

第五章 线性系统理论引论

§ 5-0 引言	5-0-1
§ 5-1 线性系统的数学描述	5-1-1
5-1-1 线性系统的经典描述方法	5-1-1
一、常系数、线性、连续系统的经典描述方法.....	5-1-1
1. 用微分方程来描述	5-1-1
2. 用传递函数来描述	5-1-2
3. 用频率特性来描述	5-1-4
4. 用脉冲过渡函数来描述	5-1-4
5. 借助图形来描述(符号流程图)	5-1-7
二、常系数、线性、离散系统的经典描述方法.....	5-1-16
1. 用差分方程来描述	5-1-16
2. 用Z传递函数来描述	5-1-17
三、变系数、线性、连续系统的经典描述方法.....	5-1-18
四、变系数、线性、离散系统的经典描述方法.....	5-1-19
5-1-2 线性系统的现代描述方法	5-1-19
一、线性系统的状态空间描述	5-1-19
1. 线性、连续系统的状态空间描述	5-1-19
2. 线性、离散系统的状态空间描述	5-1-25
二、线性系统的结构图表示	5-1-27
三、常系数、线性、连续系统的传递矩阵	5-1-28
四、常系数、线性、离散系统的传递矩阵	5-1-29

五、随机线性系统的数学描述	5-1-30
§ 5-2 线性系统的最佳设计	5-2-1
5-2-1 最佳设计问题的提出	5-2-1
5-2-2 最佳设计的性能指标	5-2-4
5-2-3 最佳滤波原理	5-2-7
一、维纳最佳滤波原理	5-2-7
二、卡尔曼滤波原理	5-2-14
5-2-4 最佳控制原理	5-2-19
一、确定性系统最佳控制原理	5-2-19
二、随机性系统最佳控制原理	5-2-21
三、随机性系统最佳控制问题的分解原理	5-2-23
§ 5-3 线性系统的基本特性	5-3-1
5-3-1 引言	5-3-1
5-3-2 线性系统的可观性	5-3-2
一、系统可观性概念	5-3-2
二、系统完全状态可观性准则	5-3-2
三、系统一致可观性概念	5-3-14
5-3-3 线性系统的可控性	5-3-29
一、系统可控性概念	5-3-29
二、系统完全状态可控性准则	5-3-30
三、系统完全轨出可控性准则	5-3-39
四、系统一致可控性概念	5-3-40

5-3-4	线性系统的稳定性	5-3-57
一、	系统稳定性概念	5-3-57
1.	系统的描述	5-3-57
2.	平衡状态	5-3-58
3.	稳定性概念	5-3-58
二、	李雅普诺夫直接法	5-3-61
三、	线性系统的稳定性准则	5-3-68
四、	线性系统稳定性的一般形式	5-3-80
五、	利用李雅普诺夫函数	
	估计系统时间常数的上界	5-3-83
§ 5-4	线性系统的不变量及其规范形式	5-4-1
5-4-1	状态变量的线性变换及	
	系统的不变量	5-4-1
5-4-2	线性系统的若唐规范形式	5-4-3
5-4-3	线性系统的可控规范形式	5-4-25
5-4-4	线性系统的可观文规范形式	5-4-31
§ 5-5	常系数、线性系统的实现问题	5-5-1
5-5-1	常系数、线性系统的可控实现	5-5-1
5-5-2	常系数、线性系统的可观文实现	5-5-7
5-5-3	常系数、线性系统的并联形实现	5-5-9
一、	并联可控实现	5-5-9
二、	并联可观文实现	5-5-13

5-5-4	常系数、线性系统的串联形实现	5-5-15
5-5-5	常系数、线性系统的最小实现	5-5-21
§ 5-6	状态反馈问题	5-6-1
5-6-1	反馈问题	5-6-1
5-6-2	极点配置问题	5-6-8
一、	单轨入单轨出系统的极点配置问题	5-6-9
二、	特殊情况下多轨入多轨出系统的 极点配置问题	5-6-18
5-6-3	稳定性问题	5-6-26
一、	能稳定性	5-6-26
二、	衰减速度	5-6-28
三、	减少反馈量	5-6-29
四、	轨出反馈的稳定性	5-6-33
5-6-4	分离性控制问题	5-6-35
§ 5-7	观文口原理	5-7-1
5-7-1	引言	5-7-1
5-7-2	观文口和“可检测系统”	5-7-1
一、	观文口构成的基本思想	5-7-1
二、	观文口和“可检测系统”	5-7-5
5-7-3	观文口的基本关系	5-7-13
5-7-4	基本观文口	5-7-26
5-7-5	降维观文口	5-7-29

一、单轨入单轨出系统的降维观文口	5-7-31
二、多轨入多轨出系统的降维观文口	5-7-39
5-7-6 用观文口构成状态反馈	5-7-46
§ 5-8 灵敏度分析	5-8-1
5-8-1 经典灵敏度和闭环极偏移与增益偏移 以及开环零点, 极点偏移间的关系	5-8-1
5-8-2 比较灵敏度	5-8-8
5-8-3 轨道灵敏度函数	5-8-19
§ 5-9 线性系统的对偶原理	5-9-1
5-9-1 线性系统的可观文性与 可控性之间的对偶特性	5-9-1
5-9-2 随机最佳估计和确定性 最佳控制之间的对偶特性	5-9-2
5-9-3 对偶系统和对偶原理	5-9-5
5-9-4 线性系统的对偶关系式	5-9-7

第六章 最佳滤波原理

§ 6-0 引言	6-0-1
§ 6-1 估计问题	6-1-1
6-1-1 统计估计问题	6-1-1
一、最小方差估计	6-1-1
二、极大验后估计	6-1-5
三、极大似然估计	6-1-6
四、举例	6-1-7
6-1-2 线性估计	6-1-18
一、线性最小方差估计	6-1-18
二、最小二乘估计	6-1-24
6-1-3 估计问题小结	6-1-28
一、几种估计方法的比较	6-1-28
二、几种估计方法间的关系	6-1-30
§ 6-2 线性最佳滤波原理	6-3-1
6-2-1 离散、线性系统的最佳滤波原理	6-2-1
一、概述	6-2-1
二、卡尔曼滤波公式	6-2-3
三、卡尔曼滤波的性质	6-2-21
四、白噪声情况下一般线性系统的滤波公式	6-2-21
五、有色噪声情况下线性系统的滤波	6-2-28

六、举例	6-2-44
6-2-2 连续、线性系统的最佳滤波原理	6-2-67
一、连续、线性系统的最佳滤波问题	6-2-67
二、等效的离散、线性系统	6-2-68
1. 将白噪声过程视为白噪声序列的 极限情况	6-2-68
2 等效的离散、线性系统	6-2-72
三、连续、线性系统滤波的基本标式	6-2-74
四、举例	6-2-81
§ 6-3 最佳滤波的稳定性和误差分析	6-3-1
6-3-1 最佳滤波的稳定性	6-3-1
一、最佳滤波的稳定性概念	6-3-1
二、稳定性准则	6-3-2
6-3-2 最佳滤波的误差分析	6-2-8
一、误差协方差矩阵微分方程和 差分方程的解析解	6-3-8
1. 误差协方差矩阵微分方程的解析解	6-3-8
2. 误差协方差矩阵差分方程的解析解	6-3-18
二、误差协方差矩阵的上、下界	6-3-22
三、误差协方差矩阵的渐近特性	6-3-33
§ 6-4 模型误差分析，最佳滤波的 发散现象和克服发散的方法	6-4-1

6-4-1	模型误差分析	6-4-1
	一、模型误差分析的一般方法	6-4-1
	二、特殊情况的讨论	6-4-6
6-4-2	泸波的发散现象	6-4-15
6-4-3	克服发散的方法	6-4-16
	一、限定下界法	6-4-16
	二、状态扩充法	6-4-20
	三、渐消记(衰减记忆泸波)	6-4-22
	四、限定记忆泸波	6-4-31
	五、自适应泸波	6-4-35

§ 5-2 线性系统的最佳设计

5-2-1 最佳设计问题的提出

为了说明最佳设计问题，首先让我们讨论一个如图 5-2-1 所示的雷达跟踪系统的实际问题。

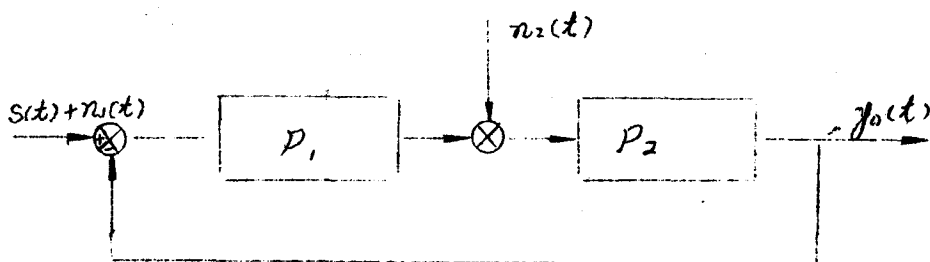


图 5-2-1 雷达跟踪系统结构图

图 5-2-1 中， $S(t)$ 为雷达应该跟踪的信号， $n_1(t)$ 为与信号混合一起的干扰（或噪音）， $n_2(t)$ 是轨出端的扰动，例如风力对雷达天线的扰动。可见对于这样一个系统，如果不很好设计 P_1 和 P_2 ，显然，雷达天线就不会正确地跟踪目标。因此为了提高雷达对目标的跟踪精度，就提出了这样一个问题：如何设计系统的 P_1 和 P_2 ，使得系统的轨出最正确地与信号 $S(t)$ 保持一致。由于

$$\begin{aligned} y_0(t) &= P_2 \{ P_1 [S(t) + n_1(t)] + n_2(t) \} \\ &= P_2 P_1 [S(t) + n_1(t)] + P_2 n_2(t) \end{aligned}$$

因此

$$y_0(t) = \frac{P_2 \cdot P_1}{1 + P_2 \cdot P_1} \cdot S(t) + \frac{P_2 \cdot P_1}{1 + P_2 \cdot P_1} n_1(t) + \frac{P_2}{1 + P_2 \cdot P_1} n_2(t) \quad (5-2-1) \quad 5-2-1$$

由(5-2-1)式, 可将雷达跟踪系统的结构图改变成图5-2-2

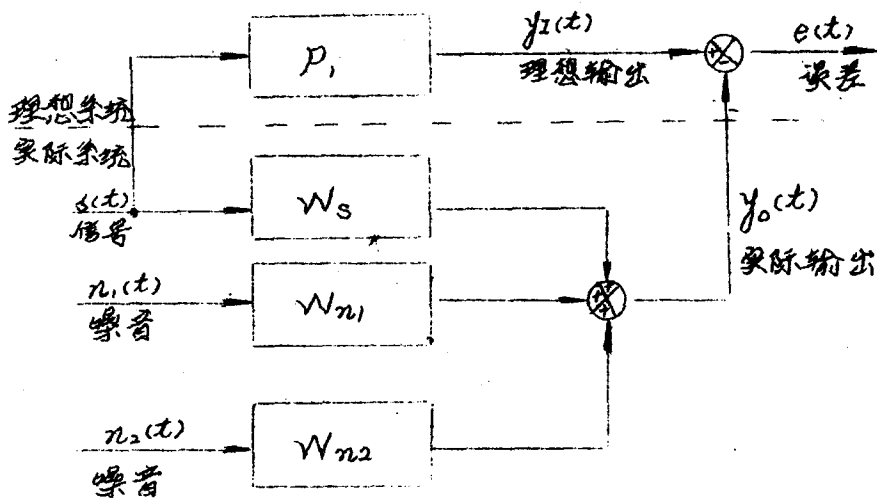


图5-2-2 另一种形式的雷达跟踪系统结构图

图中 P_I 是理想运算子, $W_S = \frac{P_2 \cdot P_1}{1 + P_2 \cdot P_1}$, $W_{n1} = \frac{P_2 \cdot P_1}{1 + P_2 \cdot P_1}$,

$W_{n2} = \frac{P_2}{1 + P_2 \cdot P_1}$ 。这样, 上面提出的问题便可这样叙述: 根据给定的

的 P_I 的形式和 $s(t)$ 、 $n_1(t)$ 、 $n_2(t)$ 的特性, 确定 W_S 和 W_{n1} 、 W_{n2} (即 P_1 和 P_2) 使得其均方误差 $\epsilon^2(t)$ 达到最小。这就是雷达跟踪系统的最佳设计问题。

上述雷达跟踪系统的最佳设计问题, 可推广到如图5-2-3所示的更一般的情况。这时, 系统最佳设计问题可叙述为: 根据给定的 P_I

的形式和信号 $S(t)$ 、噪音 $n(t)$ 的特性，确定 W_S 和 W_n ，使得 $\epsilon^2(t)$ 达到最小。这就是一般控制系统的最佳设计问题。

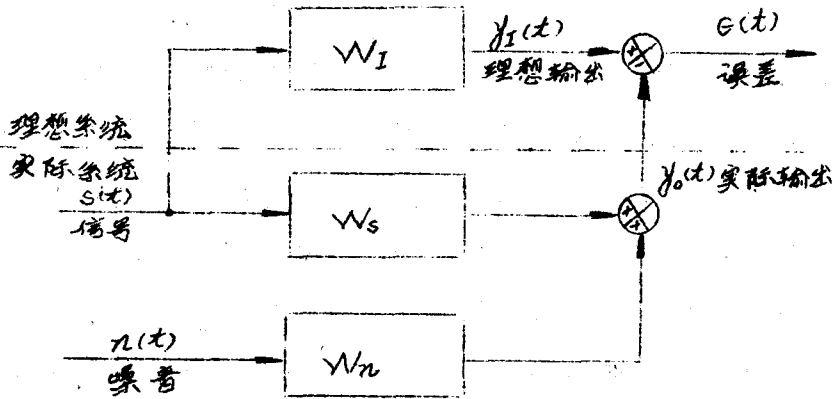


图 5-2-3 一般系统结构图

上述控制系统的最佳设计问题中，理想运算是根据需要预先给定的，例如，若我们要求系统的输出复现信号，则 $P_I = 1$ ，而其相应的脉冲过渡函数就是 $\delta(t)$ ；而使 $\epsilon^2(t)$ 达到最小称为最佳准则， $\epsilon^2(t)$ 称为性能指标或损失函数。显然，所要求的 W_S 和 W_n 的形式必然与最佳准则或性能指标有关，因此在进行最佳设计时，选择合适的性能指标是很重要的；另外，在进行控制系统的最佳设计时信号 $S(t)$ 和 $n(t)$ 的特性要预先给出；还有，一般说来所设计出来的最佳控制系统只能使 $\epsilon^2(t)$ 最小，但不能使 $\epsilon(t) = 0$ ，这就是最佳控制系统与理想系统的差别，也就是说，最佳控制系统是可实现的，而理想系统是无法实现的。

控制系统的最佳设计是随着科学技术的飞速发展，对控制系统的精度和快速性的要求越来越高的情况下提出来的。例如在二次大战前，由于飞机的飞行高度和机动性越来越高，武器的射程也越来越远，因此就要求设计出高精度快速的火力控制系统。在这种情况下，再加上当时数学上的成就，就出现了维纳最佳滤波原理，并且根据这个原理设计出了自动雷达，指挥仪，火炮随动系统组成的全自动的火力控制系统，大大提高了火炮的射击精度；又如在本世纪五十年代末到六十年代初，由于空间技术的飞速发展，要求对在复杂轨迹上运动的飞船作姿态控制，由于需控制的状态（位置、速度、姿态角等）多，精度要求高，因此，在近代数学取得的成果的条件下，六十年代初期便出现了建立在状态空间分析法基础上的卡尔曼最佳滤波原理，根据这个原理成功地设计了飞船的姿态控制系统，才使飞船登月成为可能。

5-2-2 最佳设计的性能指标

由于最佳控制准则或性能指标在很大的程度上确定了最佳控制的性能，因此性能指标的选择是很重要的。也就是说，所得的控制可能是线性的或非线性的，定常的或时变的，这些在很大程度上取决于性能指标的形式。因此，控制工程人员，常常需要根据具体问题的要求选择合适的性能指标。那么怎样来选择性能指标呢？这在很大程度上又取决于系统的性质和对系统的要求。具体地说，性能指标应具有两个条件：

(1)性能指标应该尽可能真实地反映系统的工作性能；

(2)性能指标应该是一个用现有方法可以计算得出的量。

例如，对于一个通讯系统，一个合适的性能指标可以是在标准信号输入时，在输出端信号功率对噪音功率之比，即所谓输出信噪比。显然，

对于线性系统，在知道了轨入信号与噪音的频谱分布和系统的参数之后，这个比值便可以算出来。并且，当其他条件相同时，高比值要比低比值具有更良好的性能，因此，这个指标和我们对系统性能的直觉理解之间是有联系的。但是，若要进一步研究时，也许还要计及信号的失真，在随机选定的信号中，各种频率出现的概率，以及将系统的轨出译成意义时人耳和人脑的反映特性等。由此可知，一个性能指标，可以是相当简单的量，也可以是十分复杂的量或中等复杂程度的量。而其最终的选择，主要还应该看采用的是什么数据和设计者认为对问题的分析需要深入到什么程度？同时，还需建立在工程判断上。实际上，我们常用一类系统误差的凸函数作为性能指标：

$$L(0) = 0$$

$$L(x_2) > L(x_1) \geq 0 \quad \text{当 } x_2 > x_1 \geq 0 \quad (5-2-2)$$

$$L(x) = L(-x)$$

式中系统误差可以是标量（对单轨入单轨出系统）或矢量（对多轨入多轨出系统）。在 x 是标量的情况下，满足 (5-2-2) 式的性能指标可以是：

$$L(x) = a x^2 ; \quad L(x) = a x^4 ;$$

$$L(x) = a |x| ; \quad L(x) = a (1 - e^{-x^2})$$

等等，其中 x 为系统的误差。在大多数场合，又常常采用均方误差来作为性能指标。例如，上面我们用到的最佳准则，就是采用均方误差作为性能指标的。显然，系统的均方误差是满足上述性能指标性质

(5-2-2) 式的特殊情况。它被广泛采用的理由是：

(1) 服从正态分布的随机变量的全部统计特性，可以根据其均方误差和平均值来求出；

(2) 当一个随机变量的其他统计特性不能被计算出来时，而其均方误差却仍然可以求出；

(3) 计算上的方便。

在讨论多轨入多轨出的复杂系统时，系统的误差是用矢量来表示的，这时，常采用一种二次型性能指标：

$$J = \int_0^{\infty} (\xi(t) - X(t))^* Q (\xi(t) - X(t)) dt \quad (5-2-3)$$

式中

$\xi(t)$ —— 表示所希望的状态；

$X(t)$ —— 表示系统的真实状态；

Q —— 对称正定（或正半定）加权矩阵；

$(\cdot)^*$ —— 矩阵 (\cdot) 的共轭转置符号。

如果除了要考虑到系统的误差之外，还要注意到对控制作用所需的能量，而控制作用一般是力和力矩的因次，因此控制能量正比于

$\{u(t)\}^2$ 的积分，这样系统的性能指标在 $\xi(t) = 0$ 和 $X(t)$ 是实数矢量时，就应为：

$$J = \int_0^{\infty} \{X^T(t) Q X(t) + u^T(t) R u(t)\} dt \quad (5-2-4)$$

式中 R 是对称正定加权矩阵。在这个问题中， $u(t)$ 仍然是不受约束的，因为上式只表示在选取控制矢量 $u(t)$ 时，使其能量不要太大，而没有任何具体大小的限制。如果除了要考虑控制过程中系统的误差和所需的控制能量外，还要考虑控制系统的终端误差，这时性能指标在 $\xi(t) = 0$ 和 $X(t)$ 是实数矢量的情况下，就应为：

$$J = X^T(T)SX(T) + \int_0^T (X^T(t)QX(t) + u^T(t)Ru(t)) dt \quad (5-2-5)$$

式中 S 是对称正定 (或正半定) 加权矩阵。

在随机情况下, 一般的二次型性能指标为:

$$\bar{J} = E\{X^T(T)SX(T) + \int_0^T [X^T(t)QX(t) + u^T(t)Ru(t)] dt\} \quad (5-2-6)$$

在随机情况下, 最佳估计性能指标是:

$$\bar{J} = E\{\tilde{X}^T(t)Q\tilde{X}(t)\} \quad (5-2-7)$$

上两式中 $E\{\cdot\}$ 是 $\{\cdot\}$ 的期望。式 (5-2-7) 是求对 $X(t)$ 的最佳估计时用的, $X(t)$ 一般是矢量, $\tilde{X}(t)$ 是 $X(t)$ 的真正值和 $X(t)$ 的估计值之差, 即估计误差, 都是随机变量。

5-2-3 最佳滤波原理

一、维纳最佳滤波原理

维纳最佳滤波问题的提法是:

设 $S(t)$ 是随时间变化的信号, 它是输入系统的有用信号; 而设 $g(t) = S(t) + n(t)$ 为总的系统输入信号 ($n(t)$ 为干扰信号), 则在理想条件下, 我们需要设计一个系统, 使其输出为 $S(t+T)$

上述维纳滤波问题, 当 $T=0$, 这时称为滤波问题; 当 $n(t)=0$, 而且 $T>0$, 这时称为预测问题; 当 $n(t) \neq 0$, 而且 $T>0$, 这时称为滤波、预测问题。

维纳滤波问题是建立在以下四个假定的基础之上的:

(1) 信号 $S(t)$ 和噪音 $n(t)$ 均为平稳随机过程，并且它们之间存在着一些不同的性质；

(2) 系统是线性系统；并且是常系数系统；

(3) 系统是物理上可实现的，即其脉冲过渡函数在 $t < 0$ 时必需为零，也就是 $h(\tau) = 0$ ，当 $\tau < 0$ ；

(4) 最佳准则，是实际轨出与理想轨出之间的偏差的均方值最小。

以上假定就确定了维纳滤波器的应用范围。由于维纳滤波问题所研究的信号与噪音都是标量形式，因此只适用于单轨入单轨出系统的设计。这样，维纳滤波问题的求解，可以用经典理论解决。

根据上述假定，要找到维纳滤波问题的解，首先要找到物理系统的误差表示式。当物理系统的特性用脉冲过渡函数来描述时，系统轨出误差的表示式为：

$$\epsilon(t) = S(t+T) - \int_0^{\infty} [S(t-\tau) + n(t-\tau)] h(\tau) d\tau \quad (5-2-8)$$

由此得到其均方误差为

$$\begin{aligned} \overline{\epsilon^2} = & \Phi_{ss}(0) - 2 \int_0^{\infty} \Psi(T+\tau) h(\tau) d\tau \\ & + \int_0^{\infty} h(\tau_1) d\tau_1 \int_0^{\infty} h(\tau_2) \Phi(\tau_2 - \tau_1) d\tau_2 \quad (5-2-9) \end{aligned}$$

式中

$$\Psi(\tau) = \Phi_{ss}(\tau) + \Phi_{ns}(\tau)$$

$$\Phi(\tau) = \Phi_{ss}(\tau) + \Phi_{ns}(\tau) + \Phi_{sn}(\tau) + \Phi_{nn}(\tau)$$

当物理系统的特性用频率特性来描述时，可找到系统的均方误差的表示式为：

$$\begin{aligned} \bar{\epsilon}^2 = & \int_0^{\infty} \{ |Y(j\omega)|^2 G_{nn}(\omega) + (Y(j\omega) - e^{j\omega T}) Y(-j\omega) G_{ns}(\omega) \\ & + (Y(-j\omega) - e^{-j\omega T}) Y(j\omega) G_{sn}(\omega) \\ & + |Y(j\omega) - e^{j\omega T}|^2 G_{ss}(\omega) \} d\omega \quad (5-2-10) \end{aligned}$$

式中

- $Y(j\omega)$ —— 系统的频率特性；
- $G_{nn}(\omega)$ —— 噪音的自频谱密度；
- $G_{ss}(\omega)$ —— 信号的自频谱密度；
- $G_{ns}(\omega)$ —— 噪音与信号的互频谱密度；
- $G_{sn}(\omega)$ —— 信号与噪音的互频谱密度；
- $e^{j\omega T}$ —— 理想预测特性。

这样，求 (5-2-9) 式和 (5-2-10) 式的极小值，便可得到所要求的最佳系统的脉冲过渡函数和频率特性。

由方程式 (5-2-9)，采用变分法原理可得到 $\bar{\epsilon}^2$ 达到最小时， $k(\tau)$ 所需满足的充要条件为：

$$\Psi(t+T) = \int_0^{\infty} k(\tau) \Phi(t-\tau) d\tau \quad \text{当 } t \geq 0 \quad (5-2-11)$$

方程式 (5-2-11)，称为维纳——何甫方程。在维纳推得了上述方程 (5-2-11) 之后，所谓维纳最佳滤波问题，就是怎样由方程 (5-2-11) 求得系统的最佳脉冲过渡函数的问题。

在维纳以后，有人采用复变函数的方法，求得了维纳——何甫方程