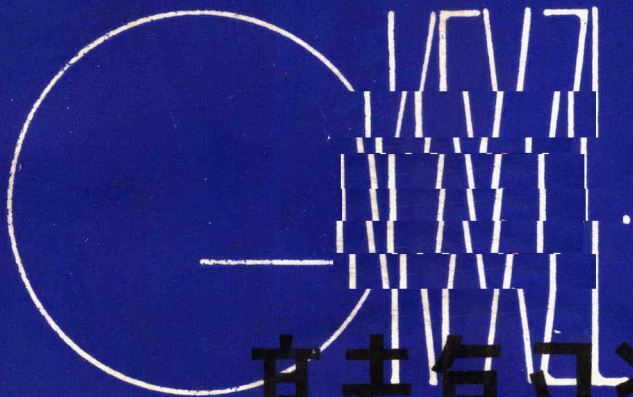


SHANGHAI RENMIN CHUBANSHE



复习资料



数 学

江西人民教育出版社

高 考 复 习 资 料

数 学

江 西 人 民 出 版 社

一九八〇·九·南昌

高 考 复 习 资 料
数 学

江西人民出版社出版
(南昌百花洲3号)

江西省新华书店发行 江西新华印刷厂印刷

开本 787×1092 $\frac{1}{32}$ 印张 22.375

1981年4月第1版 1981年4月江西第1次印刷

印数: 1—80,000

统一书号: 7110·287

定价: 1.78元

说 明

为了帮助应届高中毕业生和具有高中文化程度的广大青年系统复习中学有关学科的基础知识，我们根据教育部制订的全日制十年制学校中学各科教学大纲和教材，编写了这套高考复习资料。

这套复习资料，包括《政治》、《语文》、《数学》、《物理》、《化学》、《生物》、《历史》、《地理》、《英语》等九个学科。

在编写过程中，吸收了近几年我们两个单位各自编写复习资料的经验和成果，并参考了其它有关材料。在内容的要求上，重视对基础知识的全面、系统复习，并注意加强运用基础知识分析问题、解决问题的能力训练。

参加《数学》编写的有（按姓氏笔划为序）：许鸿厥、许国刚、林仁逊、杭祖茂、章立、陶运文、彭声铭、湛瑞生、饶文华、熊大桢。

由于我们水平有限，经验不足，书中难免出现一些缺点、错误，敬希读者批评指正。

江西省教育厅教学教材研究室

江西人民出版社文教室

一九八〇年十月

目 录

代 数

第一章	数	(1)
一	实数	(1)
二	复数	(9)
第二章	代数式	(28)
一	代数式	(28)
二	整式	(28)
三	分式	(31)
四	根式	(32)
第三章	因式分解	(54)
第四章	方程与方程组	(65)
一	方程	(65)
二	行列式与方程组	(85)
第五章	不等式	(111)
一	不等式及其性质	(111)
二	不等式的解法	(112)
第六章	指数与对数	(131)
一	指数	(131)
二	对数	(132)
三	常用对数	(133)
四	指数方程和对数方程	(134)
第七章	函数	(148)

一	集合的概念	(148)
二	函数的概念	(149)
三	几种函数的图象和性质	(151)
第八章	数列和极限	(175)
一	数列	(175)
二	极限	(177)
第九章	排列、组合和二项式定理	(196)
一	排列、组合	(196)
二	数学归纳法	(198)
三	二项式定理	(198)

平 面 几 何

第一部分	基础知识	(213)
第一章	直线	(213)
一	相交线	(213)
二	平行线	(215)
第二章	多边形	(217)
一	三角形	(217)
二	四边形	(221)
三	多边形	(224)
第三章	圆	(225)
一	圆的基本概念	(225)
二	圆与直线的关系	(226)
三	圆与圆的关系	(229)
四	圆与三角形的关系	(230)

五	圆与多边形的关系	(231)
六	有关圆的计算公式	(233)
第二部分	例题与复习题	(235)
一	证明	(235)
二	计算	(292)
三	轨迹与作图	(302)

立 体 几 何

第一章	直线和平面	(315)
一	平面的基本性质	(315)
二	直线、平面间的位置关系	(316)
三	两直线平行、垂直的定理	(319)
四	直线和平面平行、垂直的定理	(321)
五	两平面平行、垂直的定理	(323)
六	等量定理	(325)
第二章	多面体	(337)
一	棱柱、棱锥和棱台的概念	(337)
二	棱柱、棱锥和棱台的表面积和体积	(341)
第三章	旋转体	(353)
一	圆柱、圆锥、圆台和球的概念	(353)
二	圆柱、圆锥、圆台和球的表面积与体积	(358)

三 角

第一章	任意角的三角函数	(370)
-----	----------	-------

一	角和角的度量	(370)
二	三角函数的定义	(371)
三	同角三角函数间的关系	(373)
四	诱导公式	(374)
五	三角函数的图象和性质	(376)
第二章	复角三角函数	(393)
一	和角、差角、倍角、半角的三角函数	(393)
二	积化和差与和差化积	(394)
第三章	反三角函数与简单的三角方程	(417)
一	反三角函数	(417)
二	简单的三角方程	(419)
第四章	解三角形	(438)
一	三角形的边角关系与三角形的解法	(438)
二	解三角形的应用	(438)

平面解析几何

第一章	曲线与方程	(454)
一	平面直角坐标系	(454)
二	曲线与方程	(456)
第二章	直线	(467)
第三章	二次曲线	(489)
一	圆	(489)
二	椭圆	(493)
三	双曲线	(494)
四	抛物线	(496)

五	二次曲线的切线、法线.....	(497)
第四章	坐标变换和二元二次方程的讨论.....	(537)
一	坐标变换.....	(537)
二	二元二次方程的讨论.....	(539)
三	二元二次方程的化简.....	(541)
第五章	极坐标.....	(558)
第六章	参数方程.....	(576)

综合题及解答

综合题及解答.....	(599)
-------------	-------

答 案

答案.....	(683)
---------	-------

代 数

第一章 数

一 实 数

1.1 自然数

表示物体个数的 1, 2, 3, …… 的每一个数, 都叫做自然数。

1. 性质

(1) 自然数是无限多的; 它有最小的数 1, 没有最大的数;

(2) 任意两个自然数可以比较它们的大小, 即自然数是有顺序的;

(3) 在自然数集合中永远可施行加、乘、乘方运算。

2. 合数的质因数分解

(1) 质数和合数: 在自然数里除了单位 1 以外, 其他只能被 1 和本身整除的数叫做质数 (或素数); 不但能被 1 和本身整除, 还能被其他的数整除的数叫做合数。1 既不是质数, 也不是合数。

(2) 因数和质因数: 乘数和被乘数都叫做积的因数; 一个合数的质数因数叫做这个合数的质因数。

(3) 分解质因数: 把一个合数表示成质因数连乘积的形式, 叫做这个合数的质因数分解。质因数中如有相同的数, 应

把它写成乘方的形式。

3. 最大公约数和最小公倍数

(1) 约数、公约数、最大公约数、互质数：能够整除某一个数的数叫做这个数的约数；几个数所公有的约数叫做这几个数的公约数；几个数的公约数里最大的一个叫做这几个数的最大公约数；如果两个数的最大公约数是1，这两个数叫做互质数。

(2) 求最大公约数的法则：求几个数的最大公约数，先把这些数分别分解质因数，并且写成乘方的形式，然后在各个数公有的每一种质因数里，取出指数最小的乘方相乘。

(3) 倍数、公倍数、最小公倍数：能够被某一个数整除的数叫做这个数的倍数；几个数所公有的倍数，叫做这几个数的公倍数；公倍数里最小的一个（除0以外）叫做这几个数的最小公倍数。

(4) 求最小公倍数的法则：求几个数的最小公倍数，先把它们分别分解质因数，并且写成乘方的形式，然后从各个数所有的每一种质因数里，取出指数最大的乘方相乘。

1.2 整 数

正整数（自然数）、零、负整数总称为整数。

整数中，能被2整除的称为偶数，其余的称为奇数。若 n 为整数，则 $2n$ 是偶数， $2n+1$ 是奇数。

性质：

- (1) 在整数集合中没有最小的数，也没有最大的数；
- (2) 在整数集合中任意两个数可以比较它们的大小；
- (3) 在整数集合中永远可施行加、减、乘、乘方四种运算。

1.3 有理数

整数和分数总称为有理数。

每一个有理数都可以表示为既约分数 $\frac{n}{m}$ 的形式，其中 m 、 n 为互质的整数，且 $m \neq 0$ 。

每一个既约分数都可以化为有限小数或无限循环小数；反之，每一个有限小数或无限循环小数也可以化为既约分数。例如：

$$0.\dot{1}2 = \frac{12}{99} = \frac{4}{33}, \quad 0.45\dot{2}1 = \frac{4521 - 45}{9900} = \frac{373}{825}.$$

性质：

- (1) 在有理数集合中没有最小的数，也没有最大的数；
- (2) 在有理数集合中任意两个数可以比较它们的大小；
- (3) 在有理数集合中，永远可以施行加、减、乘、除（除数不为零）、乘方五种运算。

1.4 实数

1. 无理数：无限不循环小数叫做无理数。

2. 实数：有理数和无理数总称为实数。

3. 数轴：规定了原点、正方向和长度单位的直线叫做数轴。

4. 实数的性质

- (1) 在实数集合中没有最小的数，也没有最大的数；
- (2) 实数与数轴上的点一一对应，即任意一个实数都有数轴上确定的一个点与它对应；反过来，数轴上的任意一个点，也都有确定的一个实数与它对应；
- (3) 在实数集合中任意两个数，可以比较它们的大小。

轴上的点越往右，它所表示的数就越大。也就是：正数大于零和负数；负数小于零；两个正数，绝对值大的较大；两个负数，绝对值大的反而小。

5. 相反数：在数轴上原点的两旁，离开原点距离相等的两点所表示的两个数，叫做互为相反的数。零的相反数是零。

例如 $2\frac{1}{2}$ 和 $-2\frac{1}{2}$ ； $\sqrt{3}$ 和 $-\sqrt{3}$ 是互为相反的数。

6. 实数的绝对值

$$|a| = \begin{cases} a & (\text{当 } a > 0 \text{ 时}); \\ 0 & (\text{当 } a = 0 \text{ 时}); \\ -a & (\text{当 } a < 0 \text{ 时}). \end{cases}$$

$|a|$ 表示在数轴上实数 a 的对应点至原点的距离。

7. 实数的运算定律

(1) 交换律： $a + b = b + a$ ；

$$ab = ba.$$

(2) 结合律： $(a + b) + c = a + (b + c)$ ；

$$(ab)c = a(bc).$$

(3) 乘法对加法的分配律： $a(b + c) = ab + ac$ 。

在运算顺序上，应先算乘方、开方；再算乘除；最后算加、减。如果有括号，就先算括号里的数。在同一级运算中，按照从左到右的顺序运算。

8. 近似数和有效数字

与准确数相差在某一指定数值范围内的数，叫做这个数精确到这个指定范围的近似数。一般地，一个近似数，四舍五入到哪一位，就说这个近似数精确到哪一位。这时，从左边第一个不是零的数字起，到这一位数字止，所有的数字，都叫做这个数的有效数字。

例1 计算:

$$-12 \div (-1)^{2n+1} + 0^n \div 147\sqrt{2} - |2^4 - (-29) \times (-2)| \\ \times (3^2 - 2^3) (n \text{ 是自然数}).$$

解: 原式 $= -12 \div (-1) + 0 - |16 - 58| \times (9 - 8)$
 $= 12 - 42 = -30.$

注: n 为自然数时, $(-1)^{2n} = 1$, $(-1)^{2n+1} = -1$, $1^n = 1$, $0^n = 0$.

例2 计算:

$$\left[-2^2 - \left(-\frac{2}{3} \right)^2 \times (-1)^7 \times 3^2 \right]^3 - \{ -0.5 + 13.5 \div (-3)^8 \}^2.$$

解: 原式 $= \left[-4 - \frac{4}{9} \times (-9) \right]^3 - \left[-\frac{1}{2} + \frac{27}{2} \times \left(-\frac{1}{27} \right) \right]^2$
 $= (-4 + 4)^3 - \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right)^2$
 $= 0 - 1 = -1.$

注: 在有理数运算的问题中, 如果既有分数又有小数, 一般将小数化为分数, 计算较简便. 下面的换算必须熟记:

$$0.5 = \frac{1}{2}, \quad 0.25 = \frac{1}{4}, \quad 0.75 = \frac{3}{4}, \quad 0.125 = \frac{1}{8}.$$

例3 求证 $\sqrt{2}$ 不是有理数.

证明: 假设 $\sqrt{2}$ 是有理数, 则 $\sqrt{2}$ 必定可以表示为 $\frac{n}{m}$ (m , n 是互质的整数, 且 $m \neq 0$) 的形式.

由 $\sqrt{2} = \frac{n}{m}$ 两边平方得 $2 = \frac{n^2}{m^2}$,

$$\therefore n^2 = 2m^2. \quad (1)$$

可知 n^2 是偶数, n 必定是偶数. 令 $n = 2k$ (k 是整数) 代入

(1) 得 $(2k)^2 = 2m^2$,

$$\therefore m^2 = 2k^2.$$

可知 m^2 是偶数, m 必定是偶数.

m 、 n 都是偶数就有公约数 2, 与假设矛盾, 因此 $\sqrt{2}$ 不是有理数.

注: 本题使用的方法是反证法. 一般地, 证明用根式或对数式表示的数是无理数时, 可以采用反证法.

例 4 证明二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 中, a 、 b 、 c 都是奇数时, 方程没有整数根.

证明: 如果 x 为奇数, 因为 a 、 b 、 c 是奇数, 则

$$ax^2 + bx + c = \text{奇数} + \text{奇数} + \text{奇数} \neq 0.$$

所以方程无奇数根,

如果 x 为偶数, 因为 a 、 b 、 c 是奇数, 则

$$ax^2 + bx + c = \text{偶数} + \text{偶数} + \text{奇数} \neq 0,$$

所以方程无偶数根.

因此方程无整数根.

注: 本例采用的也是反证法, 并且抓住数的特性进行论证.

例 5 比较 $|a|$ 和 $-2a$ 的大小.

答: 若 $a > 0$, 则 $|a| > -2a$;

若 $a = 0$, 则 $|a| = -2a$;

若 $a < 0$, 则 $|a| < -2a$.

注: 要比较带绝对值符号的两个代数式的值的大小, 必须根据绝对值概念, 区分情况加以讨论.

例 6 求 $x^2 - y^2 = 35$ 的正整数解.

解: $\because x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$,

$$35 = 1 \times 35 = 5 \times 7,$$

$\therefore$ 解原方程可化为解下列方程组:

$$(1) \begin{cases} x + y = 35, \\ x - y = 1. \end{cases} \quad \text{解之, 得} \begin{cases} x = 18, \\ y = 17. \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x + y = 7, \\ x - y = 5. \end{cases} \quad \text{解之, 得} \begin{cases} x = 6, \\ y = 1. \end{cases}$$

注：如果本题改为求整数解，就有八组解。

例 7 求证：任意一个三位正整数与它的各位数字之和的差一定是 9 的倍数。

证明：设三位正整数的各位数字依序为 a 、 b 、 c ，则该三位正整数可以写成

$$100a + 10b + c.$$

因为它与各数字之和的差为：

$$\begin{aligned} & 100a + 10b + c - (a + b + c) \\ &= 99a + 9b = 9(11a + b), \end{aligned}$$

所以它是 9 的倍数。

注：三位数字依序为 a, b, c 的三位整数不能写成 abc ，而应写成 $100a + 10b + c$ 。一般地，各位数字依序为 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 的 n 位整数通常写成 $a_1 \times 10^{n-1} + a_2 \times 10^{n-2} + \dots + a_{n-1} \times 10 + a_n$ 。

本题的结论可以推广到对任意位数的正整数都成立。

例 8 设 n 是整数，试证： $n^3 + \frac{3}{2}n^2 + \frac{n}{2} - 1$ 也是整数，

并且用 3 除时余 2。

$$\begin{aligned} \text{证明：} & n^3 + \frac{3}{2}n^2 + \frac{n}{2} - 1 \\ &= n^3 + n^2 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n - 1 \\ &= n^2(n+1) + \frac{1}{2}n(n+1) - 1. \end{aligned}$$

因为 n 是整数，所以 $n^2(n+1)$ 是整数；又因为 n 、 $(n+1)$ 是连续的两个整数，所以 $\frac{1}{2}n(n+1)$ 必定是整数，

$\therefore n^3 + \frac{3}{2}n^2 + \frac{n}{2} - 1$ 也是整数。

又

$$\begin{aligned} & n^3 + \frac{3}{2}n^2 + \frac{n}{2} - 1 \\ &= n^2(n+1) + \frac{1}{2}n(n+1) - 3 + 2 \\ &= \frac{1}{2}n(n+1)(2n+1) - 3 + 2 \\ &= \frac{1}{2}n(n+1)[(n+2) + (n-1)] - 3 + 2 \\ &= \frac{n(n+1)(n+2)}{2} + \frac{(n-1)n(n+1)}{2} - 3 + 2. \end{aligned}$$

$\therefore n(n+1)(n+2)$ 和 $(n-1)n(n+1)$ 都是三个连续整数的积，也就都能被 6 整除，

$$\therefore \frac{n(n+1)(n+2)}{2} + \frac{(n-1)n(n+1)}{2} - 3 \text{ 能被 } 3 \text{ 整除，}$$

$$\therefore n^3 + \frac{3}{2}n^2 + \frac{n}{2} - 1 \text{ 被 } 3 \text{ 除时余 } 2.$$

注：两个连续整数中，必有一个能被 2 整除，它们的积能被 2 整除；三个连续整数中，必有一个数能被 3 整除，它们的积能被 $2 \cdot 3$ 整除；四个连续整数中，必有一个数能被 4 整除，它们的积能被 $2 \cdot 3 \cdot 4$ 整除；……

例 9 任给五个正整数，证明必能从其中选出三个，使得它们的和能被 3 整除。

证明：因为任一正整数被 3 除，余数只可能是 0、1、2 中的一个。在五个正整数被 3 除后所得的五个余数中，如 0、1、2 都出现，则余数为 0、1、2 的三个数的和一定能被 3 整除。

如果五个余数中，只出现 0、1、2 中的两个或一个，则其中必有一个余数至少出现三次，那么余数相同的三个数的和