风暴潮

1982　1

中 国 风 暴 潮 研 究 会
国家海洋局海洋科技情报研究所

《风 暴 潮》（译文专集）

1982年第一期
（总第 9 期）

目 录

理论研究

河口中潮汐与风暴潮的传播
……〔英国〕J.普劳德曼（ 1 ）

河口中潮汐行波和风暴潮行波的摩擦效应
……〔英国〕J.普劳德曼（ 16 ）

考虑地转剪流的陆架波
……W.D.麦基（ 25 ）

风暴潮分析的比较和验证——侧重移动边界条件
……〔加拿大〕G. T. yeh（ 32 ）

风暴潮问题的一个底应力公式
……〔西德〕J.kielmann等（ 41 ）

各种基准面
……〔日本〕彦坂繁雄（ 53 ）

预报技术

大阪湾的固有振动与高潮、海啸的关系
……〔日本〕中村重久等（ 62 ）

那霸港与石垣港的台风潮
……〔日本〕森安茂雄（ 67 ）

香港台风极值增水的研究
……H.F.chan等（ 75 ）

数值模拟

孟加拉湾的风暴潮
……〔印度〕P.K.丹斯（88）
土佐湾风暴潮的数值计算
……〔日本〕上野武夫（91）
关于一个潮汐和风暴潮三维非线性模式的提出
……〔英国〕N.S.Heaps（107）

工程设计

1976年1月风暴潮时德国下萨克森区海岸防护的经验总结
……西德下萨克森省农林粮食部（120）

卫星云图的应用

卫星云图在热带气旋分析中的应用
……郭洪寿　叶琳　编译（141）

河口中潮汐与风暴潮的传播

〔英国〕 J.普劳德曼
（英国皇家学会会员）

当来自外海的潮汐与风暴潮沿河口传播时，在河口中它们分布如何，本文对此做了理论研究。下列研究结果都是在同一海上气象条件下获得的。

就单行波而言，在接近潮汐高潮时刻出现的极大风暴潮高度比接近潮汐低潮时刻的极大风暴潮高度要低些，而且随着潮差的增加，风暴潮高度相应地降低。本文结果是在近似量级情况下获得的，因而与实际情况会有出入，这是由摩擦造成的，同时随着距海距离的增加，二者之间的出入也随之增加。

就驻波振荡而言，下列结果与河口顶部有关。当主风暴潮升到其最大值比从其最大值下降更迅速时，并且当这个最大值接近潮汐高潮的时刻出现时，那么，浅水效应会使风暴潮随潮差的增加而增加，摩擦效应会使风暴潮随潮差的增加而降低。

本文仅提供与泰晤士河河口有关的行波公式，由于平均水深较浅，因而，公式适用于距海几海里的范围。但是，这些趋势想必是适用于去向伦敦的所有水路。

1.绪　论

在研究沿岸防洪问题时，无论是制定防护计划还是作预报，总会发现潮汐与风暴潮之间相互作用是很重要的。迄今为止的观测结果表明，低潮时刻出现的极大风暴潮高度值，总比高潮时刻的极大风暴潮高度值来得大些。因为风暴潮气象条件的时间与天文潮的时间无关，因而上述现象只好从流体动力方面去找原因。

本文是一篇关于潮汐与风暴潮的结合体沿河口分布的理论研究。首先把潮汐和风暴潮两者都视为产生于外海，然后传入河口。因此，作用在河口水面上的引潮力、风以及变化的气压可以忽略。并令流域是狭窄的，因而地转效应也可以忽略。

河口的收缩效应是格林（Green，1837）用数学方法论证的，但格林没有考虑浅水效应和摩擦效应。这些效应是由艾里（Airy，1842）在论无收缩河口内的浅水时用二次近似法论证的。艾里给出的行波和驻波振荡，从一级近似上来看，二者在时间上是调和的。本文的波有一个通常形状的时间曲线，这是研究风暴潮所必不可少的。另外，艾里假定摩擦力与水流速成正比，这就是说潮汐与风暴潮之间没有摩擦性的相互作用；本文中，假定摩擦力与流速的平方成正比。

由于数学处理的复杂性，本文仅给出考虑到河口收缩效应在内的单行波一般性公式。

为了详细了解单行波中的浅水效应和摩擦效应，以及详细了解两列行波反向运动叠加情况下，其中，包括驻波振荡的特殊情况下的浅水效应和摩擦效应，我们假定河口的横断面是等深的。

本文的主要结果如下：

就单行波而言，河口的收缩可以改变浅水效应和摩擦效应，但就河口自身的作用而言，

能使高潮比等深河口内的要高些，低潮则比等深河口内的要低些。对于摩擦效应来说，浅水效应是重要的。浅水效应使高潮出现时间比其它潮位要早些，低潮则晚些。而摩擦效应则使高潮比没有摩擦效应时要低些，低潮则比没有摩擦效应时要高些。这些量值的变化随距海的距离而增加。

就等深河口内的单行波而言，高潮和低潮时刻的摩擦效应消失。从而，由于浅水效应，高潮比在等速率移动的波中出现的早，低潮则出现的晚。在海上相同气象条件下，在河口内，接近潮汐高潮时刻出现的极大风暴潮高度比该地点接近潮汐低潮时刻出现的极大风暴潮高度要低些，而且这种趋势随潮差的增加而降低。当河口口部的风暴潮，有时在潮汐高潮时间之前就升到其最大值且一直保持不变。直至潮汐高潮时间之后时，河口风暴潮的时间曲线会有两个峰值。一个出现在潮汐高潮时间之前，另一个则在此之后。这是由摩擦引起的，而且它们的量随距海的距离而增加。

就等深河口内的驻波振荡而言，可以得到河口顶部的高潮高度和高潮出现的时间的公式。浅水和摩擦两者都能使高潮出现的时间比没有这些效应时出现的晚。根据振荡时间曲线的形状，在有摩擦情况下会比没有摩擦时增加或降低高潮的高度。当极大风暴潮出现时刻接近潮汐高潮的时间时，风暴潮高度上的摩擦效应随风暴潮时间曲线和形状而定。在风暴潮升到其极大值比从其最大值下降的更迅速时，摩擦效应可以降低风暴潮的高度。在海上相同的气象条件下，所产生风暴潮高度随潮差而增大，浅水效应会使风暴潮的高度增加，而摩擦效应却使风暴潮的高度降低。

本文提供的与泰晤士河河口内行波有关的结果，显然，由于平均水面的水深较浅，公式仅适用于距离海几浬的水域。但是这些趋势想必适用于去向伦敦的所有水路。

另外，有关浅水和摩擦将取与北海类似的计算，在行波上这些效应将在英格兰东岸上检验。

2.符号意义和假定

表示如下：

g—重力加速度；A—当水面在其平均水位时，河口垂直横断面的面积；b—水面在平均水位时，河口的宽度；a—在驻波振荡的情况下，河口的有效长度；x—溯向河口上游的距离：在口部取$x=0$；t—时间；ζ—水面高度；u—在横断面上，沿x增加方向的流速平均值；α—用于说明流的常数；k—摩擦系数，通常取0.0025；$F(-t)$—在河口口部由开阔海面传播进来的水位扰动；$f(t)$—由于先及河口的水位反射作用，在河口口部产生的水位扰动的主要成分；$E(t)$—河口顶部水位的半扰动，不计浅水和摩擦效应。

且，记

$$h=\frac{A}{b},\quad C=C(x)=(gh)^{\frac{1}{2}},\quad H=\frac{2h^2}{kx}=800\frac{h^2}{x} \tag{1}$$

故h是横断面上水深的平均值。

用下标○表示位于河口口部的值，且取

$$p=\left(\frac{b_{\circ}c_{\circ}}{bc}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{2}$$

则p是x的一个函数项，它与河口口部一致且随河口横断面的收缩而增加。因此，称它为

"收缩系数"。

本文中"′"有两种不同的用法，一是用于积分变数，再是用来表示函数导数，取

$$\theta = \int_0^x \frac{dx'}{c(x')'} \tag{3}$$

所以 θ 是以变速 c 由河口口部移到位于 x 的横断面所需的时间。直到第4节的结尾，这几个量

$$A,\ b,\ h,\ c,\ p,$$

可看作是 θ 的函数，而 ζ、u 可看作是 θ、t 的函数。

又取

$$\xi = \theta + t,\quad \eta = \theta - t, \tag{4}$$

因此，有 $$\theta = \tfrac{1}{2}(\xi + \eta),\quad t = \tfrac{1}{2}(\xi - \eta) \tag{5}$$

及 $$\frac{\partial}{\partial\theta} = \frac{\partial}{\partial\xi} + \frac{\partial}{\partial\eta},\quad \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial\xi} - \frac{\partial}{\partial\eta}, \tag{6}$$

所以有 $$\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\partial}{\partial t} = 2\frac{\partial}{\partial\xi},\quad \frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{\partial}{\partial t} = 2\frac{\partial}{\partial\eta} \tag{7}$$

假定b'、h'以及c'、p'很小，它们的平方及乘积均可以忽略，同样，b''、h''、c''、p''也可以忽略。

3.微 分 方 程

连续方程为

$$\frac{\partial}{\partial x}\left\{(A + b\zeta)\,u\right\} + b\frac{\partial\zeta}{\partial t} = 0, \tag{8}$$

运动方程为

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = -g\frac{\partial\zeta}{\partial x} - \frac{k}{h}|u|u \tag{9}$$

利用式(2)、(3)方程(8)、(9)可写成

$$\frac{\partial}{\partial\theta}(Au) + \frac{b_o c_o}{p^2}\frac{\partial\zeta}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial\theta}(b\zeta u) \tag{10}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(Au) + \frac{b_o c_o}{p^2}\frac{\partial\zeta}{\partial\theta} = -\frac{b_o c_o}{2gp^2}\frac{\partial u^2}{\partial\theta} - kb|u|u, \tag{11}$$

式中右边的项对 ζ、u 是二阶的、从式(10)、(11)的一阶项中消去A_u，即得

$$b_o c_o\left\{\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{p^2}\frac{\partial\zeta}{\partial\theta}\right) - \frac{1}{p^2}\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}\right\} = \frac{\partial^2}{\partial t\partial\theta}(b\zeta u) - \frac{b_o c_o}{2g}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{p^2}\frac{\partial u^2}{\partial\theta}\right) - k\frac{\partial}{\partial\theta}(b|u|u) \tag{12}$$

记 $$\zeta = pz, \tag{13}$$

方程(12)变为

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial\theta^2} - \frac{\partial^2 Z}{\partial t^2} = \frac{1}{b_o c_o}\frac{\partial}{\partial t}\left\{p\frac{\partial}{\partial\partial}(b\zeta u)\right\} - \frac{p}{2g}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{p^2}\frac{\partial u^2}{\partial\theta}\right) - \frac{kp}{b_o c_o}\frac{\partial}{\partial\theta}(b|u|u), \tag{14}$$

如同第 2 节结尾所示的那样，因为可忽略p'^2，p'^1。

下面要讲的数学方法是求解式(10)和(11)中一阶项用的，把它代入式(14)的二阶项，然后可解出一定条件下全微分方程。

根据式(6)和(7)，式(14)可以写成

$$4\frac{\partial^2 Z}{\partial\xi\partial\eta}=\frac{1}{b_\circ c_\circ}\left(\frac{\partial}{\partial\xi}-\frac{\partial}{\partial\eta}\right)\left\{p\frac{\partial}{\partial\theta}(b\zeta u)\right\}-\frac{p}{2g}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{p^2}\frac{\partial u^2}{\partial\theta}\right)-\frac{kp}{b_\circ c_\circ}\frac{\partial}{\partial\theta}(b|u|u), \tag{15}$$

式(15)的通解是

$$4Z=\phi_1-\phi_2-\psi-x+X+Y, \tag{16}$$

式中

$$\frac{\partial\phi_1}{\partial\eta}=\frac{\partial\phi_2}{\partial\xi}=\frac{p}{b_\circ c_\circ}\frac{\partial}{\partial\theta}(b\zeta u), \tag{17}$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi\partial\eta}=\frac{p}{2g}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{p^2}\frac{\partial u^2}{\partial\theta}\right), \tag{18}$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial\xi\partial\eta}=\frac{kp}{b_\circ c_\circ}\frac{\partial}{\partial\theta}(b|u|u), \tag{19}$$

X 只是 ξ 的函数，Y 只是 η 的函数

4.行　　波

式(15)一阶项的解是

$$Z=F(\eta)=F(\theta-t), \tag{20}$$

式中$F(\ )$已在第2节中解释过，但是，为使自变量η简便起见而经常省略。根据式(9)得到u的一阶部分，即

$$\frac{\partial u}{\partial t}=-\frac{g}{c}\frac{\partial}{\partial\theta}(pF)=-\frac{g}{c}(pF'+p'F)$$

因此

$$u=\frac{g}{c}\left\{pF+p'\int_\alpha^\eta F(\eta')d\eta'\right\} \tag{21}$$

常数α是波的详述部分。

要注意，当p'不等于零时，流速不全部由相同横断面的高度来决定。

将式(20)和(21)代入式(17)，(18)和(19)后，量c，h，p，可以认为是$\frac{1}{2}(\xi+\eta)$的函数，例如，

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{p}{h}\right)=\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{p}{h}\right)=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{p}{h}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{p}{h}\right)'$$

这样，略去第2节结尾指定的量，可得到下列方程：

$$\frac{\partial\phi_1}{\partial\eta}=\frac{\partial\phi_2}{\partial\xi}=\frac{p}{h}(F^2)'+\left(\frac{p}{h}\right)'F^2+\frac{p'}{h}F'\int_\alpha^\eta Fd\eta'=\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{p}{h}F^2\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{p}{h}\right)'F^2+\frac{p'}{h}F'\int_\alpha^\eta Fd\eta' \tag{22}$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi\partial\eta}=\frac{p}{h}(FF')'+\left\{\left(\frac{p}{h}\right)'+\frac{p'}{h}\right\}(F^2)'+\frac{p'}{h}\left\{F'\int_\alpha^\eta F\alpha\eta'\right\}'$$

$$= \frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{p}{h}FF'\right)+\left\{\frac{3}{4}\left(\frac{p}{h}\right)'+\frac{p'}{h}\right\}(F^2)'+\frac{p'}{h}\left\{F'\int_a^\eta Fd\eta'\right\}' \quad (23)$$

$$\pm\frac{1}{k}\ \frac{\partial^2 x}{\partial\xi\partial\eta}=\frac{cp}{h^2}(F^2)'+\left\{\left(\frac{cp}{h^2}\right)'+\frac{cp'}{h^2}\right\}F^2+\frac{2cp'}{h^2}F'\int_a^\eta Fd\eta'$$

$$=\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{cp}{h^2}F^2\right)+\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{cp}{h^2}\right)'+\frac{cp'}{h^2}\right\}F^2+\frac{2cp'}{h^2}F'\int_a^\eta Fd\eta' \quad (24)$$

假定式(24)中流速所考虑的整个变动范围是朝一个方向，上标表示正流。下标表示负流。

有必要时，可积分如下：

$$\phi_1=\frac{p}{h}F^2+\frac{1}{2}\left\{p\left(\frac{1}{h}\right)'-\frac{p'}{h}\right\}\int_0^\eta F^2d\eta'+\frac{p'}{h}F\int_a^\eta Fd\eta', \quad (25)$$

$$\phi_2=2FF'\int_{-\eta}^{\xi}\frac{p}{h}d\xi'+2\frac{p}{h}F^2+F'\int_{-\eta}^{\xi}\frac{p'}{h}d\xi'\int_a^\eta Fd\eta', \quad (26)$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial\xi}=\frac{p}{h}FF'+\left\{\frac{3}{4}\left(\frac{p}{h}\right)'+\frac{p'}{h}\right\}F^2+\frac{p'}{h}F'\int_a^\eta Fd\eta',$$

$$\psi=FF'\int_{-\eta}^{\xi}\frac{p}{h}d\xi'+\left(\frac{3p}{2h}+\int_{-\eta}^{\xi}\frac{p'}{h}d\xi'\right)F^2+F'\int_{-\eta}^{\xi}\frac{p'}{h}d\xi'\int_a^\eta Fd\eta', \quad (27)$$

$$\pm\frac{1}{k}\ \frac{\partial x}{\partial\xi}=\frac{cp}{h^2}F^2+\frac{1}{2}\left\{p\left(\frac{c}{h^2}\right)'-\frac{cp'}{h^2}\right\}\int_0^\eta F^2d\eta'+\frac{2cp'}{h^2}F\int_a^\eta Fd\eta',$$

$$\pm\frac{1}{k}x=F^2\int_{-\eta}^{\xi}\frac{cp}{h^2}d\xi'+\frac{1}{2}\int_{-\eta}^{\xi}\left\{p\left(\frac{c}{h^2}\right)-\frac{cp'}{h^2}\right\}d\xi'\int_0^\eta F^2d\eta'+$$

$$+2F\int_{-\eta}^{\xi}\frac{cp'}{h^2}d\xi'\int_a^\eta Fd\eta', \quad (28)$$

在式(26)、(27)和(28)的ξ'积分中，下界已经确定，因此，当$\theta=0$时，积分为零；在式(25)和(28)新的η'积分中，下界已经确定。因此，当$\eta=0$时，积分为零。

为了使河口口部的ξ降低到$F(-t)$，取$x=0$

即
$$Y=4F+\frac{5}{2}\left(\frac{p}{h}\right)_0F^2-\frac{1}{2}\left\{p\left(\frac{1}{h}\right)'-\frac{p'}{h}\right\}_0\int_0^\eta F^2d\eta'-\left(\frac{p'}{h}\right)_0F\int_a^\eta Fd\eta', \quad (29)$$

然后，把式(25)至(29)全部代入式(16)，

即得
$$Z=F-IF^2-JFF'-KF\int_a^\eta Fd\eta'-LF'\int_a^\eta Fd\eta'-M\int_0^\eta F^2d\eta', \quad (30)$$

式中
$$I=\frac{5}{8}\left[\frac{p}{h}\right]_0^\theta+\frac{1}{4}\int_{-\eta}^{\xi}\frac{p'}{h}d\xi'\pm\frac{k}{4}\int_{-\eta}^{\xi}\frac{cp}{h^2}d\xi',$$

$$J=\frac{3}{4}\int_{-\eta}^{\xi}\frac{p}{h}d\xi',$$

$$K=-\frac{1}{4}\left[\frac{p'}{h}\right]_0^\theta\pm\frac{K}{2}\int_{-\eta}^{\xi}\frac{cp'}{h^2}d\xi',$$

$$L=\frac{1}{2}\int_{-\eta}^{\xi}\frac{p'}{h}d\xi',$$

$$M=\frac{1}{8}\left[\frac{p'}{h}-p\left(\frac{1}{h}\right)'\right]_0^\theta\pm\frac{K}{8}\int_{-\eta}^{\xi}\left\{p\left(\frac{c}{h^2}\right)'-\frac{cp'}{h^2}\right\}d\xi',$$

式中$[\ \ ]_0^\theta$括住的量表示当$\theta=0$时θ起过本身值的增量，当通过积分范围的流速为正时式

中取上标，当通过极分范围的流速为负时式中取下标。

5.行波的一般性结果

从第4节中给出的关于I、J、K、L、M的公式中使用时要作如下的变换：

$$\int_{-\eta}^{\xi} d\xi' = 2\int_{0}^{\theta} d\theta' = 2\int_{0}^{x}\frac{dx'}{c},$$

被积函数的自变量分别是

$$\frac{1}{2}(\xi'+\eta),\theta',\ x',$$

例如，$p'=dp/dx$，因此把先前的p'换成cp'。

根据式(13)和(30)，可得

$$\zeta = pF\left\{1-IF-JF'-K\int_{a}^{\eta}Fd\eta'\right\}-LpF'\int_{a}^{\eta}Fd\eta'-Mp\int_{0}^{\eta}F^2d\eta', \tag{31}$$

式中

$$I=\frac{5}{8}\left[\frac{p}{h}\right]_0^x+\frac{1}{2}\int_0^x\frac{p'}{h}dx'\pm\frac{K}{2}\int_0^x\frac{p}{h^2}dx',$$

$$J=\frac{3}{2}\int_0^x\frac{p}{ch}dx',$$

$$K=-\frac{1}{4}\left[\frac{cp'}{h}\right]_0^x\pm K\int_0^x\frac{cp'}{h^2}dx',$$

$$L=\int_0^x\frac{p'}{h}qx',$$

$$M=\frac{1}{8}\left[\frac{cp'}{h}-cp\left(\frac{1}{h}\right)'\right]_0^x\pm\frac{K}{4}\int_0^x\left\{p\left(\frac{c}{h^2}\right)'-\frac{cp'}{h^2}\right\}dx',$$

$[\quad]_0^x$ 括住的量表示当 $x=0$ 时 x 超过本身值的增量。上标和下标必须根据在河口口部与涨落最时的 x 处的横断面之间的水流来决定。我们只考虑这两种情况。

量I、J、K、L、M、是x的函数，而且只取决于河口的大小，因此，称它们为“河口系数”。要注意J、L与摩擦无关。因此，称它们为浅水河口系数。

本篇的近似值只有当pF大于式(31)的余项时才能成立。

在式(31)中，ζ是在时间t，横断面x上的水面高度，这种水面高度可能是潮位，也可能是风暴潮高度或潮汐与风暴潮共同作用引起的水面高度，而且F是$\theta-t$的任一确实可能的函数。

在河口口部，$x=0$，$\theta=0$，$p=1$，河口系数均为零，于是，式(31)简化为

$$\zeta=F(-t)$$

现假定在一阶波中，当$\eta=0$时，高潮出现，因此$F'(0)=0$，F''为负。当$t=\theta$，根据(31)得

$$\zeta_{t=0}=pF(0)\left\{1-IF(0)-K\int_a^0Fd\eta'\right\} \tag{32}$$

以及

$$\left(\frac{\partial\zeta}{\partial t}\right)_{t=0}=\left\{pF''(0)+L\int_{a}^{0}Fd\eta'\right\}+(K+M)pF^2(0) \tag{33}$$

式(32)和(33)都是 x 的函数。高潮的条件是$\partial\zeta/\partial t=0$，且，因为

$$\frac{\partial\zeta}{\partial\eta}=\left(\frac{\partial\zeta}{\partial\eta}\right)_{\eta=0}+\eta\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial\eta^2}\right)_{\eta=0}$$

对 η 是一阶的，所以，对高潮

$$0=-\left(\frac{\partial\zeta}{\partial t}\right)_{t=0}+(\theta-t)_pF''(0)$$

也是一阶的，利用式(33)，得到高潮时间的近似值，即

$$t=\theta-JF(0)-L\int_{a}^{0}Fd\eta'-(K+M)\frac{F^2(0)}{F''(0)} \tag{34}$$

t 是 x 的函数。式(32)和高潮高之间的差大约是 $(\theta-t)^2$，因此式(32)可以被当作在横断面 x 的高潮高的近似值。既然式(32)括在{ }内的因子一定与整体差别不大，可见，假如收缩系数 p 在河口上游大幅度增加，那么，高潮的高度也将在河口上游增加。

在泰晤士河河口内，潮汐从河口口部逐渐增大，洪水的极大高度也是如此，例如：在1938年2月，1943年4月，1949年5月和1953年1—2月的洪水。

再假定，在一阶波中，当 η = 0 时，低潮出现，因此又有$F'(0)=0$，但是现在 $F''(0)$ 为正。此时式(32)将给出低潮高度的近似值，式(34)将给出低潮时间的近似值。

6.均等深度河口内的行波

这是第 5 节中的问题在 h 是均等时的特殊情况，因此 c 也是均等的，且

$$\theta=\frac{x}{c},\qquad p=\left(\frac{b_0}{b}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{35}$$

然后，根据第 5 节河口系数变为

$$I=\frac{9(p-1)}{8h}\pm\frac{k}{3h^2}\int_0^x pdx',$$

$$J=\frac{3}{2ch}\int_0^x pdx',$$

$$K=-\frac{c}{4h}\Big[p'\Big]_0^x\pm\frac{kc(p-1)}{h^2},$$

$$L=\frac{p-1}{h},$$

$$M=\frac{c}{8h}\Big[p'\Big]_0^x\pm\frac{kc(p-1)}{4h^2},$$

由此可见，浅水系数 J 、L是正的，而且当水流处在涨潮中时也是正的。

现假定是均等的，那么，河口系数变为

$$I=\frac{9(p-1)}{8h}\pm\frac{p+1}{2H},$$

$$J=\frac{3(p+1)x}{4ch},\qquad K=\pm\frac{2c(p-1)}{Hx},$$

$$L=\frac{p-1}{h},\qquad M=\pm\frac{c(p-1)}{2Hx},$$

用高度H代替摩擦系数K。注意

$$K+M=\pm\frac{3c(p-1)}{2Hx}$$

假定在x处于高潮的情况下，水流从河口口部向位于x的横断面涨潮。因此，可定出上标的符号。而且I和K是正的，当

$$IF(0)+k\int_a^0 F d\eta'$$

是正的时，由式(32)得出浅水和摩擦的联合效应使高潮比其它时候低。当

$$JF(0)+L\int_a^0 F d\eta'$$

是正的时，式(34)的浅水部分是负的，摩擦部分是正的。可见浅水趋势使高潮出现的较早，而与收缩结合的摩擦趋势使高潮出现的较晚。

再假定，在x处于低潮的情况下，水流从位于x的横断面向河口口部退潮，因此，应定出下标的符号。当

$$JF(0)+L\int_a^0 F d\eta'$$

是负的时，式(34)的浅水和摩擦两部分都是正的。可见与收缩结合浅水和摩擦两者使低潮比一阶波中出现的晚。

就泰晤士河河口而言，在骚森德(Southerd)取 $x=0$。骚森德与泰晤士黑文（Tharnes Hanen）之间，$h=22$呎，因此：

$$C=(gh)^{\frac{1}{2}}=18\text{哩/小时}$$

在泰晤士黑文，$x=$哩，$p=1.75$，因此，

$$H=800\frac{h^2}{x}=8.2\text{呎}$$

而且得出的河口系数为

$1/I=4.9$呎（涨潮）	-7.8呎（落潮）
$1/J=21$呎/小时	$1/K=\pm$呎·小时
$1/L=29$呎	$1/M=\pm$呎·小时

由于本篇的近似值成立，因此这些量必须分别大于

$$F,\ F',\ \int_a^\eta F d\eta'、\frac{F'}{F}\int_a^\eta F d\eta',\frac{1}{F}\int_0^\eta F^2 d\eta'$$

这些条件首先要求骚森德的高潮低于4.9呎平均水面高度以上，低潮则要高于7.8呎平均水面高度以下。其次要求骚森德水面的时间变化率要比21呎/小时小的多。第一个条件即使是有小潮也难达到，可是第二个条件即使是有大潮也能达到。由此可见，由于平均水位的水深较浅，公式只适用于十分接近骚森德的地方。

7.均等断面河口内的行波

这是第6节中的问题当对所有x的值均取 $p=1$ 时的特殊情况。于是河口系数变为

$$I=\pm\frac{1}{H},\qquad J=\frac{3x}{2ch}$$

$$K = 0,\ L = 0,\ M = 0$$

在一阶波中

$$\zeta = F\left(\frac{x}{c} - t\right), \qquad u = \frac{g}{c}F\left(\frac{x}{c} - t\right) \tag{36}$$

因此，水流由相同横断面的高度来决定。

一阶和二阶波的结果(31)变为

$$\zeta = F\left\{1 - \frac{3xF'}{2ch} - \frac{|F|}{H}\right\} \tag{37}$$

此式在 $b = b$、$c = c_0$、$p = 1$ 时，很容易直接从微分方程(15)得到。在上式推导过程中，显然不必限制水流分布的地点。在式(37)中，$3x/2ch$是浅水系数，$1/H$是摩擦系数。

高潮高度的式(32)变为

$$F(0)\left\{1 - \frac{F(0)}{H}\right\} \tag{38}$$

$F(0)$是正的，然而低潮高度变为

$$F(0)\left\{1 + \frac{F(0)}{H}\right\} \tag{39}$$

$F(0)$是负的。由式(38)得到的高潮比一阶波中的低，由式(39)得到的低潮比在一阶波 中 的高，两者的这些差别都是由摩擦引起的。

高潮或低潮时间的式(34)变为

$$t = \frac{x}{c} - \frac{3x}{2ch}F(0) \tag{40}$$

由此式得到的高潮比一阶波中出现的早，低潮比一阶波中出现的晚，两者的这些效应全部是由浅水引起的。

现取

$$F\left(\frac{x}{c} - t\right) = T\left(\frac{x}{c} - t\right) + S\left(\frac{x}{c} - t\right),$$

式中$T(\ \ )$表示潮汐，$S(\ \ )$表示风暴潮。代入式(37)得

$$\zeta = T\left(1 - \frac{3xT'}{2ch}\right) - \frac{3x}{2ch}(TS' + T'S) + S\left(1 - \frac{3xS'}{2ch}\right) - \frac{|T + S|(T + S)}{H} \tag{41}$$

通常所称的“风暴潮”是指从观测到的海平面高度中减去推算潮汐的结果。现在举一个推算潮汐的例子来说明

$$T\left(1 - \frac{3xT'}{2ch} - \frac{|T|}{H}\right),$$

因此，风暴潮为

$$S\left(1 - \frac{3xS'}{2ch} - \frac{|S|}{H}\right) - \frac{3x}{2ch}(TS' + T'S) - \frac{|T + S|(T + S)}{H} + \\ + \frac{|T|T + |S|S}{H} \tag{42}$$

式(42)的第一项给出与潮汐无关的风暴潮部分；第二项给出在潮汐对风暴潮的浅水效应；其余的项给出潮汐对风暴潮的摩擦效应。这些潮汐效应包括位于主风暴潮上面的振荡在内。

当一阶风暴潮在一段包括潮汐高潮在内的时间中保持接近其最大值时，一阶和二阶风暴潮(42)近似的化简为

$$S\left(1-\frac{S}{H}-\frac{3xT'}{2ch}-\frac{2T}{H}\right) \tag{43}$$

在十分接近潮汐高潮时间内，可能有一个正最小值。因此，风暴潮的时间曲线有两个峰值，一个出现在潮汐高潮时间之前，另一个出现在潮汐高潮的时间之后。这个实例于1953年1—2月的风暴潮期间在骚森德和查塔姆出现过（Rossiter 1954）。

一般认为：海上相同的气象条件产生相同的风暴潮。但结果(43)表明，在这些条件下，在河口附近，在大潮的高潮时间出现的风暴潮比在接近小潮的高潮时间出现的风暴潮要小些。

现假定当 $t=x/c$ 时：一阶潮汐的高潮出现，因此 $T'(0)=0$。再假定一阶风暴潮同时有一个正最大值，从而又有$S'(0)=0$。于是此时的风暴潮(42)为

$$S(0)-\frac{\{T(0)+S(0)\}^2}{H}+\frac{T^2(0)}{H}$$

或

$$S(0)\left\{1-\frac{2T(0)+S(0)}{H}\right\} \tag{44}$$

然后，由 $-T(x/c-t)$表示一阶潮汐，假定当 $t=x/c$ 时，低潮出现，因此又有$T'(0)=0$。再假定一阶风暴潮同时有一个正最大值,因此又有$S'(0)=0$。于是，若$T(0)>S(0)$，此时风暴潮为

$$S(0)+\frac{\{-T(0)+S(0)\}^2}{H}-\frac{T^2(0)}{H}$$

或

$$S(0)\left\{1-\frac{2T(0)-S(0)}{H}\right\} \tag{45}$$

若$T(0)<S(0)$，此时风暴潮为

$$S(0)-\frac{\{-T(0)+S(0)\}^2}{H}-\frac{T^2(0)}{H}$$

或

$$S(0)-\frac{2T^2(0)-2T(0)S(0)+S^2(0)}{H} \tag{46}$$

若$T(0)=S(0)$，式(45)和(46)相等。

把$T(0)$、$S(0)$用同样的值代入式(44)、(45)和(46)、可见式(45)和(46)大于由各量的和组成的式(44)。

$$\frac{2S^2(0)}{H},\qquad \frac{2T(0)\{2S(0)-T(0)\}}{H} \tag{47}$$

这两式都是正的。当$H=60$呎，$T(0)=S(0)=10$呎时，风暴潮高度（44）和（45）分别是5.0和8.3呎。(47)式的结果全部是由风暴潮的(42)式中的摩擦项提供的。

以上结果所得，由于海上相同的气象条件，河口附近的风暴潮的最大值在潮汐高潮时间出现的比在潮汐低潮时间出现的要小。这是对许多潮汐低潮的时间附近出现的风暴潮的动力说明。

8.均等断面河口内的两个波

当 h， b 均等时， p = 1，并且

$$\zeta=\frac{x}{c}+t, \qquad \eta=\frac{x}{c}-t$$

微分方程(15)可以写成：

$$4\frac{\partial^2\zeta}{\partial\xi\partial\eta}=\frac{1}{c}\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}-\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\right)(\zeta u)-\frac{1}{2g}\left(\frac{\partial}{\partial\xi}+\frac{\partial}{\partial\eta}\right)^2u^2-\frac{k}{c}\left(\frac{\partial}{\partial\xi}+\frac{\partial}{\partial\eta}\right)(|u|u)$$

或

$$\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta}\left(4\zeta+\frac{u^2}{g}\right)=\frac{\partial}{\partial\xi^2}\left(\frac{\zeta u}{c}-\frac{u^2}{2g}\right)-\frac{k\partial}{c\partial\xi}(|u|u)-\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\left(\frac{\zeta u}{c}+\frac{u^2}{2g}\right)$$

$$-\frac{k}{c}\frac{\partial}{\partial\eta}(|u|u) \tag{48}$$

式(48)的通解是

$$4\zeta+\frac{u^2}{g}=\phi+\psi+X+Y, \tag{49}$$

式中
$$\frac{\partial^2\phi}{\partial\xi\partial\eta}=\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\left(\frac{\zeta u}{c}-\frac{u^2}{2g}\right)-\frac{k}{c}\frac{\partial}{\partial\xi}(|u|u),$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi\partial\eta}=-\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\left(\frac{\zeta u}{c}+\frac{u^2}{2g}\right)-\frac{k}{c}\frac{\partial}{\partial\eta}(|u|u)$$

X是 ξ 的任意函数，Y是 η 的任意函数。所得积分

$$\frac{\partial\phi}{\partial\eta}=\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\zeta u}{c}-\frac{u^2}{2g}\right)-\frac{k}{c}|u|u, \tag{50}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial\xi}=-\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\zeta u}{c}+\frac{u^2}{2g}\right)-\frac{k}{c}|u|u, \tag{51}$$

要求不附加任意函数。

现在式(48)一阶项的通解是

$$\zeta=F(\eta)+f(\xi) \tag{52}$$

然后，根据式(9)，u的一阶方程是

$$\frac{\partial u}{\partial t}=-g\frac{\partial\zeta}{\partial x}=-\frac{g}{c}\left\{F'\left(\frac{x}{c}-t\right)+f'\left(\frac{x}{c}+t\right)\right\}$$

此式的积分为

$$u=\frac{g}{c}(F-f) \tag{53}$$

在上式中假定水流与时间无关。为简便起见，在式(53)中函数F、f的自变量 η、ξ 已经省略，并且在以后式中也经常简略。式(52)和(53)论述了两个通常形式波的迭加；即无论是潮汐的波、风暴潮的波还是潮汐与风暴的联合波的迭加。波F朝河口的方向移动，波f朝海的方向移动。

现在需把式(52)和(53)代入式(50)和(51)的二阶项，然后，解出有关 ϕ、ψ 的方程的结果来。可见

$$h\left(\frac{\zeta u}{c}-\frac{u^2}{2g}\right)=\frac{1}{2}F^2+Ff-\frac{3}{2}f^2,$$

$$h\left(\frac{\zeta u}{c}+\frac{u^2}{2g}\right)=\frac{3}{2}F^2-Ff-\frac{1}{2}f^2,$$

$$h\frac{k}{c}|u|u=\frac{kg}{c}|F-f|(F-f),$$

然后，根据式(50)和(51)得

$$h\frac{\partial\phi}{\partial\eta}=-3ff'+Ff'-\frac{kg}{c}|F-f|(F-f),$$

$$h\frac{\partial\psi}{\partial\xi}=-3FF'+F'f-\frac{kg}{c}|F-f|(F-f)。$$

这些方程的积分为

$$h\phi=-3\eta ff'+f'\int_0^\eta Fd\eta'-\frac{kg}{c}\int_{-\xi}^{\eta}|F-f|(F-f)d\eta',$$

$$h\psi=-3\xi FF'+F'\int_0^\xi fd\xi'-\frac{kg}{c}\int_{-\eta}^{\xi}|F-f|(F-f)d\xi',$$

当，$\zeta+\eta=0$，即在河口口部时，取摩擦积分的下界。使这些积分为零。

为了平衡，在河口口部，包括ff'，FF'项和式(49)内的u^2/g，取

$$hX=4hF-3\xi ff'+f^2+4hC,$$

$$hY=4hf-3\eta FF'+F^2,$$

式中C与ξ、η无关，该常数C可以用来满足其它条件。

代入式(49)，得

$$\zeta=F+f+C-\frac{3(\xi+\eta)}{4h}(FF'+ff')+\frac{Ff}{2h}+\frac{F'}{4h}\int_0^\xi fd\xi'+\frac{f'}{4h}\int_0^\eta Fd\eta'$$
$$-\frac{kg}{4ch}\int_{-\xi}^{\eta}|E-f|(F-f)d\eta'-\frac{kg}{4ch}\int_{-\eta}^{\xi}|F-f|(F-f)d\xi'。\tag{54}$$

返回来用变量x、t方程(54)可以写成

$$\zeta=F+f+C-\frac{3x}{2ch}(FF'+ff')+\frac{Ff}{2h}+\frac{F'}{4h}\int_{-x/c}^{t}f\left(\frac{x}{c}+t'\right)dt'$$
$$-\frac{f'}{4h}\int_{x/c}^{t}F\left(\frac{x}{c}-t'\right)dt'-\frac{k}{4h^2}\int_{-x}^{x}\left|F\left(\frac{x'}{c}-t\right)-f\right|\left\{F\left(\frac{x'}{c}-t\right)\right.$$
$$\left.-f\right\}dx'-\frac{k}{4h^2}\int_{-x}^{x}\left|F-f\left(\frac{x'}{c}+t\right)\right|\left\{F-f\left(\frac{x'}{c}+t\right)\right\}dx',\tag{55}$$

式中除所示的自变量外，F的自变量是$x/c-t$，f的自变量是$x/c+t$。因为t可以取所有的正负值。函数

$$F\left(\frac{x'}{c}-t\right),\qquad f\left(\frac{x'}{c}+t\right)$$

仅在$x'=-x$时确定，尽管x自身不能为负。

常数c被认为是一个浅水项。只有确定了这个常数，才能断定高潮高度或低潮高度的浅水效应。

在一阶波谐和的特殊情况下，可得

$$F\left(\frac{x}{c}-t\right)=A\cos\sigma\left(\frac{x}{c}-t\right),\qquad f\left(\frac{x}{c}+t\right)=B\cos\sigma\left(\frac{x}{c}+t\right),$$

A、B、σ 是常数，式(55)中的第 5，第 6 和第 7 项变为

$$\frac{AB}{2h}\cos\sigma\left(\frac{x}{c}-t\right)\cos\sigma\left(\frac{x}{c}+t\right)-\frac{AB}{2h}\sin\sigma\left(\frac{x}{c}+t\right)\sin\sigma\left(\frac{x}{c}-t\right)$$

或

$$\frac{AB}{2h}\cos\frac{2\sigma x}{c}$$

这与时间无关，因此，描述的是一个无干扰的海面。

在外海，式中 $x=0$，方程(55)简化为

$$\zeta=F+f+c+\frac{Ff}{2h}+\frac{F'}{4h}\int_0^t f\,dt'-\frac{f'}{4h}\int_0^t F\,dt',$$

式中F的自变量是$-t$或$-t'$，f 的自变量是 t 或t'。当波谐和时，此式简化为

$$\zeta=F(-t)+f(t)+C+\frac{AB}{2h}。$$

假定式(55)中摩擦项的积分可以由它们范围的中间值更换，则结果可以写成

$$\zeta=F+f+c-\frac{3x}{2ch}(FF'+ff')+\frac{Ff}{2h}+\frac{F'}{4h}\int_{-x/c}^{t}f\left(\frac{x}{c}+t'\right)$$

$$dt'-\frac{f'}{4h}\int_{x/c}^{t}F\left(\frac{x}{c}-t'\right)dt'-\frac{1}{H}|F(-t)-f|\{F(-t)-f\}-$$

$$\frac{1}{H}|F-f(t)|\{F-f(t)\},\tag{56}$$

式中，除所示的自变量以外，F 的自变是$x/c-t$，f 的自变量是$x/c+t$。

9.均等断面河口内的驻波振荡

这是第 8 节问题的一个特殊情况。

假定河口的内端或“顶部”，已知 $x=0$ 有效，且取：

$$F\left(\frac{x}{c}-t\right)=E\left(t-\frac{x-a}{c}\right),\qquad f\left(\frac{x}{c}+t\right)=E\left(t+\frac{x-a}{c}\right)$$

式中E( )表示任一确实可能的函数。于是，在一阶波中，根据式(52)和(53)，得

$$\zeta=E\left(t-\frac{x-a}{c}\right)+E\left(t+\frac{x-a}{c},\right)\tag{57}$$

$$u=\frac{g}{c}\left\{E\left(t-\frac{x-a}{c}\right)-E\left(t+\frac{x-a}{c}\right)\right\},\tag{58}$$

而且，对 t 的所有值均有$x=a$，$u=0$。

当此一阶振荡在河口的顶部恰好谐和时，它在河口其它所有的断面亦恰好谐和。而要注意的是a/c是一阶行波沿河口长度移动所需的时间。

现在，要把注意力集中在河口顶部的条件上。

在一阶振荡中

$$\zeta=2E(t),$$

则一阶和二阶振荡的式(56)变为

$$\zeta=2E(t)+C+\frac{E^2(t)}{2h}-\frac{E'(t)}{4h}\left\{\int_{-a/c}^{t}E(t')\,dt'+\int_{a/c}^{t}E(t')dt'\right]$$
$$-\frac{1}{H}\left|E\left(t+\frac{a}{c}\right)-E(t)\right|\left\{E\left(t+\frac{a}{c}\right)-E(t)\right\}-\frac{1}{H}\left|E(t)\right.$$
$$\left.-E\left(t-\frac{a}{c}\right)\right|\left\{E(t)-E\left(t-\frac{a}{c}\right)\right\}, \quad (59)$$

此时H为$800h^2/a$，

若一阶振荡谐和，则

$$E(t)=A\cos\delta t,$$

式(59)的浅水项变为一个常数：

$$C+\frac{A^2}{2h}\cos^2\sigma t+\frac{A^2}{2h}\sin^2\sigma t=C+\frac{A^2}{2h},$$

当 t 接近高潮的值时，假定

$$E(t)>E\left(t-\frac{a}{c}\right)、\qquad E(t)>E\left(t+\frac{a}{c}\right)$$

则结果(59)得到下列形式

$$\zeta=2E(t)+C+\frac{E^2(t)}{2h}-\frac{E'(t)}{4h}\left\{\int_{-a/c}^{t}E(t')\,dt'+\int_{a/c}^{t}E(t')dt'\right\}$$
$$+\frac{1}{H}\left\{E\left(t-\frac{a}{c}\right)-E\left(t+\frac{a}{c}\right)\right\}\left\{2E(t)-E\left(t-\frac{a}{c}\right)\right.$$
$$\left.-E\left(t+\frac{a}{c}\right)\right\}, \quad (60)$$

现假定，在一阶振荡中，当 t = 0 时高潮出现，因此$E'=0$且$E''(0)$为负。此时，式(60)为

$$\zeta_{t=0}=2E(0)+C+\frac{E^2(0)}{2h}+\frac{1}{H}\left\{E\left(-\frac{a}{c}\right)-E\left(\frac{a}{c}\right)\right\}$$
$$\left\{2E(0)-E\left(-\frac{a}{c}\right)-E\left(\frac{a}{c}\right)\right\}, \quad (61)$$

如同第 5 节一样，由此式得到一个高潮高度的近似值。式(61)的摩擦项的正、负是由E(-a/c)大于或小于 E(a/c) 来决定的。若 E(t)对称于最大值，比如在谐和振荡的情况下，则有 E(-a/c) = E(a/c)，以及式(61)的摩擦项等于零。当 E(t)升到其最大值比从其最大值下降的更迅速时。从而有E(-a/c)<E(a/c)，于是式(61)的摩擦项是负的。在这种情况下，摩擦的效应能降低高潮的高度。

在此相同时间以及相同条件下，由(60)导出

$$\left(\frac{\partial\zeta}{\partial t}\right)_{t=0}=\frac{-E''(0)}{4h}\left\{\int_{-a/c}^{0}E(t')dt'+\int_{a/c}^{0}E(t')dt'\right\}$$
$$+\frac{2E'(-a/c)}{H}\left\{E(0)-E\left(-\frac{a}{c}\right)\right\}-\frac{2E'(a/c)}{H}\left\{E(0)-E\left(\frac{a}{c}\right)\right\} \quad (62)$$

此式的浅水项可以取正的，既然E'(-a/c)可以取正的，E'(a/c)可取负的。那么，摩擦项也是正的。如同第 5 节一样，得到高潮时间的近似值，即