广播电视大学教学参考书

理论力学习题解答

（下　册）

上海市业余工业大学力学教研室
上　海　电　视　大　学　编印

目　录

（下册）

第三篇　动　力　学

第四篇　动力学专题

第十二章　动力学基本方程

12-6　挂在钢索上的吊笼质量为15(t)，由静止开始匀加速上升，在3秒钟内上升了1.8(m)，试求钢索的拉力。钢索的自重略去不计。

解：以吊笼为研究对象。受力如图12-6。吊笼作匀加速直线运动，加速度向上。取直角坐标轴x铅垂向上。应用直角坐标形式的质点运动微分方程，得：

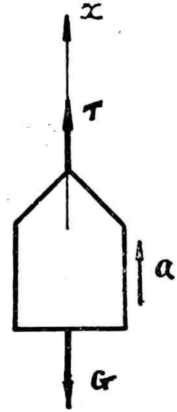
$$ma=T-G$$

$$T=ma+G=ma+mg$$

$$T=m(a+g)$$

因吊笼作匀加速直线运动，故

$$a=\frac{2x}{t^2}=\frac{2\times1.8}{3^2}=0.4(\mathrm{m/s^2})$$



题12-6图

将a及m、g值代入T式，得

$$T=15(0.4+9.8)=153(\mathrm{kN})$$

12-7　用绞车沿斜面提升质量为m的重物M，已知斜面的倾角为α，斜面与重物间的动滑动摩擦系数为f'。若绞车的鼓轮半径为r，且鼓轮按$\varphi=\frac{1}{2}\varepsilon t^2$($t$以秒计，$\varphi$以弧度计)的规律作匀加速转动，试求钢索的张力。

解：以重物M为研究对象。受力如图12-7所示。因鼓轮作匀加速转动，故重物也作匀加速直线运动，其加速度为：

$$a=r\ddot{\varphi}$$

$$\because \quad \ddot{\varphi}=\varepsilon$$

$$\therefore \quad a=r\varepsilon$$

取直角坐标如图，由质点运动微分方程，得

$$ma=T-F'-G\sin\alpha \tag{1}$$

$$0=N-G\cos\alpha \tag{2}$$

由(2)得 $N=G\cos\alpha$

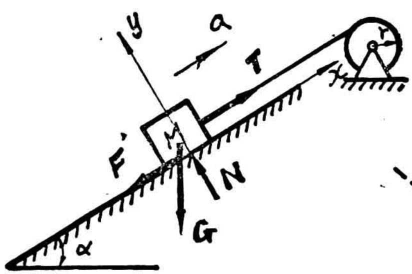
而 $F'=f'N=f'G\cos\alpha$

代入(1) $ma=T-f'G\cos\alpha-G\sin\alpha$

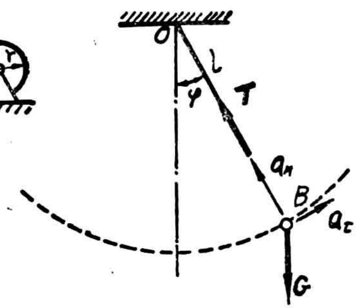
$$T=ma+G(f'\cos\alpha+\sin\alpha)$$

以 $a=r\varepsilon$, $G=mg$ 代入

$$T=mg\left(\frac{r\varepsilon}{g}+f'\cos\alpha+\sin\alpha\right)$$



题 12-7 图



题 12-8 图

12-8 单摆的摆长为 l，摆锤质量为 m，按 $\varphi=\varphi_0\sin\sqrt{\frac{g}{l}}t$ (t 以秒计，φ 以弧度计)的规律作微幅振动，式中 φ_0 为常量，g 为重力加速度。求摆锤经过最高位置和最低位置的瞬时绳中的张力。

解: 以摆锤为研究对象。受力如图 12-8。因单摆作微幅

振动，取自然坐标轴，质点运动微分方程的法向投影式为

$$ma_n = T - G\cos\varphi \tag{1}$$

因

$$\varphi = \varphi_0 \sin\sqrt{\frac{g}{l}}\,t \tag{2}$$

$$\dot{\varphi} = \varphi_0\sqrt{\frac{g}{l}}\cos\sqrt{\frac{g}{l}}\,t \tag{3}$$

故

$$a_n = l\dot{\varphi}^2 = \varphi_0^2 g\cos^2\sqrt{\frac{g}{l}}\,t$$

代入(1)

$$m\varphi_0^2 g\cos^2\sqrt{\frac{g}{l}}\,t = T - mg\cos\varphi$$

$$T = mg\left(\varphi_0^2\cos^2\sqrt{\frac{g}{l}}\,t + \cos\varphi\right) \tag{4}$$

(1)摆锤在最高位置时；

$$v = 0 \quad l\dot{\varphi} = 0$$

$$\because \quad l \neq 0 \quad \therefore \quad \dot{\varphi} = 0$$

由式(3)

$$\varphi_0\sqrt{\frac{g}{l}}\cos\sqrt{\frac{g}{l}}\,t = 0$$

故

$$t = \sqrt{\frac{l}{g}}\cdot\frac{\pi}{2}$$

代入(2)得

$$\varphi = \varphi_0$$

将 t, φ 值代入(4)，得

$$T_1 = mg\cos\varphi_0$$

(2)摆锤在最低位置时；

$$\varphi = 0^\circ$$

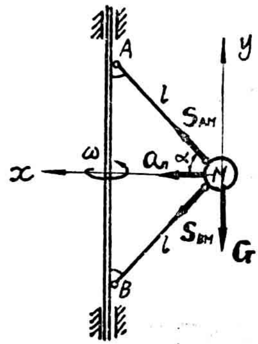
由式(2)

$$\varphi_0\sin\sqrt{\frac{g}{l}}\,t = 0$$

$$t=\sqrt{\frac{l}{g}}\pi \quad (t\text{ 的非另解})$$

代入(4) $$T_2=mg(\varphi_0^2+1)$$

12-9 质量为m的球用两根各长 l 的杆支持如图。球和杆一起以匀角速度ω绕铅垂轴AB转动。如$AB=2a$，杆的两端均为铰接。杆重忽略不计。求各杆所受的力。



题 12-9 图

解：以球为对象。因杆重不计，杆为两力杆，球的受力情况如图。因为球绕轴作匀角速转动，故而只有法向加速度。

$$a_n=\omega^2\sqrt{l^2-a^2}$$

取直角坐标轴，则由运动微分方程可得

$$m\omega^2\sqrt{l^2-a^2}=S_{AM}\cos\alpha+S_{BM}\cos\alpha \tag{1}$$

$$0=S_{AM}\sin\alpha-S_{BM}\sin\alpha-G \tag{2}$$

由(2)

$$S_{BM}=S_{AM}-\frac{G}{\sin\alpha} \tag{3}$$

(3)代入(1) $$m\omega^2\sqrt{l^2-a^2}=S_{AM}\cos\alpha+\left(S_{AM}-\frac{mg}{\sin\alpha}\right)\cos\alpha$$

$$\because\quad \cos\alpha=\frac{\sqrt{l^2-a^2}}{l}\quad \sin\alpha=\frac{a}{l}$$

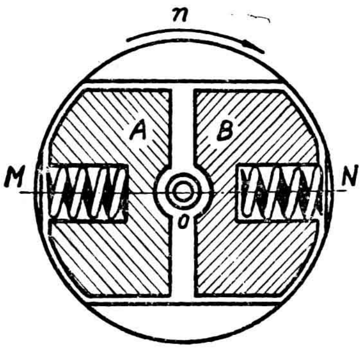
$$\therefore\quad m\omega^2\sqrt{l^2-a^2}=2S_{AM}\frac{\sqrt{l^2-a^2}}{l}-mg\frac{\sqrt{l^2-a^2}}{a}$$

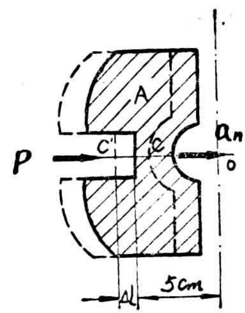
$$S_{AM}=\frac{ml}{2}\left(\omega^2+\frac{g}{a}\right)=\frac{ml}{2a}(a\omega^2+g)$$

代入(3) $$S_{BM}=\frac{ml}{2a}(a\omega^2+g)-mg\frac{l}{a}$$

$$S_{BM}=\frac{ml}{2a}(a\omega^2-g)$$

12-10 调速器内有二重块 A、B，质量各为 30(kg)，可沿调速器的直径方向 MN 滑动。两重块分别用弹簧连接在 M、N 两点，其重心分别同弹簧的末端重合。弹簧的刚度 $k=196$(N/cm)，弹簧在没有变形时其末端到 O 轴的距离等于 5(cm)。当调速器以 $n=120$(r/min)绕铅垂轴 O 匀速转动时，求重块的重心到 O 轴的距离。





题 12-10 图

解：以重块 A 为对象，转动时弹簧被压缩 Δl 单位：cm，对重块在法线方向作用一压力 $\boldsymbol{P}$。应用质点运动微分方程的法向投影式，可得

$$ma_n=P$$

因 $$a_n=OC'\cdot\omega^2=(5+\Delta l)\left(\frac{\pi n}{30}\right)^2=(5+\Delta l)\left(\frac{120\pi}{30}\right)^2$$

$$=(5+\Delta l)16\pi^2=80\pi^2+16\pi^2\Delta l$$

$$=0.8\pi^2+0.16\pi^2\Delta l(\mathrm{m/s^2})$$

又因 $$P=k\Delta l=196\Delta l$$

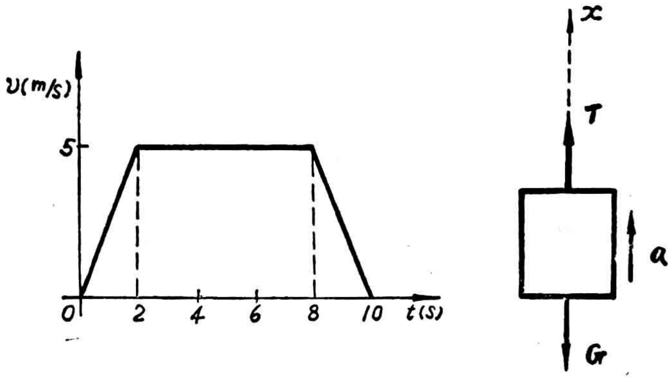
将 m、a_n 与 P 代入运动微分方程

$$196\Delta l = 30(0.8\pi^2 + 0.16\pi^2 \Delta l)$$

整理后得 $$\Delta l = \frac{236.63}{196 - 47.33} = 1.59(\text{cm})$$

因而 $$OC' = 5 + 1.59 = 6.59(\text{cm})$$

12-11 电梯质量 480(kg),上升时速度的变化如图所示。求在时间 $t=0\sim2$、$2\sim8$、$8\sim10$(s)这三个阶段内悬挂电梯的钢丝绳所受的拉力 $\boldsymbol{T}_1$、$\boldsymbol{T}_2$ 和 $\boldsymbol{T}_3$。



题 12-11 图

解:以电梯为对象,受力如图。根据其速度图可知:

$$t=0\sim2(\text{s}) \qquad a_1 = \frac{5}{2} = 2.5(\text{m/s}^2)$$

$$t=2\sim8(\text{s}) \qquad a_2 = 0$$

$$t=8\sim10(\text{s}) \qquad a_3 = -\frac{5}{2} = -2.5(\text{m/s}^2)$$

取 x 轴铅垂向上,则运动微分方程为

$$ma = T - G$$

$$T = m(a+g)$$

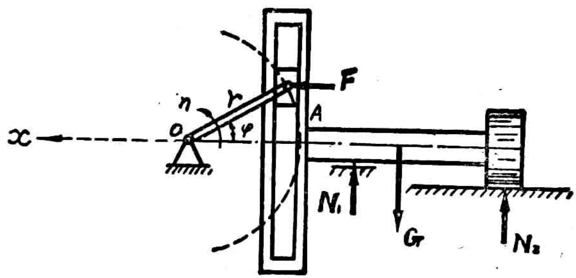
$t=0\sim2(\mathrm{s})\qquad T_1=480(2.5+9.8)=5904(\mathrm{N})$

$t=2\sim8(\mathrm{s})\qquad T_2=480\times9.8=4704(\mathrm{N})$

$t=8\sim10(\mathrm{s})\qquad T_3=480(9.8-2.5)=3504(\mathrm{N})$

12-12 在曲柄滑槽机构中,活塞和滑槽的质量共为50(kg)。曲柄OA长$r=30(\mathrm{cm})$,绕轴O作匀速转动,转速$n=120(\mathrm{r/min})$。求当曲柄在以下两位置时,滑块作用在滑槽上的水平力:

(1) $\varphi=0°$　　　　(2) $\varphi=90°$



题 12-12 图

解: 以滑槽和活塞为对象;受力及坐标如图所示。其速度方程为

$$\dot{x}=r\omega\sin\varphi=r\omega\sin\omega t$$

而加速度方程

$$\ddot{x}=r\omega^2\cos\omega t=r\omega^2\cos\varphi \tag{1}$$

运动微分方程

$$m\ddot{x}=F \tag{2}$$

(1)代入(2)

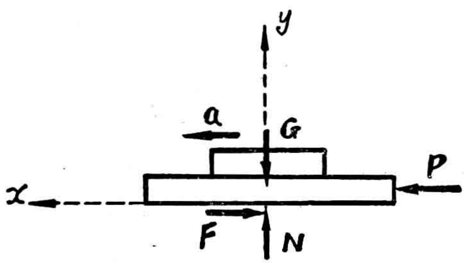
$$F=mr\omega^2\cos\varphi=mr\left(\frac{\pi n}{30}\right)^2\cos\varphi$$

$$=50\times0.3\times16\pi^2\cos\varphi=2366\cos\varphi(\mathrm{N})$$

当 $\varphi=0°\qquad F_1=2366\cos0°=2366(\mathrm{N})$

$\varphi=90°\qquad F_2=2366\cos90°=0$

12-13 龙门刨床的工作台连同其上的工件质量共为1000(kg)，台面移动的速度为 $v=0.5$(m/s)。把台面从静止驱动到 $v=0.5$(m/s)需要的时间为0.5(s)。假定在驱动阶段台面作匀加速运动，且驱动时台面与平导轨之间的动摩擦系数 $f_1=0.14$，而台面匀速移动时动摩擦系数 $f_2=0.07$。求空程时驱动台面的力 $\boldsymbol{P}_1$ 和使台面作匀速运动所需的力 $\boldsymbol{P}_2$。



题 12-13 图

解：以工作台连同工件为对象。受力如图 12-13 所示。取运动方向为 x 轴，铅垂方向为 y 轴，列运动微分方程

$$ma=P-F \tag{1}$$

$$0=N-G \tag{2}$$

由(2)式

$$N=G$$

$$\because \quad F=fN=fG$$

$$\therefore \quad F=fmg$$

将 F 代入(1)

$$P=m(a+fg) \tag{3}$$

(1)匀加速时：

$$a=\frac{v}{t}=\frac{0.5}{0.5}=1(\mathrm{m/s^2})$$

$$f=f_1=0.14$$

将 a、f_1 代入(3)

$$P_1 = m(a + f_1 g) = 1000(1 + 0.14 \times 9.8)$$

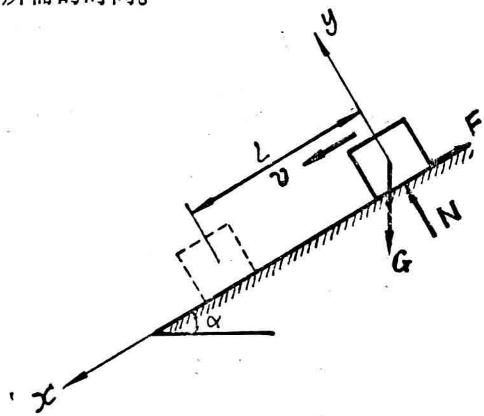
$$P_1 = 2372(\mathrm{N})$$

(2)匀速时:　　　$a = 0 \quad f = f_2 = 0.07$

由式(3)　　　$P_2 = m f_2 g = 1000 \times 0.07 \times 9.8$

$$P_2 = 686(\mathrm{N})$$

12-15　一物体沿倾角为 α 的斜面向下运动。设物体的初速度为零，物体与斜面间的动摩擦系数 f 为常数，试求物体经过路程 L 时所需的时间。



题 12-15 图

解: 取物体为研究对象，受力及坐标如图，物体作直线运动，其运动微分方程为

$$m\ddot{x} = G\sin\alpha - F \tag{1}$$

$$0 = N - G\cos\alpha \tag{2}$$

由(2)　　　$N = G\cos\alpha$

代入(1)　$m\ddot{x} = G\sin\alpha - fG\cos\alpha = mg(\sin\alpha - f\cos\alpha)$

两边积分，并根据初始条件:

$$t = 0 \quad \dot{x} = 0$$

$$\int_0^{\dot{x}} d\dot{x} = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)\int_0^t dt$$

$$\dot{x} = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)t$$

再积分：

$$\int_0^L dx = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)\int_0^t t\,dt$$

$$L = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)\frac{t^2}{2}$$

$$t = \sqrt{2L/g(\sin\alpha - f\cos\alpha)}$$

12-16 列车以72(km/h)的速度在水平轨道上行驶。如制动后列车所受的阻力等于列车重量的0.2倍，试求列车在制动后多少时间，并经过多少距离而停止。

解：以列车为对象，运动方向为x轴。阻力与运动方向相反，列运动微分方程：

$$m\ddot{x} = -F$$

$$\because \quad F = 0.2G = 0.2mg$$

$$\therefore \quad \ddot{x} = -0.2g$$

两边积分，并由初始条件：

$$t=0 \quad \dot{x} = \dot{x}_0$$

$$\int_{\dot{x}_0}^0 d\dot{x} = \int_0^t -0.2g\,dt$$

$$\dot{x}_0 = 0.2gt$$

$$t = \frac{\dot{x}_0}{0.2g}$$

$$\because \quad \dot{x}_0 = \frac{72\times10^3}{60^2}$$

$$\therefore \quad \text{制动时间} \quad t = \frac{72\times10^3}{60^2}\times\frac{1}{0.2\times9.8} = 10.2(\text{s})$$

$$\because \quad \frac{dx}{dt} = 0.2gt$$

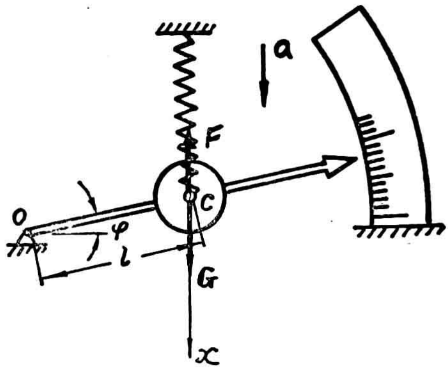
两边积分：

$$\int_0^L dx = \int_0^t 0.2gtdt$$

∴ 制动距离 $L = 0.2g \times \dfrac{t^2}{2} = 0.1 \times 9.8 \times 10.2^2$

$$\doteq 102(\text{m})$$

12-17 潜水器中的加速度测量仪如图示。当潜水器加速下沉时，指针对水平线有一极小的偏角 φ。已知弹簧的刚度为 k，球 C 的质量为 m，距离 $OC=l$。平衡时指针在水平位置。不计指针质量，求潜水器的铅垂加速度。



题 12-17 图

解：以球 C 为研究对象。受力如图，因求铅垂方向加速度，故取 x 轴铅垂向下，其运动微分方程为：

$$m\ddot{x} = G - F$$

其中 F 力，因偏角极小，可仍作为铅垂方向，其大小为：

$$F = k\left(\frac{G}{k} - l\varphi\right)$$

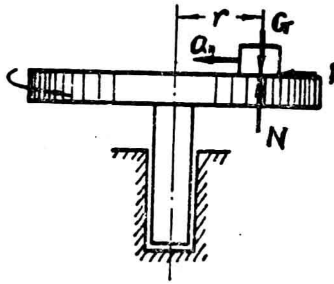
其中 $\dfrac{G}{k}$ 为弹簧在平衡时的变形值。将 F 值代入运动微分方程

$$ma = G - k\left(\frac{G}{k} - l\varphi\right) = kl\varphi$$

$$a = \frac{kl\varphi}{m}$$

12-18 一质量为 m 的物块放在匀速转动的水平台上，其重

心距转轴的距离为 r。如物块与台面之间的摩擦系数为 f，求物块不致因转台旋转而滑出的最大速度。



题 12-18 图

解：以物块为对象，受力如图。因物块作匀速圆周运动，按质点运动微分方程的法向投影式有：

$$ma_n = F$$

$$m\frac{v^2}{r} = F$$

当 F 达到极值时，物体处于将动未动状态，这时的速度即 v_{max}。因此

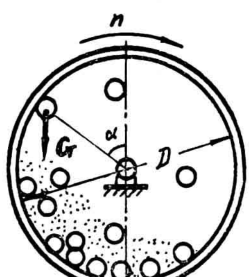
$$m\frac{v_{\max}^2}{r} = Nf$$

$$\because \quad N = G = mg$$

$$\therefore \quad v_{\max}^2 = rgf$$

$$v_{\max} = \sqrt{rgf}$$

12-19 研细矿石用的球磨机滚筒可绕水平轴转动如图示。当滚筒转动时又可带动装在筒内的锰钢球一起运动。待转到一定角度 α 时钢球即离开滚筒内壁沿抛物线轨迹落下打击矿石。现已知当 $\alpha = 54°40'$ 时钢球脱离滚筒可以得到最大的打击力。设滚筒直径 $D = 3.2(\mathrm{m})$，试求滚筒应有的转速。



题 12-19 图

解：取锰钢球为对象，当球达到 α 角时，即将脱离筒壁，故球上只有重力作用，沿法向列微分方程：

$$mr\omega^2 = G\cos\alpha$$

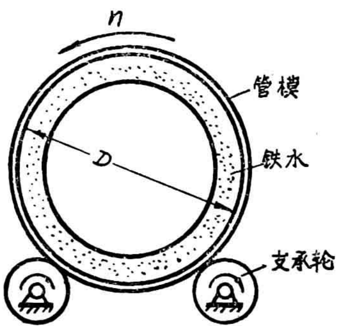
$$mr\left(\frac{\pi n}{30}\right)^2 = mg\cos\alpha$$

$$n = \sqrt{\frac{30^2 \times g\cos\alpha}{r\pi^2}}$$

以 α 及 r 值代入:

$$n = \sqrt{\frac{30^2 g\cos 54°40'}{1.6\pi^2}} \doteq 18(\mathrm{r/min})$$

12-20 图示离心浇铸装置中,电动机带动支承轮作同向转动,管模放在这两轮上靠摩擦而旋转。铁水注入后由于惯性作用,将均匀地紧贴管模的内壁而自动成型,从而可得质量密实的管形铸件。若已知管模内径 $D=400(\mathrm{mm})$,试求管模应有的最低转速 n。



题 12-20 图

解:以一个铁水粒子为研究对象。为使铁水能紧贴管模内壁,铁水粒子应能达到管模最高位置,依此位置沿法向列微分方程

$$mr\omega^2 = G = mg$$

$$r\left(\frac{\pi n}{30}\right)^2 = g$$

$$n = \sqrt{\frac{30^2 \times g}{r\pi^2}} = \sqrt{\frac{30^2 \times 9.8}{0.2\pi^2}} \doteq 67(\mathrm{r/min})$$

12-21 质量为 m 的质点受已知力作用沿直线运动,该力按规律 $F=F_0\cos\omega t$ 而变化,其中 F_0、ω 为常数。当开始运动时,质点已具有初速度 $\dot{x}_0 = v_0$,求此质点的运动方程。

解: 因质点作直线运动,以运动方向为 x 轴,列微分方程,

得

$$m\ddot{x}=F=F_0\cos\omega t$$

将上式两次积分，并以初始条件：

$t=0$ 时 $v=v_0$ $x=0$ 为上下限，可得

$$\int_{v_0}^{\dot{x}} m d\dot{x}=\int_0^t F_0\cos\omega t\,dt$$

$$m(\dot{x}-v_0)=\frac{F_0}{\omega}\sin\omega t$$

$$\dot{x}=v_0+\frac{F_0}{m\omega}\sin\omega t$$

$$\int_0^x dx=\int_0^t\left(v_0+\frac{F_0}{m\omega}\sin\omega t\right)dt$$

$$x=v_0t+\frac{F_0}{m\omega^2}[-\cos\omega t]_0^t$$

$$x=v_0t+\frac{F_0}{m\omega^2}(1-\cos\omega t)$$

12-22 滑翔机受空气阻力 $\boldsymbol{R}=-km\boldsymbol{v}$ 作用，其中 k 为比例系数，m 为滑翔机质量，$\boldsymbol{v}$ 为滑翔机速度。若 $t=0$ 时，$v=v_0$，试求滑翔机由瞬时 $t=0$ 到任意瞬时 t 所飞过的距离。假定滑翔机是沿水平直线飞行的。

解：因滑翔机作水平直线飞行，取运动方向为 x 轴，其微分方程为

$$ma=R=-kmv$$

$$\frac{dv}{dt}=-kv$$

分离变量 $$\frac{dv}{v}=-kdt$$

由初始条件：$t=0$ $v=v_0$ 对两边积分

$$\int_{v_0}^{v}\frac{dv}{v}=\int_0^t -kdt$$

$$\ln\frac{v}{v_0}=-kt$$

$$\frac{v}{v_0}=e^{-kt}$$

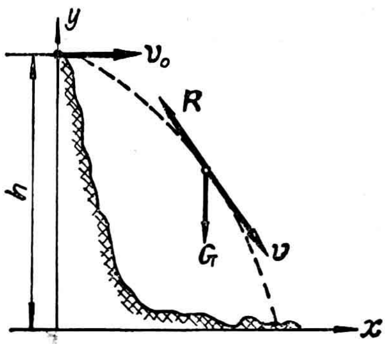
$$v=v_0e^{-kt}$$

由初始条件：$t=0$ $x=0$ 再行积分

$$\int_0^x dx=\int_0^t v_0e^{-kt}dt$$

$$x=\frac{v_0}{k}[-e^{-kt}]_0^t=\frac{v_0}{k}(1-e^{-kt})$$

12-23 将一物体自高 h 处以速度 v_0 水平抛出。设空气阻力为 $\boldsymbol{R}=-km\boldsymbol{v}$，其中 m 为物体的质量，$\boldsymbol{v}$ 为物体的速度，k 为常数。求物体的运动方程和轨迹。



题 12-23 图

解：以物体为对象，受力如图，为求轨迹取直角坐标轴，列微分方程

$$m\ddot{x}=R_x=-km\dot{x} \quad (1)$$

$$m\ddot{y}=R_y-G$$

$$=-km\dot{y}-mg \quad (2)$$

由(1) $$\ddot{x}=-k\dot{x}$$

分离变量，并积分。初始条件为 $t=0$，$\dot{x}=v_0$

$$\int_{v_0}^{\dot{x}}\frac{d\dot{x}}{\dot{x}}=\int_0^t -kdt$$

$$\ln\frac{\dot{x}}{v_0}=-kt$$

$$\dot{x}=v_0e^{-kt}$$