抗大政治文化教育叢書之一

中學算術課本

第二冊

彭慶昭　吳植楷
王啟淳　林伯澧　合編

抗大政治文化教育科研究室編輯
抗大教材編審委員會審定

Suanshu Koben

中學算術　第三分冊　目錄

第四章　整數的因數與倍數

第一節　因數與倍數的性質

第二節　最大公因數與最小公倍數

第五章　分　數

第一節　分數的基礎及變形

第二節　分數四則

第四章　整數的因數與倍數

第一節　因數與倍數的性質

一二一　因數與倍數　設甲乙兩數，甲數能整除乙數（即除得的商爲整數而無餘數），則甲數稱爲乙數的因數，乙數稱爲甲數的倍數。由此可知，任意二數，設其一數爲他數的因數，則他數必爲此數的倍數，反之亦然。例如3爲15的因數，則15必爲3的倍數；24爲8的倍數，則8必爲24的因數。此外，任何一數皆爲其本身的因數和倍數，任何一數除本身外，尙有1爲它的因數。

註一：本章所講的數，凡未另加說明的皆係指整數而言。

註二：一般算術書中，當稱3能整除15時，則謂3爲15的約數，當稱3與5相乘得15時，則謂3爲15的因數，然亦有統稱約數或因數而不加以區分的。

一二二　倍數檢察法（其一）　檢察某數是否爲另一數的倍數的方法，叫做倍數檢察法。例如檢察128是否爲4的倍數的方法等（當檢察某數是否爲另一數的倍數時，同時也就是檢察另一數是否爲此數的因數，因此，這種方法也可叫做因數檢察法）。

（1）2和5的倍數　一個數右端有0的必是10的倍數，所以，

這個數既是2的倍數，又是5的倍數。

一個大於10的數，若其右端不是0，那末這個數必是10的倍數和一個個位數字集合而成，所以倘若這個個位數字是2或5的倍數，那末全數亦必是2或5的倍數。

例如：38146＝38140＋6＝一個10的倍數＋6

38145＝38140＋5＝一個10的倍數＋5

故 38146是2的倍數，38145是5的倍數。

凡是2的倍數的數都叫做「偶數」，凡不是2的倍數的數都叫做「奇數」。因此，凡個位是2.4.6.8.0的都是偶數；凡個位是1.3.5.7.9的都是奇數。

（2）4和25的倍數　一個數右端有兩個0的，必是100的倍數，所以這個數既是4的倍數，又是25的倍數。

一個比100大的數，若其右端沒有兩個0，那末這個數必由100的倍數和一個兩位數（或一位數）集合而成，所以倘若這個兩位數是4或25的倍數（或一位數是4的倍數），那末全數也必是4或25的倍數。

例如：34736＝34700＋36＝一個100的倍數＋36

34775＝34700＋75＝一個100的倍數＋75

故 34736是4的倍數，34775是25的倍數。

（3）8和125的倍數　一個數右端有三個0的必是1000的倍數，所以這個數既是8的倍數，又是125的倍數。

一個比1000大的數，若其右端不是三個0，那末這個數必由1000的倍數和一個三位數（或一二位數）集合而成，所以倘若這個三位數是8或125的倍數（或一位數二位數是8的倍數），那末全數也必

是8或125的倍數。

例如：　43136和43056都是8的倍數
　　　43625和43500都是125的倍數

習　題　一

一、寫出下列各數的三個因數和三個倍數來。

36。　54。　78。　95。

二、下列各數那些是奇數，那些是偶數？

215。280。314。27。80285。36534。80275。4289。362。28795。

三、下列各數，那些是4、8、5、25、125的倍數？

2625。4836。5560。2345。8928。2375。

四、試說明一數的最右二位數若不是4或25的倍數，則該數必不能被4或25除盡，其所得餘數也就是以4或25除該數最右二位數的餘數。

一二三　倍數檢察法（其二）

（4）9之倍數　一數的各位數字相加的和若爲9的倍數，則此數必爲9的倍數。例如：3186一數中各位數字的和是3＋1＋8＋6＝18，爲9的倍數，則3186必爲9的倍數，茲說明其理由如下：

$$3000=3\times1000=3\times(999+1)=9\text{的倍數}+3$$
$$100=99+1=\qquad 9\text{的倍數}+1$$
$$80=8\times10=8\times(9+1)=\qquad 9\text{的倍數}+8$$
$$6=\qquad 6$$

所以，兩邊相加得 $3186 = 9$ 的倍數 $+3+1+8+6$

由此可知，若 $3+1+8+6$ 的和爲 9 的倍數，則 3186 亦必爲 9 的倍數，也就是說，若一數各位數字的和是 9 的倍數，則此數亦必是 9 之倍數。

（5）3的倍數　一數的各位數字的和若爲 3 的倍數，則此數亦必爲 3 的倍數。例如：2586 之各位數字的和爲 $2+5+8+6=21$，是 3 的倍數，則 2586 亦必爲 3 的倍數。

由（4）項可知，任一數必等於「9之倍數＋各位數字之和」。

如：　$2586 = 9$ 之倍數 $+(2+5+8+6)$

但 9 是 3 的倍數。故 $2586 = 3$ 之倍數 $+(2+5+8+6)$

由此可知，若「$2+5+8+6$」爲 3 之倍數，則 2586 必爲 3 之倍數。

（6）11的倍數　把一數的奇位數字（個，百，萬……等位）的和與偶位數字（十，千，十萬……等位）的和相減，若其差爲 0 或 11 的倍數，則該數必爲 11 的倍數。

例如：

15（奇位數字的和）

8679　　$15-15=0$

15（偶位數字的和）

8679的奇位數字9與6的和爲15，偶位數字7與8的和亦爲15，$15-15=0$，故知8679必爲11的倍數。

又如：

3（偶位數字的和）

81829　　$25-3=22$（11的倍數）

25（奇位數字的和）

81829的奇位數字9，8，8的和爲25，偶位數字2，1的和爲3，$25-3=22$，爲11的倍數，故81829必爲11的倍數。

其理由如下（此理較深，可不必講授）：

$$81829=9+20+800+1000+80000$$

但 $20=2\times10=2\times(11-1)=11$的倍數$-2$

$800=8\times100=8\times(99+1)=11$的倍數$+8$

$1000=999-1=11$的倍數-1

$80000=8\times10000=8\times(9999+1)$

$=11$的倍數$+8$

所以$81829=9+(11$的倍數$-2)+(11$的倍數$+8)$

$+(11$的倍數$-1)+(11$的倍數$+8)$

$=11$的倍數$+9-2+8-1+8=11$的倍數

$+(9+8+8)-(2+1)$

故若$(9+8+8)-(2+1)$為11的倍數，則81829亦必為11的倍數。

習題二

一、試指出下列各數那些是3的倍數，9的倍數，4的倍數和5的倍數？

8709. 23415. 89925. 2934. 86004.
751680. 382545. 951273. 286290.
745131. 837066.

二、下列各數那些是9的倍數，那些不是9的倍數，不是9的倍數的各數以9除之，其餘數是多少？

80594。82368。97650。790653。
248760。876424。

三、下列各數那些是3的倍數，那些不是3的倍數，不是3的倍數的各數以3除之，其餘數是多少？

863482。96852937。98903568。
79654312。

四、試於下列各數中指出9．11或25的倍數。

8657。82764。7975。8645。2761。
76450。49302。

五、下列各數中，那些可以被11整除，那些可以被9整除，那些可以被11和9同時整除，那末它們是否可以被99整除？能言其故否？

六、試修改下列各數的一個數字而使它成爲11的倍數。

52645。87229。86026。86248。
96630。89399。

一二四　質數與非質數（或稱複數）

凡數除1及本身以外，沒有別的因數的都叫做質數。例如2．3．5．7．11．13．17等都是。凡數除1及本身以外，還有別的因數的都叫做非質數（或稱複數）。例如6．15．27．36等都是。

一二五　質數表

在以後的計算中，需知某數是否爲質數的時候很多，茲列舉1至100間的質數於下表，以備查閱：

1	2	3	5	7	11	13	17
19	23	29	31	37	41	43	47
53	59	61	67	71	73	79	83
89	97						

（註）質數表的製法亦簡單，茲敍述於下，以供參考：

（1）將1至某數（100，500，1000，5000……等）的整數，順次排列。

（2）自2起每隔一數劃掉一數。

（3）自3起每隔二數劃掉一數。

（4）自5起每隔四數劃掉一數。

（5）自7起每隔六數劃掉一數。

（6）自11起每隔十數劃掉一數。

……………

總之是從連續各質數起，每逢該質數的倍數即劃掉，如此所剩餘之數就是質數。

一二六　質數檢驗法

含有2.3.5.11等因數的數，極易看出為非質數，至於不含此等因數的數，欲知它是質數或是非質數，可從2起以連續的各質數逐次除之，如能被某質數除盡，即知它是非質數，如每次都除不盡，直至所得的商已經小於除數而仍除不盡時，即可不必再試，該數必是質數。

例1：問：1633是否為質數？

解：以7.13.17………等質數逐次除1633；以7除之得商233餘2；以13除之得商125餘8，以17除之得商96餘1；以19除之得商85餘18；以23除之得商71無餘數，故知1633為非質數。

例2：問：1613是否爲質數？

解：仍依上例逐次除之；7除之商230餘3；13除之商124餘1；17除之商94餘15；19除之商84餘17；23除之商70餘3；29除之商55餘18；31除之商52餘1；37除之商43餘22；41除之商39餘14。此時商已小於除數而仍不能除盡，可知1613必爲質數，其理由亦甚爲明顯，假使1613有較41更大的因數，則所得的商必較39更小，且亦爲1613的因數；但是較39更小的各質數已經一一試過，皆不能除盡，因此可知1613必不能有較41更大的因數，也就是必爲質數無疑。

習 題 三

一、試指出下列各數中那些是質數？那些是非質數？

15. 21. 33. 49. 47. 85. 29. 37. 51
87. 93. 91. 31. 83. 67. 73. 89. 63

二、一質數的因數有幾個？一非質數的因數最少有幾個？

三、試檢驗下列各數是否是質數？

269. 737. 907. 679.
1013. 4591. 3019. 917. 2039.

四、學生437人，排成若干列，每列人數相等，問有幾種排法？

一二七 質因數 一數的因數而爲質數的稱爲質因數。例如2.3.6.12，皆爲12的因數。2和3則爲12的質因數，而6及12則非質因數。

一二八　質因數分解　把一個非質數化爲若干質因數連乘的積，稱爲質因數分解。或簡稱爲因數分解。

當分解某數爲質因數時，可先用目視檢察方法，分解出它所含的2、3、5、7、11等質因數；如這些質因數析出後，此數還沒有分解完畢，或根本不含此等質因數時，那末，就可由各質數挨次一一來試除，直至完全分解爲質因數爲止。

例1：試分解54之因數。

解：

$$\begin{array}{r|l} 2 & 54 \\ \hline 3 & 27 \\ \hline 3 & 9 \\ \hline & 3 \end{array} \qquad 54=2\times3\times3\times3$$

例2：分解693之因數。

解：

$$\begin{array}{r|l} 3 & 693 \\ \hline 3 & 231 \\ \hline 7 & 77 \\ \hline & 11 \end{array} \qquad 693=3\times3\times7\times11$$

例3：分解132158的因數。

$$\begin{array}{r|l}
2 & 132158 \\ \hline
13 & 66079 \\ \hline
13 & 5083 \\ \hline
17 & 391 \\ \hline
 & 23
\end{array}$$

解：由觀察分解出質因數2後，所得商66079已不能再用觀察法分解，乃以13試除，恰能除盡，得商5083，再以13試除，又恰除盡，得商391，再以13試除時，有餘數，改以17試除，得商23，亦爲一質因數，因此，132158的因數分解如下式：

$$132158 = 2 \times 13 \times 13 \times 17 \times 23$$
$$= 2 \times 13^2 \times 17 \times 23$$

一二九　一數的質因數與其他因數的關係　一數的質因數只有一組，該數的其他因數都可以其質因數的部份乘積來表示，同時質因數中任意幾數的積亦皆爲該數的因數，因此，由一數的質因數連乘式，可以求得該數的一切因數。例如：60的質因數連乘式爲$60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$，60的其他一切因數可如下求出$2 \times 2 = 4$，$2 \times 3 = 6$，$2 \times 5 = 10$，$3 \times 5 = 15$，$2 \times 2 \times 3 = 12$，$2 \times 2 \times 5 = 20$，$2 \times 3 \times 5 = 30$，$2 \times 2 \times 3 \times 5 = 60$，於是可知除質因數外，60的其他因數爲4.6.10.15.12.20.30.60.

習　題　四

分解下列各數的質因數：

1. 56.	2. 108.	3. 216.
4. 315.	5. 144.	6. 225.
7. 4928.	8. 8712.	9. 5544.

10. 2376. 11. 289. 12. 1792.
13. 721. 14. 661. 15. 3857.
16. 16443.

試在下列各數中指出含有因數25.30.33.36.45的數：

17. 275. 18. 8151. 19. 2820.
20. 172[illegible]. 21. 1485. 22. 825.
23. 1620. 24. 12325.

第二節　最大公因數與最小公倍數

一三〇　公因數　某數同時爲甲乙兩數及多數的因數時，則該數即稱爲甲乙兩數或多數的公因數。例如：4同時爲12及16的因數，4即稱爲12與16的公因數；6同時爲24.36.48及54等各數之因數，6即稱爲24.36.48及54之公因數。

一三一　互質數　兩數間，除了1以外沒有公因數的，叫做「互質數」。例如：15與8，6與35都是互質數。

一組數中的任何兩個數都是互質數的，則此一組數爲互質數。例如：16.21.11三數，14.15.13.71四數都是互質數。

一個數，如能被許多個互質數整除，那末，它必能被這許多個互質數相乘的積整除。例如：240能被互質數3.4.5整除，因此牠也能被$3\times4\times5=60$整除。

一三二　最大公因數　兩數或多個數的公因數可以不止一個，其中最大的即稱爲該兩數或多個數的最大公因數。例如：36.54

72的公因數有2.4.6.9.12.18等幾個，18爲其中最大的，則18即爲36.54.72三數的最大公因數。G.C.F.是代表最大公因數的符號。

一三三　最大公因數求法（一）

（1）分解因數法　先用分解因數的方法分別將各數化成質因數連乘式，然後取各連乘式中公有的次數最低的質因數相乘，其積即爲該組數的最大公因數，

例1：求168.252兩數之最大公因數。

解：用分解因數法分解168及252的質因數。

$$168=2\times2\times2\times3\times7=2^3\times3\times7$$

$$252=2\times2\times3\times3\times7=2^2\times3^2\times7$$

故168.252之最大公因數爲：$2^2\times3\times7=84$

例2：求36.60.96三數的最大公因數。

解：分解36.60.96的質因數：

$$36=2\times2\times3\times3=2^2\times3^2$$

$$60=2\times2\times3\times5=2^2\times3\times5$$

$$96=2\times2\times2\times2\times2\times3=2^5\times3$$

故36.60.96的最大公因數爲$2^2\times3=12$

（2）檢驗公因數法　若各數間公有的因數易於看出時，可以其公因數除各數，所得的再以公因數去除，直到所得的商無公因數時爲止，此各除數的乘積即爲最大公因數。

例：求24.36.60之最大公因數。

解：

$$\begin{array}{r|rrr} 2 & 24. & 36. & 60 \\ \hline 2 & 12 & 18 & 30 \\ \hline 3 & 6 & 9 & 15 \\ \hline & 2 & 3 & 5 \end{array}$$

∴24，36，60之最大公因數爲$2\times2\times3=12$

注意：大小二數，若小數可以整除大數，則小數即爲此二數的最大公因數。

習　題　五

一、下列各組數中，那幾組是互質數，那幾組有公因數，其最大公因數是多少？

(1)	56.16.	(2)	24.35.
(3)	33.15.25.	(4)	39.13.
(5)	11.22.55	(6)	19.23.28.

二、用分解因數法求下列各組數的公因數和最大公因數。

(7)	36.84.	(8)	4.6.10.
(9)	54.102.	(10)	14.98.42.
(11)	30.18.54.	(12)	6.80.112.

三、用檢驗公因數法求下列各組數的最大公因數。

（13） 45.60.　　　（14） 231.385.
（15） 48.72.120.　　（16） 51.85.119.
（17） 192.5760.　　（18） 24.60.84.128.
（19） 216.144.54.126.
（20） 192.576.1760.

一三四　最大公因數求法（二）

若甲數分解因數較爲繁雜時，其最大公因數可用輾轉相除法求出，其法是：先以小數除大數，若無餘數，則小數即爲二數的最大公因數，若有餘數，則以餘數除前的除數，如此遞以餘數除前之餘數，直到除盡而無餘數時爲止，此最後的除數即爲二數的最大公因數。

例：求429.1848之最大公因數。

```
429)1848(4
    1716
    ----
     132)429(3        最大公因數即33
         396
         ---
          33)132(4
             132
             ---
               0
```

註：此法的理由說明如下，以供參攷：

設甲數爲除數與被除數的公因數，則甲數亦必爲（除數×商）的因數，然餘數＝被除數－（除數×商），故甲數亦必爲餘數的因數。同時設乙數爲除數與餘數的公因數，則乙數亦必爲（除數×商數）的因數，然被除數＝（除數×商）＋餘數，故乙數必爲被除數的因數。由此可知，凡除數與被除數的公因數，皆爲餘數與除數的公因數，而餘數與除數的公因數，亦皆爲被除數的因數。故知除數與被除數的最大公