气 象 统 计 预 报

（上）

北京大学地球物理系

一九七三年十一月

目　录

第一章　线性代数的基础知识

在本章中，主要介绍矩阵、二次型的基本概念，并给出解线性方程组及求矩阵的特征值和特征向量的常用方法。

恩格斯教导我们："纯数学的对象是现实世界的空间形式和数量关系，所以是非常现实的材料。"气象统计预报问题就是从非常现实的大气运动的物理背景出发，利用数理统计的理论然后转化为代数问题，运用人工计算或电子计算机计算出预报结果。恩格斯继续教导："这些材料以极度抽象的形式出现，这只能在表面上掩盖它起源于外部世界的事实。但是，为了能够从纯粹的状态中研究这些形式和关系，必须使它们完全脱离自己的内容，把内容作为无关重要的东西放在一边，……"。气象统计预报问题转化为代数问题，表面上掩盖了物理背景。而研究纯粹的代数问题是为了认识其规律，更好地解决预报问题。

为了学好以后各章，首先扼要叙述一下线性代数的基础知识。

§1. 矩阵代数

1. 矩阵

对于三元线性方程组：

$$\begin{cases} x+2y+5z=-9 \\ x-y+3z=2 \\ 3x-6y-z=25 \end{cases}$$

和另一个三元线性方程组：

$$\begin{cases} 2x-y+3z=3 \\ 3x+y-5z=0 \\ 4x-y+z=3 \end{cases}$$

的解是不同的，这二组解的不同完全取决于二个方程组的左端的系数及右端的常数的不同。为此我们可以把系数和右端的常数分别列成有次序的表。对于第一个三元线性方程组的表：

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & -6 & -1 \end{pmatrix} \quad 和 \quad \begin{pmatrix} -9 \\ 2 \\ 25 \end{pmatrix}$$

对于 m 个 n 元线性方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \quad\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases} \tag{1}$$

其中 x_1，x_2，$\cdots x_n$ 为未知数；a_{ij} 表示第 i 个方程中未知数 x_j 的常系数；b_i 表示第 i 个方程的常数项（自由项）。对于解线性方程组(1)同样完全取决于左端的系数及右端的常数。其有次序的表为：

$$\begin{pmatrix} a_{11}a_{12}\cdots a_{1n} \\ a_{21}a_{22}\cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}a_{m2}\cdots a_{mn} \end{pmatrix} \quad 和 \quad \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

因此研究这种有次序的表的性质，对于求解线性方程组等是很有意义的。由此可得到矩阵的定义：

由 $m\times n$ 个数按一定次序排成含 m 行 n 列的表：

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots\cdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{2}$$

称为一个 m 行 n 列的矩阵，简记为 $A=(a_{ij})$，为了表明矩阵 A 的行数和列数也可以记为 ${}_mA_n=(a_{ij})$。注意：矩阵不是一个具体的数而是 $m\times n$ 个数按一定次序排成矩形的阵表。其中 a_{ij} 是矩阵 A 的第 i 行第 j 列的元素。

当行数与列数相等 $m=n$ 时的矩阵 A 称为 n 阶方阵，对于 n 阶方阵的 $a_{11}, a_{22}\cdots a_{nn}$ 称为主对角线元素，当主对角线元素不为零，而其他元素全为零，这样的矩阵称为对角矩阵，即：

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & 0 \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{3}$$

当主对角线元素全为 1，而其余的元素全为零的 n 个阶方阵称为 n 阶单位矩阵，记为 I_n 或简记为 I：

$$I=\begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} \tag{4}$$

$n\times1$ 矩阵特称为 n 维列向量，或称 n 维向量。通常表为：

$$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

设 ${}_mA_n=(a_{ij})$ 为 $m\times n$ 矩阵，则把原矩阵的行和列互调的矩阵称为 A 的转置矩阵，记作 A'，它是一个 $m\times n$ 矩阵：

$${}_nA'_m=\begin{pmatrix} a_{11}\,a_{21}\cdots a_{m1} \\ a_{12}\,a_{22}\cdots a_{m2} \\ \cdots\quad\cdots \\ a_{1n}\,a_{2n}\cdots a_{mn} \end{pmatrix}$$

例：

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 8 & 6 \end{pmatrix}$$ 的转置矩阵：

$$A'=\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 8 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$$

特别，n 维向量 X 的转置 X' 是一个 $1\times n$ 矩阵：

$$X'=(x_1,\ x_2,\ \cdots x_n)。$$

2．矩阵的运算：

矩阵作为 $m\times n$ 个有次序的数的阵表是否能类似数一样进行运算即进行加、减、乘等的运算呢？如果能，又如何进

行运算呢？这些问题只能从大量的客观事物中总结出来或者这些运算是符合客观实际的需要的。下面把已经总结、抽象出来的矩阵运算作一简单说明。

1°，矩阵的加法：

设有两个行列相等的 $m\times n$ 矩阵 ${}_mA_n$，${}_mB_n$；则矩阵A与矩阵B之和为

$$
{}_mC_n=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11}, & a_{12}+b_{12}, & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21}, & a_{22}+b_{22}, & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \\ a_{m1}+b_{m1}, & a_{m2}+b_{m2}, & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix} \tag{5}
$$

$$
\text{即 } C=(c_{ij})=(a_{ij}+b_{ij}) \tag{5}
$$

记为 A+B。

由上述加法定义，可以得到下列性质：

（Ⅰ）A+B＝B+A

（Ⅱ）(A+B)+C＝A+(B+C)

例：

$$
\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 8 & 6 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -4 & -7 & -8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}
$$

2°，数与矩阵的乘法：

将矩阵A的每一元素乘以数 λ 后所得到的矩阵，称为数 λ 与A的乘积

$$
\lambda A=(\lambda a_{ij}) \tag{6}
$$

注意是每一元素乘以数 λ，不是只对某一行（或列）乘以数 λ。

由此定义，可得到下面性质：

(Ⅰ) $\lambda(\mu A)=(\lambda\mu)A$

(Ⅱ) $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$

(Ⅲ) $(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$

3°，矩阵的乘法：

设矩阵 ${}_mA_n$ 的列数等于矩阵 ${}_nB_s$ 的行数，

则：

$$ {}_mC_s={}_mA_n\,B_s=\left(C_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}\right) \tag{7}$$

即矩阵 ${}_mC_s$ 为A乘B的积，是一个 m 行 s 列的矩阵，记为AB，它的元素为：

$$C_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}; \tag{7}$$

例1：$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & -2\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1 & -1 & -2\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}$，求AB

$$AB=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1 & -2\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1\times1+2\times0, & 1\times(-1)+2\times2, & 1\times(-2)+2\times1\\ 3\times1-2\times0, & 3\times(-1)-2\times2, & 3\times(-2)-2\times1\end{pmatrix}$$

矩阵乘法要注意：首先A矩阵的列数要等于B矩阵的行数，例1中A的列数为2等于B的行数2。其次，是用A矩阵的 i 行的依列数的次序乘以B矩阵的 j 列的依行数的次序对应相乘然后相加之和为C矩阵第 i 行第 j 列的元素。

例2。 $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}$ ， $B=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$

则：

$$AB=\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$$

$$BA=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}$$

这个例子说明，AB不一定等于BA，另外，对于例1中的AB是有意义的，而BA就没有意义即不符合矩阵乘法的条件，B的列数不等于A的行数，不能进行乘法，可见矩阵的乘法是不满足交换律的。

根据乘法定义满足以下性质：

（Ⅰ） $A(B+C)=AB+AC$

（Ⅱ） $(B+C)A=BA+CA$

（Ⅲ） $A(BC)=(AB)C$

（Ⅳ） $IA=AI=A$

对于矩阵的转置具有以下性质：

（Ⅴ） $(A+B)'=A'+B'$

（Ⅵ） $(\lambda A)'=\lambda A'$

（Ⅶ） $(AB)'=B'A'$

下面再举二个矩阵乘法的有用的例子：

例3。已知，向量 $A=\begin{pmatrix}1\\2\\7\end{pmatrix}$ ，和 $A'=(1\ \ 2\ \ 7)$

则 $A'A=(1\times1+2\times2+7\times7)=54$ 这称为向量A的模。

而，$AA'=\begin{pmatrix}1&2&7\\2&4&14\\7&14&49\end{pmatrix}$ 这就是以后常见的协方差矩阵

例4：
$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\\cdots\cdots\cdots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m\end{cases}$$

可以用矩阵形式表示：

因为：
$$\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\&\cdots\cdots&&\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n\\a_{21}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n\\\cdots\ \cdots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_m\end{pmatrix}$$

所以，线性方程组可以用矩阵表示
$$\begin{pmatrix}a_{11}a_{12}\cdots a_{1n}\\a_{21}a_{22}\cdots a_{2n}\\\cdots\ \cdots\\a_{m1}a_{m2}\cdots a_{mn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_m\end{pmatrix}$$

即 $$AX = B \tag{8}$$

而 $$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

3．行列式

1° 设A为n阶方阵，定义A的行列式$|A|$。（这是一个数，不是有次序的阵表）：

行列式可按如下的规则求出：首先，如果A是一阶方阵 $A=(a)$，则$|A| = a$，如果A是二阶方阵，则

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

如果A是三阶方阵，则：

$$|A| = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

一般，如果$A=(a_{ij})$是n阶方阵，则可用如下的递推公式计算$|A|$：

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \, |A_{1j}|$$

其中A_{1j}是在A中去掉第一行和第j列而形成的$n-1$阶方阵。这是按第一行展开的A的行列式的算式。还可以证明，按任何一行展开的类似算式，其结果都是一样的，即对任意$i=1$，$2, \cdots n$

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} |A_{ij}| \qquad (9)$$

而其中的A_{ij}是在A中去掉第i行和第j列而形成的$n-1$阶方阵。称$(-1)^{i+j}|A_{ij}|$为a_{ij}的代数余子式，记为A_{ij}，则

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij} \qquad (9')$$

例1：计算行列式（按第一行展开）：

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}\times 2\times \begin{vmatrix} -5 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$+(-1)^{1+2}\times(-4)\times \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3}\times 1\times \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 2\times(-3)+0+1\times 1 = -5$$

按第三行展开

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{3+1}\times 0\times \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ -5 & 3 \end{vmatrix}$$

$$+(-1)^{3+2}\times 1\times \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^{3+3}\times 0\times \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -5 \end{vmatrix}$$

$$= 0+(-1)\times(6-1)+0 = -5$$

2° 性质：

（I）行列式与它的转置行列式相等；

即 $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}$$

(Ⅱ)．交换行列式的相邻两行(列)，行列式仅改变正负号：

即 $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix}$$

例：$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

(Ⅲ) 将一个行列式的某一行(列)的所有元素乘以某一数 k，等于用 k 乘这个行列式：

即：$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ ka_{21} & ka_{22} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

(Ⅳ) 如果某一行(列)的各元素是二项之和，那么可以把这行列式写成两个行列式之和：

即：$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21}+c_{21} & b_{22}+c_{22} & b_{23}+c_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

(V) 如果行列式中有两行(列)的元素对应地相等，则行列式等于零；

即：
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = 0$$

(Ⅵ) 将行列式的某一行(列)的元素乘以同一数后加到另一行(列)的对应元素上去，行列式不变；

即：
$$\begin{vmatrix} a_{11}+ka_{21}, & a_{12}+ka_{22}, & a_{13}+ka_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + k\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

这性质很重要，在求行列式的值时常用到它。

(Ⅶ) 任一行(列)的元素与另一行(列)的对应元素的代数余子式的乘积的和等于零；

即：当 $i \neq j$ 时，

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+a_{i3}A_{j3}=0 \qquad (10)$$

例：当 $i=1$，$j=2$ 时 $a_{11}A_{21}+a_{12}A_{22}+a_{13}A_{23}$

$$=(-1)^{2+1}\times a_{11}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+(-1)^{2+2}\times a_{12}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$+(-1)^{2+3}\times a_{13}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=0$$

例2，计算：$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$

$$\underset{(1)+(2)}{=}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 6 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}\underset{(3)-2\times(1)}{=}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 6 & 0 & 5 \\ -3 & 0 & -7 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{1+2}\times 1\times\begin{vmatrix} 6 & 5 \\ -3 & -7 \end{vmatrix}+(-1)^{2+2}\times 0\times\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -7 \end{vmatrix}$$

$$+(-1)^{2+3}\times 0\times\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 5 \end{vmatrix}=27$$

等号下的(1)+(2)表示第一行加上第二行。

由行列式的以上性质和矩阵乘法规则可以证明：对于任意实数 λ 和任意两个 n 阶方阵 A，B，有