兩數5及3其積為15」此為定理而「兩數5及3」為假設「其積為15」為終決。故假設為已知之事實。而終決即其答也。

故終決者，爲由已知之事實而用公理或已知之定理所推求而得之事實。此推求之法，謂之證明。故證明者，即所以確示其定理之真者也。

例如由「兩數5及3」之假設而用乘法之定義，以證明其 $5 \times 3 = 5 + 5 + 5 = 15$ ，而得「其積爲15」之終決。又史云房玄齡善謀，杜如晦善斷。故以貞觀政治爲定理，則玄齡其假設者，而如晦其終決者也。

8. 本定理 示定理之模範。

A 爲 B 則 C 爲 D.....(1)

「A 爲 B」爲假設，而「C 爲 D」爲終決。

9. 對偶定理 定理(1)爲合理，則次之定理(2)亦必合理。

C 非爲 D，則 A 非爲 B.....(2)

(2)稱爲(1)之對偶定理，又(1)稱爲(2)之對偶定理，即(1),(2)互爲對偶定理。

例如 A 爲 B，則必 C 爲 D。若 C 非 D，則 A 不能爲 B 明矣。即「砂糖(假設)必甘(終決)」，故此對偶若云「不甘者非砂糖」，必合於理。

10. 逆定理 假設與終決互相交換之兩定理，互稱爲逆定理。

(1)之逆定理，即次之(3)，又(1)即(3)之逆定理

C 爲 D，則 A 爲 B.....(3)

本定理合於理，其逆定理未必合於理，即(1)爲合理，(3)未必爲合理。

例如「砂糖必甘」之逆為「甘物必砂糖」必不合理。何則。以甘物除砂糖外。尚有飴糖及甘酒等物也。

11. 裏定理 (3)之對偶如次

A 非為 B, 則 C 非為 D, ……………(4)

(4) 稱為(1)之裏定理

12. 四定理之集合 記前之四定理.

本定理 A 為 B 則 C 為 D. (1),

對偶定理 C 非為 D 則 A 非為 B. (2), [即(1)之逆]

逆定理 C 為 D 則 A 為 B. (3), [即(2)之裏]

裏定理 A 非為 B 則 C 非為 D. (4), [即(3)之對偶]

本定理若合理。則其對偶定理亦必合理。(見9款)。故(1)能合理。則(2)必合理。又(3)能合理。則(4)必合理。

又本定理雖合理。其逆定理或不能合理。(見10款)。故(1)能合理。而(3)不能合理。即與(3)同時合理之(3)之對偶定理(4)。亦不能合理。是則(1)能合理。其裏定理(4)。不能合理。

由是本定理雖合理。其裏定理或不能合理。

由是(1), (2), (3), (4)之內 (1)與(2)同時合理。又(3)與(4)同時合理。而(1), (2)與(3), (4)合理與否。則不相關係。故在幾何學之證明。必於此四定理之內。證明其不相關係之二定理方為完備。即證明(1)與(3), 或(1)與(4), 或(2)與(3), 或(2)與(4), 之二定理能合理。則他之二定理亦同時合理。

如次例爲(1),(2)合理而(3),(4)不合理。

本定理 砂糖必甘。 (1),

對偶定理 不甘者非砂糖。 (2),

逆定理 甘者必爲砂糖。 (3),

裏定理 非砂糖則不甘。 (4),

又如次例則(1),(2),(3),(4)皆能合理。

本定理 土曜日之次日爲日曜日。 (1),

對偶定理 非日曜日則非土曜日之次日。 (2),

逆定理 日曜日爲土曜日之次日。 (3),

裏定理 非土曜日之次日則非日曜日。 (4),

13. 複假設 有時一定理中,有兩三之假設者,則爲複假設。若以其複假設之一,與終決交換,卽爲本定理之逆定理。

例如 $\left. \begin{array}{l} A \text{ 爲 } B \text{ (假設)} \\ C \text{ 爲 } D \text{ (假設)} \end{array} \right\} \text{則 } E \text{ 爲 } F$

此逆定理如次。

$\left. \begin{array}{l} A \text{ 爲 } B \\ E \text{ 爲 } F \end{array} \right\} \text{則 } C \text{ 爲 } D$

及 $\left. \begin{array}{l} C \text{ 爲 } D \\ E \text{ 爲 } F \end{array} \right\} \text{則 } A \text{ 爲 } B$

此逆定理亦不能以本定理合理卽謂之合理。

14. 轉換法 有一事於此。凡由此事而起之關係，悉列舉之。而其各關係決非僅限於此事而別無同時並起者。於是將列舉之各關係，一一用作定理。則各定理之逆定理，必以本定理合理而亦合理。此之謂轉換法。

幾何學定理所用之轉換法。有次之二例。

[第壹] 比較二量之大小。而推求他二量之大小。例如由比較A, B二量之大小。而推求C, D二量之大小。就此事而列舉各理。以作定理。則得

$$\left. \begin{array}{l} A \text{ 大於 } B \text{ 則 } C \text{ 大於 } D \\ A \text{ 等於 } B \text{ 則 } C \text{ 等於 } D \\ A \text{ 小於 } B \text{ 則 } C \text{ 小於 } D \end{array} \right\} (A)$$

(A)之各定理。能證明其合理。則次之逆定理(B)。亦必合理。

$$\left. \begin{array}{l} C \text{ 大於 } D \text{ 則 } A \text{ 大於 } B \\ C \text{ 等於 } D \text{ 則 } A \text{ 等於 } B \\ C \text{ 小於 } D \text{ 則 } A \text{ 小於 } B \end{array} \right\} (B)$$

(A)及(B)。各示一例於次。

$$\left. \begin{array}{l} \text{兄大於弟則兄之影大於弟之影} \\ \text{兄等於弟則兄之影等於弟之影} \\ \text{兄小於弟則兄之影小於弟之影} \end{array} \right\} (A)$$

此影為日光中之影。故(A)合理。則次之逆定理(B)亦合理。