

高等混合算學

上 卷

美國梧茲 巴雷原著

長沙易俊元譯述

江苏工业学院图书馆
藏 书 章

商務印書館發行

A COURSE IN MATHEMATICS

VOLUME I

By

WOODS AND BAILEY

Translated by

I TSÜN YÜAN

1st ed., Dec., 1925

2d ed., Oct., 1926

Price: \$2.80, postage extra

THE COMMERCIAL PRESS, LIMITED

SHANGHAI, CHINA

ALL RIGHTS RESERVED

中華民國十四年十二月初版

（高等混合算學二冊）

（上卷定價大洋貳元捌角）

（外埠酌加運費滙費）

原 著 者

美 國 巴 梧

雷 茲

譯 述 者

長 沙 易 俊

元

發 行 者

商 務 印 書 館

印 刷 所

上 海 北 河 南 路 北 首 寶 山 路

總 發 行 所

上 海 棋 盤 街 中 市

分 售 處

商 務 印 書 館

北 京 天 津 保 定 泰 安 濟 南 開 封 西 安 蘭 州 蘇 州 寧 波 溫 州 嘉 興 紹 興 上 海 漢 口 長 沙 衡 州 重 慶 廣 州 雲 南 貴 陽 張 家 口 新 加 坡

※此書有著作權翻印必究※

例 言

一、本書原著者爲美國麻省理工大學算學教授梧茲(Woods)巴雷(Bailey)二氏。係取高等代數解析幾何微積分微分方程式數種混合編成。其編制惟取貫串。不限畛域。爲最近算學界中不可多得之作。至於圖例宏富。述理明顯。尤合於大多數學者之心理。

一、本書分上下兩卷。上卷爲高等代數平面解析幾何及微分。下卷爲積分立體解析幾何及微分方程式。惟亦無截然之界限可尋。一依學者之程度及教材之關係而定。大概上卷可分爲六段。(1)消去法及行列式(2)函數之圖解。(3)代數多項式。(4)代數多項式之通論。(5)超越函數。(6)曲綫之通徑表示極坐標曲率。下卷約可分爲三段。(1)含一變數之函數之積分法。(2)含二以上之變數之函數。(3)級數複數微分方程式。

一、原書期合於工科大學之用。故對於應用問題較他書爲詳。圖例尤多。

一、本書倉卒付梓。譯者自知難免錯誤。尙祈海內博學諸君有以教之。

一、譯者對於本書之成。得摯友郭君鍾富之襄助不少。附識於此。以致感謝。

長沙易俊元識

高等混合算學

五卷目錄

第一章 消去法

節數	頁數
1-2	行列式之記法 1
3	行列式之性質 6
4	n 個 n 元一次方程式當其未知數之係數所 成行列式之值非等於零時之解法.....12
5	n 個一次方程式含多於 n 之未知數.....16
6	n 個 n 元一次方程式當其未知數之係數所 成行列式之值爲等於零時之解法.....18
7	一次方程式之羣其方程式之數多於所含之 未知數19
8	一次調和方程式23
9	消去式26
	問題.....27

第二章 圖解

10	實數33
11	零與無窮大34

12	複數.....	35
13	一直線上諸線分之和.....	36
14—15	射影.....	37
16	坐標軸.....	39
17	兩點間之距離.....	40
18—19	共線點.....	41
20	變數及函數.....	43
21	函數之分類.....	47
22	函數之記法.....	47
	問題.....	48

第三章 一次多項式

23	圖解.....	54
24—26	一次方程式之通式.....	55
27	斜度.....	58
28	角.....	59
29	關於直線之問題.....	61
30—31	相交直線.....	64
32	點與直線之距離.....	66
33	直線之法線式.....	67
	問題.....	68

第四章 n 次多項式

34—36	二次多項式之圖形.....	74
-------	---------------	----

37	二次方程式之判定式.....	78
38	n 次多項式之圖形	79
39	由分解因數以解方程式	82
40-41	因數及根	83
42-43	方程式所含之根	85
44-45	共軛複根	88
46	若干一次及二次實數因子之乘積之圖形.....	89
47	根之位置	92
48	代加德氏之符號規律	92
49-51	有理根	94
52	無理根	98
	問題.....	100

第五章 多項式之微係數

53	極限	104
54	曲線之斜度.....	106
55	增量	108
56	連續.....	103
57	微係數	109
58	微分法之範式	110
59	切線	111
60	微係數之符號	113
61	極大與極小	115

62	第二次微係數	118
63	牛頓解數字方程式之法	122
64	方程式之重根	125
	問題	127

第六章 數種函數及其圖形

65-66	多項式之平方根	132
67	含 y^2 之方程式之函數	138
68	含分數之函數	139
69	特殊之無理函數	142
	問題	144

第七章 數種曲線及其方程式

70-72	圓	146
73-75	橢圓	151
76-78	雙曲線	154
79-80	拋物線	158
81	圓錐曲線	160
82	維尺曲線	162
83	蔓葉線	163
84	環索線	164
85	例題	165
	問題	167

第八章 相交曲線

86	通論.....	176
87-89	$f_1(x, y) = 0$ 及 $f_2(x, y) = 0$	176
90	$f_1(x, y) = 0$ 及 $f_n(x, y) = 0$	181
91	$f_m(x, y) = 0$ 及 $f_n(x, y) = 0$	183
92-93	$lf_m(x, y) + kf_n(x, y) = 0$	187
	問題.....	191

第九章 代數函數之微分法

94	極限之定理.....	195
95	微係數之定理.....	196
96	範式	200
97	u^n 之微係數	201
98	高次微係數.....	204
99	代數陰函數之微分法.....	205
100	切線.....	207
101	法線.....	208
102	極大與極小.....	209
103	變點.....	212
104	弧與弦之比之極限	214
105	微係數 $\frac{dx}{ds}$ 及 $\frac{dy}{ds}$	215
106	速度.....	217
107	分速度	219

108	加速度與力	221
109	微係數之他種說明	223
110	積分法	226
	問題	229

第十章 坐標軸之變換

111	發凡	241
112-114	變換原點而不變換軸之方向	241
115	變軸之方向而不變換原點	246
116	斜角坐標	248
117	不變換原點而由直交軸變為斜交軸	249
118	所得方程式之次數	250
	問題	250

第十一章 二次方程式之通論

119	發凡	256
120	換去 xy 項	256
121	方程式 $Ax^2 + By^2 + 2Gx + 2Fy + C = 0$	258
122	極限	260
123	行列式 $AB - H^2$	262
124	普通方程式之判定式	263
125	二次曲線之分類	264
126-127	圓錐曲線之中心	265
128	處理數字方程式之次第	267

129	經過五點之圓錐曲線方程式.....	269
130	斜角坐標	273
	問題.....	273

第十二章 切線對極線及二次曲 線之直徑

131	切線之方程式	276
132	對極線之定義及方程式	277
133	對極線之基本定理	278
134	切弦	278
135	對極線之作法	279
136	對極線之調和性質	280
137	反對極線	282
138-140	直徑之定義及方程式.....	283
141	拋物線之直徑	286
142	以一直徑及一切線爲軸之拋物線.....	287
143	橢圓及雙曲線之直徑	288
144	共軛直徑	290
145	以共軛直徑爲軸之橢圓及雙曲線.....	291
146-147	共軛直徑之性質	293
	問題.....	295

第十三章 越函數

148	定義.....	300
-----	---------	-----

149	三角函數之圖形	300
150	逆三角函數之圖形	303
151	$\frac{\sin h}{h}$ 及 $\frac{1-\cos h}{h}$ 之極限	304
152	三角函數之微分法	306
153	逆三角函數之微分法	311
154	指數函數及對數函數	314
155	e	315
156	$(1+h)^{\frac{1}{h}}$ 及 $\frac{e^h-1}{h}$ 之極限	318
157-159	指數函數及對數函數之微分法	320
160	雙曲線函數	325
161	逆雙曲線函數	327
162	越方程式	329
	問題	333

第十四章 曲線之通徑表示

163	定義	342
164	直線	342
165	圓	343
166	橢圓	343
167	擺線	345
168	次擺線	346
169	外擺線	347
170	內擺線	348

171	外次擺線及內次擺線	349
172	圓之漸伸線	352
173	時間通徑	353
174	微係數	354
175-176	軌跡問題之應用	356
	問題	364

第十五章 極坐標

177	坐標系統	372
178	螺線	374
179	康可曲線	376
180	蝸線	378
181	卡新黎卵狀曲線	379
182	直角坐標與極坐標之關係	381
183	直線	382
184	圓	383
185	以焦點爲極之圓錐曲線	384
186	例題	385
187	曲線之方向	386
188	對於弧之微係數	388
189	面積	389
	問題	390

第十六章 曲率

190	曲率之定義.....	396
191—192	曲率半徑	396
193	曲率中心之坐標	399
194	漸屈線及漸伸線	401
195	漸伸線及漸屈線之性質.....	402
196	以通徑表示曲率中心.....	404
197	以極坐標表示曲率半徑	405
	問題.....	406
	答案.....	409
	中西名詞索引.....	435

高等混合算學五卷

第一章 消去法

1. 行列式之記法 (*Determinant Notation*) 消去法爲從二元或二元以上諸方程式中,得一個或數個含未知數較少之方程式,所移去之量,名爲被其消去,凡解方程式之要義,即在於消去所有之未知數,而僅存其一,今由消去法,可導諸未知數之係數以組成某種之式,因而得一特殊之名稱及其相當之記法,此章專就一次方程式而論,在此種方程式中,均無含多於一元及高於一次之項者。

例 1.
$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1 &= 0, \\ a_2x + b_2y + c_2 &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

欲消去 y , 可先以 b_2 乘第一式,再以 $-b_1$ 乘第二式加之,如欲消去 x , 當先以 $-a_2$ 乘第一式,再以 a_1 乘第二式加之,結果爲

$$\begin{aligned} (a_1b_2 - a_2b_1)x + (c_1b_2 - c_2b_1) &= 0, \\ (a_1b_2 - a_2b_1)y + (a_1c_2 - a_2c_1) &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

除非 $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$, 方程式(2)即爲(1)之解答,惟如 $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$, 則用此法消去 y , 同時亦消去 x , 此當另行討論,見下第六節中。

例 2.
$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 &= 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 &= 0, \\ a_3x + b_3y + c_3z + d_3 &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

欲消去 y 與 z . 可先以 $(b_2c_3 - b_3c_2)$ 乘第一式. 以 $-(b_1c_3 - b_3c_1)$ 乘第二式. 以 $(b_1c_2 - b_2c_1)$ 乘第三式. 再求其和. 結果爲

$$\begin{aligned} & [a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - a_2(b_1c_3 - b_3c_1) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1)]x \\ & + [d_1(b_2c_3 - b_3c_2) - d_2(b_1c_3 - b_3c_1) + d_3(b_1c_2 - b_2c_1)] = 0, \end{aligned}$$

或 $(a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1)x$
 $+ (d_1b_2c_3 + d_2b_3c_1 + d_3b_1c_2 - d_1b_3c_2 - d_2b_1c_3 - d_3b_2c_1) = 0. \quad (2)$

欲消去 x 與 z . 可先以 $-(a_2c_3 - a_3c_2)$ 乘第一式. 以 $(a_1c_3 - a_3c_1)$ 乘第二式. 以 $-(a_1c_2 - a_2c_1)$ 乘第三式. 再求其和. 結果爲

$$\begin{aligned} & (a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1)y \\ & + (a_1d_2c_3 + a_2d_3c_1 + a_3d_1c_2 - a_1d_3c_2 - a_2d_1c_3 - a_3d_2c_1) = 0. \quad (3) \end{aligned}$$

欲消去 x 與 y . 可先以 $(a_2b_3 - a_3b_2)$ 乘第一式. 以 $-(a_1b_3 - a_3b_1)$ 乘第二式. 以 $(a_1b_2 - a_2b_1)$ 乘第三式. 再求其和. 結果爲

$$\begin{aligned} & (a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1)z \\ & + (a_1b_2d_3 + a_2b_3d_1 + a_3b_1d_2 - a_1b_3d_2 - a_2b_1d_3 - a_3b_2d_1) = 0. \quad (4) \end{aligned}$$

除 $a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1 = 0$. 則方程式 (2) (3)

(4) 即爲 (1) 之解答. 此式之例外. 亦於第六節中論之.

解例 1 所得之二項式. 名爲二次行列式. 記號如

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

即用以表示行列式 $a_1b_2 - a_2b_1$. 故例 1 之方程式可書爲

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0.$$

解例 2 所得之多項式. 名爲三次行列式. 記號如

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

即用以表示 $a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1$. 故例 2 之方程式可書為

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} z + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix} = 0.$$

由例 2 得

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

此即可用作三次行列式之定義。

同樣四次行列式以記號表之為

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}.$$

此式為等於

$$a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} - a_4 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}.$$