解析几何题解

☆

新疆广播师范大学

一九七九年

说　　明

本题解包括平面解析几何，空间解析几何两大部分，按章次分类，共编入四百三十余题。空间部分只作学员自学参考。编写此题解的目的在于：弥补广播教学不能面授，没有处理习题机会之不足。在解法上力求指出解题思路，而省略不必要的运算过程，以减少篇幅。

本题解中的习题取自 N．N．普立瓦洛夫著、苏步青译《解析几何学》（高等教育出版社，1956年1月版），解答是在新疆大学数学系张华孝、齐文华二同志解答手稿的基础上整理的，在排印工作上承蒙新疆新华印刷厂给予大力支持，在此一并表示感谢。

由于解答，审校时间短促，水平有限，错误和不妥之处在所难免，望广大学员批评指正。

广播师大数学组

目　　录

(一)平面解析几何…………………………… 1

第一章　坐标法…………………………………… 1
第二章　曲线及其方程………………………… 31
第三章　直线…………………………………… 58
第四章　圆锥截线的基本理论……………… 105
第五章　坐标变换和曲线分类……………… 163
第六章　二阶和三阶行列式………………… 178
第七章　一般二次方程的研究……………… 190

(二)空间解析几何…………………………… 235

第一章　空间坐标法………………………… 235
第二章　矢量代数学基础…………………… 250
第三章　方程的几何意义…………………… 264
第四章　平面………………………………… 267
第五章　直线………………………………… 294
第六章　圆柱和锥面，旋转曲面，二阶曲面……… 328

（一）平面解析几何

第一章　坐 标 法

1. 在一定比例尺单位下，作出下列各对坐标所决定的点：

$x=2$，$y=5$；$x=-3$，$y=0$；　$x=3$，　$y=-4$；

$x=0$，$y=4$；$x=3$，　$y=-3$；$x=\sqrt{2}$，$y=1$。

【解】 作图如下（图 1-1-1）仅需注意 $x=\sqrt{2}=\sqrt{1+1}$ 系以选定比例尺单位 0.5cm 为边的正方形的对角线长。

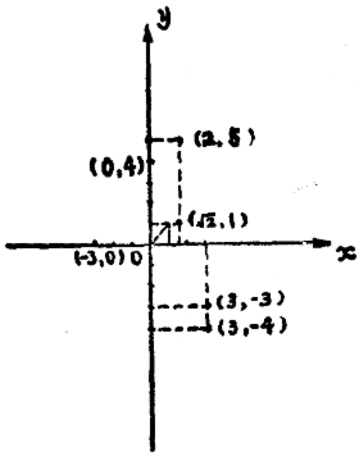

图 1-1-1

2．一定点的坐标是$x=5$，$y=-2$．求这点关于横轴的对称点的坐标。

【解】 点（5，－2）关于横轴的对称点为（5，2）.（图1-1-2）

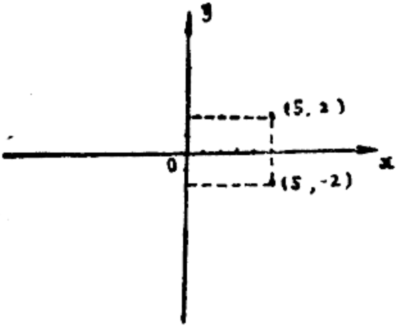

图 1-1-2

3．求点$A(2,-4)$关于第Ⅰ和第Ⅲ坐标角的平分线的对称点B．

【解】 求点(x,y)关于Ⅰ Ⅲ坐标角的平分线的对称点，只需调换纵、横坐标，即(x,y)便是(x,y)关于Ⅰ、Ⅲ坐标角平分线的对称点，故点$A(2,-4)$关于Ⅰ、Ⅲ坐标角平分线的对称点是$B(-4,2)$。如图1-1-3。

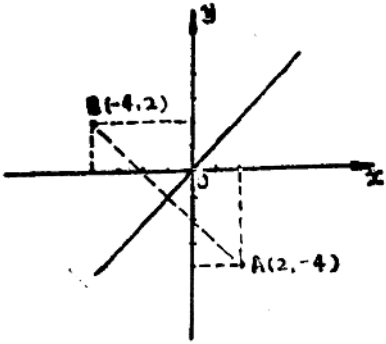

图 1-1-3

4．求点 $A(a,b)$关于横轴的对称点的坐标。

【解】 由关于横轴的对称点的定义，对称点的横坐标相同，而纵坐标的绝对值相同，符号相反。故点 $A(a,b)$关于横轴的对称点应为$B(a,-b)$。

5．求点$A(a,b)$关于纵轴的对称点的坐标。

【解】 由关于纵轴的对称点的定义，对称点的纵坐标相同，而横坐标的绝对值相同，符号相反。点$A(a,b)$关于纵轴的对称点应为 $B(-a,b)$．

6．求点$A(a,b)$关于坐标原点的对称点的坐标。

【解】 点$A(a,b)$关于坐标原点的对称点，实际上经关于纵、横轴两次轴对称得到。由习题 4、5 立刻得知，它的坐标应为$(-a,-b)$。

7．证明 $A_1(a,b)$ 关于第Ⅰ和第Ⅲ坐标角的平分线的对称点A_2必有坐标(b,a)。

【证】 如图1-1-4。

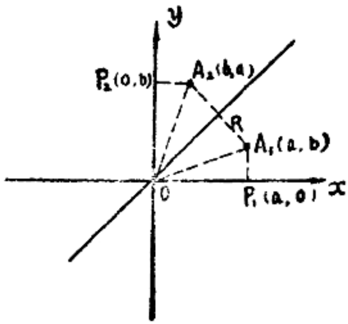

图 1-1-4

$A_1(a,b)$关于第Ⅰ和第Ⅲ坐标角的平分线的对称点A_2，实际由坐标系关于第Ⅰ、Ⅲ坐标角的平分线摺叠得到。摺叠相当于纵、横坐标互换。因而A_2的坐标是(b,a)．

不难看出

$$\triangle OP_2A_2 \cong \triangle OP_1A_1$$

$$\therefore \quad \angle P_2OA_2 = \angle P_1OA_1$$

$$OA_2 = OA_1$$

由此可得：

（1）$\triangle OA_1A_2$是等腰三角形，

（2）OR是$\angle A_1OA_2$的平分线，

故点A_1与A_2关于OR是对称的。

8．正方形的每边等于2单位长。如果把它的不平行的两边装到坐标轴上，那末正方形的各顶点的坐标应是什么？

【解】 如(图1-1-5)所示，正方形$OABC$放置如题要求。放置在Ⅰ象限。顶点O为坐标原点。

由坐标定义知：

$O(0,0)$；$A(2,0)$；$B(2,2)$，$C(0,2)$.

（如放置于其它象限，坐标又有不同，从略）

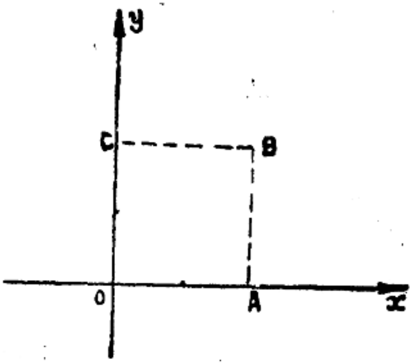

图 1-1-5

9．正方形的每边等于2单位长。如果把它的两对角线

放到坐标轴上，那末正方形各顶点的坐标各是什么？

【解】 如题要求，正方形 $ABCD$ 边长为 2，对角线放置于坐标轴上。如（图1-1-6）。

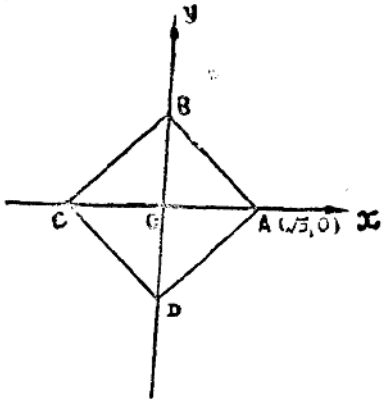

图 1-1-6

由勾股弦定理知

$$OA=OB=OC=OD=\sqrt{2}.$$

又由坐标定义知：

$A(\sqrt{2},0)$；$B(0,\sqrt{2})$；$C(-\sqrt{2},0)$；$D(0,-\sqrt{2})$。

10. 菱形的每边是 5 单位长，它有一对角线是 6 单位长。若把菱形的两对角线放到两坐标轴上，那末它的各顶点的坐标是什么？

【解】（1）如（图1-1-7）所示，若将 6 单位长的对角线放置于 x 轴上，得菱形 $ABCD$. 由勾股弦定理

$$OA=\sqrt{AB^2-OB^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$$

由菱形关于对角线的对称性立刻得知：

$A(4,0)$；$B(0,3)$；$C(-4,0)$；$D(0,-3)$。

（2）菱形 $A'B'C'D'$ 的 6 单位长的对角线放置在 y 轴上，同样理由，可知：

$A'(3,0)$；$B'(0,4)$；$C'(-3,0)$；$D'(0,-4)$。

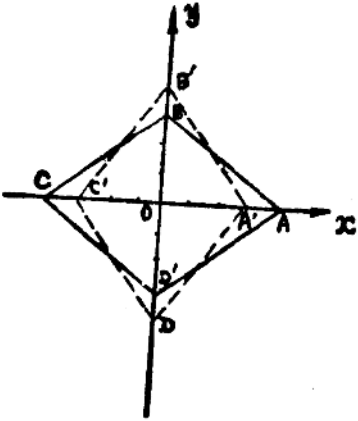

图 1-1-7

11. 有一正六边形，它的中心被放在坐标原点而且两个对顶点落在横轴上。假设正六边形的一边长是 a，求它的各顶点的坐标。

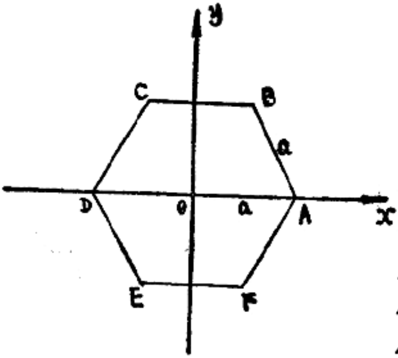

图 1-1-8

【解】 作以原点 O 为中心，半径为 a 的圆。并以圆和轴 x 的交点为正六边形的顶点 A，作正六边形。则 $ABCDEF$ 为所要求的正六边形。顶点 B 可以看

作半径 OA 按反时针方向旋转$\frac{\pi}{3}$得到。由此 B 点坐标：

$$x=a\cos\frac{\pi}{3}=\frac{a}{2},\quad y=\frac{\sqrt{3}}{2}a.$$

注意到顶点 C,D 分别是顶点 B,A 关于 y 轴的对称点，E,F分别是C,B 关于 x 轴的对称点。我们得到：

$$A(a,0);\ B\left(\frac{a}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}a\right),\ C\left(-\frac{a}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}a\right)$$

$$D(-a,0);\ E\left(-\frac{a}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}a\right),\ F\left(\frac{a}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}a\right).$$

12. 沿直线运动着的一点从点 $A(-3,-2)$ 移到点 $B(4,5)$。试确定轴 ox 与这点运动方向间的角α。并求 A,B 两点的距离。

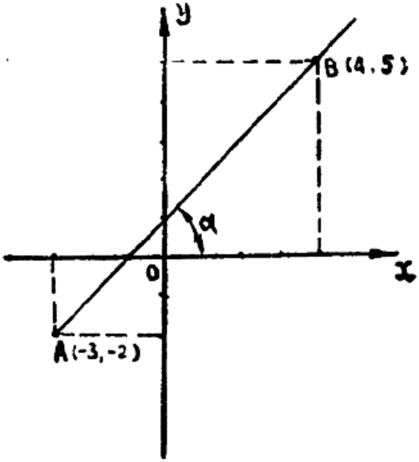

图 1-1-9

【解】 利用公式

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \text{ 和 } d=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{5-(-2)}{4-(-3)}=\frac{7}{7}=1 \text{ 由此 } \alpha=\frac{\pi}{4}.$$

$$d=\sqrt{(-3-4)^2+(-2-5)^2}=\sqrt{98}=7\sqrt{2}$$

13. 三角形的顶点是点$A(1,1)$，$B(-1,2)$和$C(3,3)$，它的三内角中有钝角吗？

【解】 如(图1-1-10)所示。显然$\angle A$较$\angle B$,$\angle C$为大，我们检查$\angle A$是否为钝角。

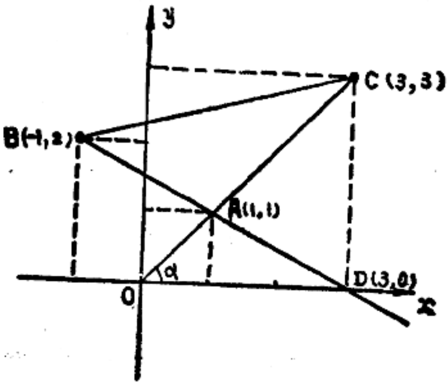

图 1-1-10

为此，考虑$\triangle OAD$

易知 $\alpha=\frac{\pi}{4}$

$$\operatorname{tg}\angle D=\frac{0+1}{3-1}=\frac{1}{2}<\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=1.$$

由反正切函数 arc tg x 在 $-\frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{4}$ 上的递增性知

$$\angle D=\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2}<\operatorname{arc\,tg}1=\alpha=\frac{\pi}{4},$$

$$\therefore\quad \angle D<\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{2},$$

由此 $\angle A=\pi-(\alpha+\angle D)=\pi-\left(\frac{\pi}{4}+\angle D\right)>\pi-\frac{\pi}{2}$

$$=\frac{\pi}{2}.$$

即 $\angle A$ 为钝角。

14．证明以 $A(3,2)$，$B(6,5)$，$C(1,10)$ 为三顶点的三角形是直角三角形。

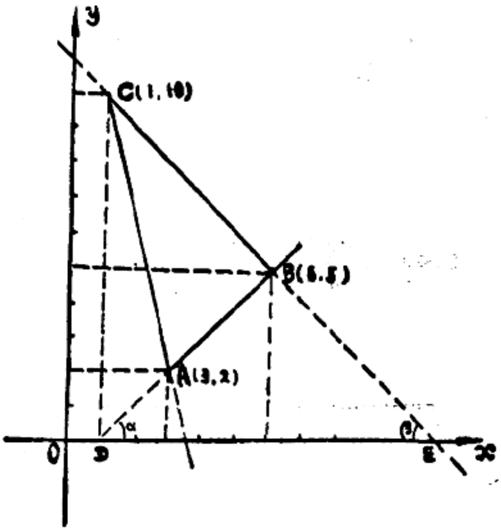

图 1-1-11

【证】 $\because k_{AB}=\frac{5-2}{6-3}=1$

$$k_{BC}=\frac{10-5}{1-6}=-1$$

又 $k_{AB}\cdot k_{BC}=-1$

故 $AB\perp BC$，从而 $\triangle ABC$ 为直角三角形。如(图1-1-11)

15．三角形的三顶点是 $A(2,3)$。$B(-3,3)$，$C(0,-1)$．求三角形的周长。

【解】 利用两点间距离公式。设 p 为 $\triangle ABC$ 周长，则

$$p=AB+BC+CA=\sqrt{(3-3)^2+(-3-2)^2}$$
$$+\sqrt{(-3-0)^2+(3+1)^2}+\sqrt{(0-2)^2+(-1-3)^2}$$
$$=5+5+\sqrt{20}=10+\sqrt{20}=10+2\sqrt{5}.$$

16．三角形的三顶点是 $A(2,1)$。$B(-2,3)$，$C(0,3)$．求三中线的长。

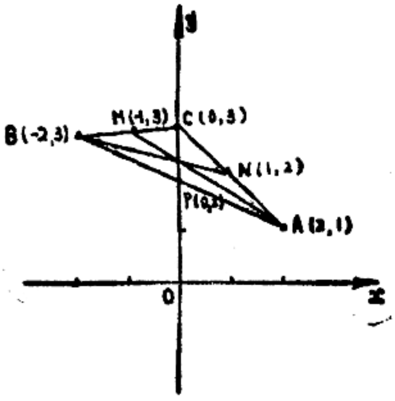

图 1-1-12

【解】 首先求各边的中点坐标。利用公式：

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}, \quad y=\frac{y_1+y_2}{2}.$$

分别得：

$$M(-1,3);\ N(1,2);\ P(0,2)$$

再利用两点间距离公式 $d=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$ 得三中线的长

$$AM=\sqrt{(2+1)^2+(1-3)^2}=\sqrt{9+4}=\sqrt{13},$$

$$BN=\sqrt{(-2-1)^2+(3-2)^2}=\sqrt{9+1}=\sqrt{10},$$

$$CP=\sqrt{(0-0)^2+(3-2)^2}=1.$$

17. 从点$(1,-1)$到点$(-4,5)$引线段。问应该沿同一方向延长到怎样的点，方使全长等于原长的三倍？

【解】 设延长后，满足题设条件的点为(x,y)，于是有方程：

$$\sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2}=3\sqrt{(1+4)^2+(-1-5)^2}$$

$$=3\sqrt{25+36}=3\sqrt{61}.$$

两端平方得：

$$(x-1)^2+(y+1)^2=549, \qquad (1)$$

另一方面有方程：

$$\frac{y+1}{x-1}=\frac{5+1}{-4-1},$$

$$y+1=-\frac{6}{5}(x-1). \qquad (2)$$

解方程组(1)(2)得：$\begin{cases}x=-14,\\y=17.\end{cases}$

(另一组解 $x=16$，$y=-19$ 不合题意，舍弃)

即点$(-14,17)$为所求点。

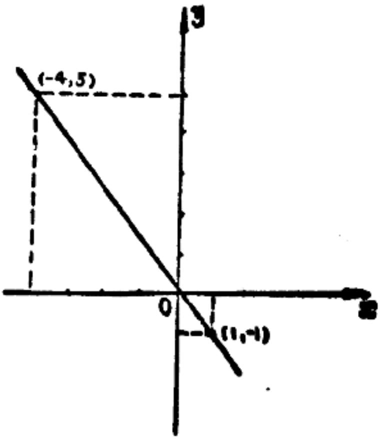

图 1-1-13

18. 在横轴上求出一点，使这点与坐标原点间的距离等于这点与点$(-5,3)$间的距离。

【解】 设所求点为$(x,0)$，于是有方程：

$$\sqrt{(x-0)^2+(0-0)^2}=\sqrt{(x+5)^2+(0-3)^2},$$

$$\sqrt{x^2}=\sqrt{(x+5)^2+9},$$

两端平方：$x^2=(x+5)^2+9$

$$10x+34=0.$$

解得：$$x=-\frac{34}{10}=-\frac{17}{5}=-3.4.$$

由此知所求点为$(-3.4;0)$.

19．求一点使它到两坐标轴和点$(3,6)$都有相等的距离。

【解】 设所求点为(x,y)，由题设得方程组：

$$\begin{cases}(x-3)^2+(y-6)^2=x^2\\ x=y\end{cases}$$

解方程组得：$$x_1=y_1=15;$$
$$x_2=y_2=3.$$

因此，所求点为$(15,15)$或$(3,3)$。

20．求一点使它离横轴和到点$(-5,2)$都有10单位长的距离

【解】 设所求点为(x,y)，由题设条件得方程组：

$$\begin{cases}y=10\\ (x+5)^2+(y-2)^2=100.\end{cases}$$

解方程组得：

$$\begin{cases}x_1=1\\ y_1=10;\end{cases}\qquad\begin{cases}x_2=-11\\ y_2=10.\end{cases}$$

故所求点为$(1,10)$；$(-11,10)$。

21．直线通过两点$A(2,4)$和$B(5,1)$。求其上横标等于-3的点。

【解】 设所求点为$(-3,y)$。

由定比分点的坐标公式得：

$$\begin{cases}-3=\dfrac{2+5\lambda}{1+\lambda} & (1)\\[2ex] y=\dfrac{4+\lambda}{1+\lambda} & (2)\end{cases}$$

解方程组得： $\lambda=-\frac{5}{8}$， $y=9$。

故所求点为$(-3,9)$。

22．两点$(x,5)$和$(-2,y)$间的线段在点$(1,1)$被平分。求出这两点。

【解】 由中点坐标公式得方程组：

$$\begin{cases}\frac{x-2}{2}=1\\ \frac{5+y}{2}=1\end{cases}$$

解得： $x=4$； $y=-3$。

由此所求两点为$(4,5)$；$(-2,-3)$

23．把两点$(0,2)$和$(8,0)$间的线段划分为两段，使其比等于这两点到坐标原点的距离之比。

【解】 由题设知：$\lambda=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$。设点$(x,y)$划分两点$(0,2)$，$(8,0)$间的线段为定比$\lambda=\frac{1}{4}$

于是有： $$x=\frac{0+\frac{1}{4}\times 8}{1+\frac{1}{4}}=1\frac{3}{5};$$

$$y=\frac{2+\frac{1}{4}\times 0}{1+\frac{1}{4}}=1\frac{3}{5}.$$

即所求点为$\left(1\frac{3}{5},1\frac{3}{5}\right)$。