

北京电视大学

数 学 系 讲 义

[数学分析部分]

第 三 册

甲

北京电视大学数学系編

1960年9月

目 录

第八章 非綫性振动

§1. 問題的提出	1
§2. 相平面	5
§3. 极限环	7
§4. 非綫性振动的近似方法	17
习题: 用小参数法解下列方程	24

第九章 运动稳定性理論

§1. 調速器的工作原理和运动穩定性的提出	25
§2. 一階綫性常係数齐次微分方程組解的穩定性問題	30
§3. 平衡点	34
习题解答 (第九章 §1 §2)	42
題解 (第九章 §3)	44
問題解答 (第九章 §5)	48
§4. 穩定性第二方法	49
§5. 非綫性系統穩定性問題应用	56
习题	67
复习思考題	67

第十章 微分方程的数值解法

§1. 初值問題的数值解法	69
§2. 边值問題及其数值解法	90
小結	99

第八章 非线性振动

从本世纪廿年代真空技术发明后，由于无线电技术的急速发展，对非线性振动提出了迫切的要求。这时描述物理过程不能把微分方程中非线性项忽略掉，这样的线性化不仅导致量的改变，而且引起质的差异。象非衰减振动的稳定产生，频率的牵引，强制同步化等这一类问题，只有在振动系统中引入了非线性元件后才能解决，因为在非线性振动中不可能存在着与初始条件无关的定常的振动状态。此外，非线性振动对电工，自动控制和远距离操纵也有极重要的意义。因此有必要讲述非线性系统的处理方法。

如前所说生产提出的振动问题通常可分为两类。一类要求产生周期振动，另一类要求防止振动，要求产生振动的问题提给我们的任务是：确定系统是否产生周期振动，又由于初状态和振动情况有密切关系，而初状态的测定总是有误差的，因此需要研究在初状态稍有改变时系统所产生的振动是否趋向于周期振动，是否另产生一种周期振动，振动的振幅与频率是多大。要在数学上对上述问题作出肯定回答，首先就是找出刻画这个系统振动过程的微分方程，然后再进一步，研究这方程有否周期解，及周期解是否稳定，唯一并确定它的频率振幅。

由于实际问题的需要，及列出的微分方程不易求解或求出解不能很清楚地看出解的性质。因此这一章不是要去找通解，而是根据微分方程本身的特点直接来确定解的性质。这就是定性研究的方法。在定性地肯定了微分方程的周期解的存在，稳定，唯一的基礎上，再定量地计算出它的振幅和频率，把问题彻底解决。可见定性方法与定量方法虽然是两种不同的研究方法，但在整个研究中是相辅相成的，定性研究是定量计算的根据，而通过定量计算才把问题彻底解决。

本章通过对等幅周期振荡电路的研究，来阐明解决非线性振动问题的一些重要方法。

§1. 问题的提出

以下我们来集中讨论等幅周期振荡电路问题，它在生产实践中（无线电通讯、无线电定位）有广泛的应用。这种电路是带三极管振荡电路（註一）中较简单和最有代表性的。

由电容器 C ，电阻 R 和线圈 L 串联就组成一个振荡回路如图(6.1)。

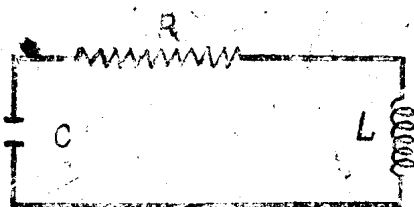
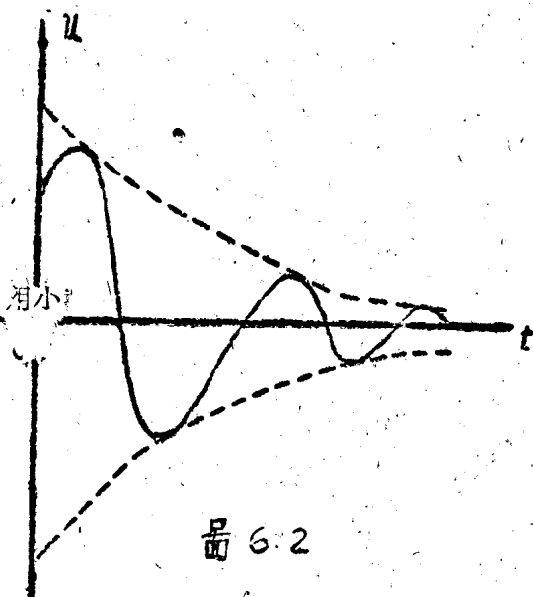
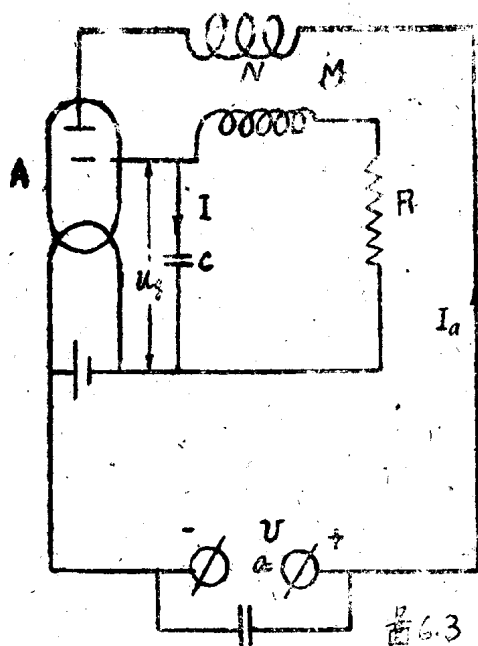


图 6.1

如果一开始给电容器充电，则以后在回路中就产生振荡。 $R-L-C$ 回路是产生振荡的最基本电路，但是它所产生的振荡是衰减的（图6.2）因为在电阻 R 中部分电能转换为热能。



如此要加一个能源，补偿能量以抵消耗（图6.3）就是实现补偿能量的一种通常设计。它是通过线圈 N 与 L 互感，而把能量不断输送到 $R-L-C$ 回路。这样在 $R-L-C$ 回路上就能产生等幅周期振荡。



现在我们的任务是从理论上确定该振荡器是否产生等幅周期振荡，这对设计振荡器的工作来说是十分重要的，因为振荡器能否产生等幅周期振荡与振荡器所用材料，原件等都有

關係，我們現就從理論上來確定這種關係，一般說來現成的振盪器能否產生等幅周期振盪，可用示波器測出來。但是還不能有把握地確定振盪的唯一性，即它只產生一種周期振盪，也不能有把握地肯定振盪的穩定性，所謂穩定性，就是在系統的初始狀態稍有改變時所產生的振盪趨向於等幅周期振盪，因此，需要從理論上來解決這些問題。

我們注意到振盪是在 $R-L-C$ 迴路產生的，因此只需考查 $R-L-C$ 迴路，特別地我們抓住電容 C 兩端之電壓，即翻極電壓 u_g 之變化，它刻劃了該迴路的振盪情況（見註一）由電學上克希霍夫第二定律可知，電路網中任一閉合迴路上各部分的電勢降之和等於各部分電動勢之和，現在我們來看 $R-L-C$ 迴路各部分電勢降和電動勢，取定電流 I 的方向如圖(6.3)在電

阻 R 上有電勢降 IR ；如果翻極電流不計，則在電容器 C 上有電勢降 $u_g = \frac{1}{C} \int_{t_0}^t I dt$ （根據

公式，電容器兩端電勢降 $U = \frac{Q}{C}$ 這裡電量 $Q = \int_{t_0}^t I dt$ ）繞圈 L 的自感係數為 L ，由於自

感產生的自感電動勢為 $-L \frac{dI}{dt}$ ，還有繞圈 N 上有板極電流 I_a 流過，而對繞圈 L 感應，

設其互感係數 M ，則產生互感電動勢為 $E = -M \frac{dI_a}{dt}$ 要使能量得到補償， L 與 N 的接法必須一定，使得互感電動勢 E 與 $R-L-C$ 的電勢降的方向相反。於是根據克希霍夫第二定律就有方程：

$$IR + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t I dt = -L \frac{dI}{dt} - \left(-M \frac{dI_a}{dt} \right)$$

$$\text{由於 } u_g = \frac{1}{C} \int_{t_0}^t I dt \quad \therefore I = C \frac{d u_g}{dt}$$

把上式入方程化簡得：

$$LC \frac{d^2 u_g}{dt^2} + RC \frac{d u_g}{dt} + u_g - M \frac{d I_a}{dt} = 0$$

我們注意的是翻極電壓 u_g 的變化，但上式中還含有板極電流 I_a 的微商。為此需要進一步找關係消去它。

在板極電流 I_a 不超過飽和的情況下，由電子管的特性可知 I_a 與 u_g 有一近似關係：

$$I_a = \sigma \left(u_g - \frac{u_g}{2u_s} \right)$$

其中 σ 為電子管的跨導， u_s 為對應的于板極飽和電流的翻極電壓。

將上式代入前方程得

$$LC \frac{d^2 u_g}{dt^2} + (M\sigma - RC - M\sigma \frac{u_g}{Ns}) \frac{d u_g}{dt} + u_g = 0$$

以 LC 除两边並令 $a = \frac{1}{LC}$ $b = \frac{M\sigma}{LC} - \frac{R}{L}$ $e = \frac{M\sigma}{LG}$

得
$$\frac{d^2 u_g}{dt^2} - b \left(1 - \frac{e}{bu_s^2} u_g^2 \right) \frac{du_g}{dt} + a u_g = 0$$

至此我們導出了刻划 u_g 变化的微分方程，但为了方便我們將進一步化簡，如消去最后一項 u_g 的係数作变换

$\tau = a^{-\frac{1}{2}} t$ 代入方程得：

$$\frac{d^2 u_g}{d\tau^2} - a^{-\frac{1}{2}} b \left(1 - \frac{au_g^2}{bu_s^2} \right) \frac{du_g}{d\tau} + u_g = 0$$

这时第二項 $\frac{d u_g}{d\tau}$ 的係数还很繁雜，我們再作变换 $x = \left(\frac{C}{b} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{u_s} u_g$ 此变换是 u_g

乘上一常数，因此，知道了 x 的变化規律，也就知道 u_g 的变化規律，再注意

$$u_g = \frac{1}{C} \int_{t_0}^t I dt$$

因此， x 相当于电容器 C 的电量，把变换代入就有

$$\frac{d^2 x}{d\tau^2} - \varepsilon (1 - x^2) \frac{dx}{d\tau} + x = 0$$

为了习惯方便将 τ 换成 t ，即

$$\frac{dx^2}{dt^2} - \varepsilon (1 - x^2) \frac{dx}{dt} + x = 0 \quad (1)$$

这就是等幅周期振盪方程（一些書上叫范德波方程）

其中参数 $\varepsilon = a^{-\frac{1}{2}} b = \left(\frac{1}{LC} \right)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{M\sigma}{LC} - \frac{R}{L} \right)$

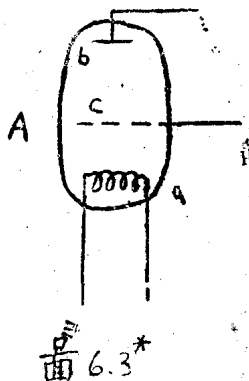
它由电路中各元件的物理性質确定。从电学上可知，它相当于能量的补偿与損耗之差。若 $\varepsilon > 0$ ，即补偿大于損耗时从 §5 中可知将产生稳定的等幅周期振盪，这是我們所不需要的。因此需要选择互感 M 相当大，使 $\varepsilon > 0$ 为了使振盪是等幅周期的。还需要控制电路中各元件，使之相当小，因此在以后的討論中我們把 ε 当作小参数（即 $0 < \varepsilon < 1$ ）来管理。

因为实际要求設計的振盪系統，产生与初值选择无关的周期振盪，而綫性方程不能描述这种現象，由此可见本問題不能綫性化处理，必須用非綫性系統來描述，这完全符合量变引起質变的客观規律。

下一步我們就把注意力轉到方程（1）是否有周期解及解的穩定性，唯一性的討論，並且把振盪的頻率計算出來。在解决具体問題的时候也就給出解問題的一般原則和方法。

〔註一〕三极电子管（燈泡）振盪电路：——

圖 (6.3) A 为三极管, 电子管为一直空管, a 为阴极一般称为絲极, b 为阳极一般称



为板极中间的 C 为栅极, 当絲极与板极的电势差充分大时, 阴极(絲极)上电子便紛紛飛向阳极, 栅极是起着攔欄的作用, 用来控制由絲极飛向板极的电子数目的。当栅极电压为負时, 絲极飛来的电子便不易通过和完全通不过; 反之, 当栅极电压为正时电子便大量通过, 因栅极是与 $R-L-C$ 振盪回路相連的, 故电压有时正有时負, 因而使 N 路上产生忽强忽弱的电流。

§2 相 平 面

我們要研究着幅周期振盪方程

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \epsilon(1-x^2) \frac{dx}{dt} + x = 0 \quad (1)$$

是否有周期解和解的性質。但方程(1)是非綫性的, 无法直接求解因此我們採用定性研究的方法。

注意(1)中的 x 代表电量(最多差一个常数因子)而在实际测量中往往是观察电流的波形。(1 = $\frac{dx}{dt}$)。为此要突出量 $\frac{dx}{dt}$ 来研究: 令 $y = \frac{dx}{dt}$ 則方程(1)为

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = \epsilon(1-x^2)y - x \end{cases} \quad (2)$$

然后在相平面($x-y$ 平面)上討論問題, 我們把相平面上的点称为相点。一般地形如

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = X(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = Y(x, y) \end{cases} \quad (3)$$

的方程(即右端函数不含自变量 t —— 这种系統, 称为自治系統)用相平面方法来研究是很

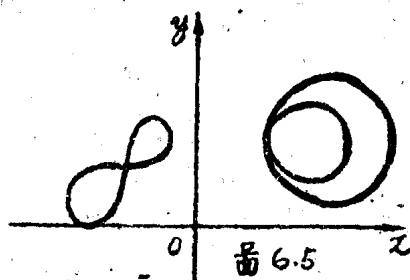
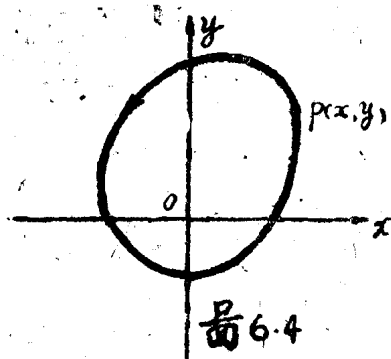
方便的。这时可以代替(3)考虑

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Y(x,y)}{X(x,y)} \quad (4)$$

它的积分曲线，称为方程组的轨道（註二）

相平面不同于一般坐标平面，相点不同于一般坐标点。它的坐标 (x,y) 有具体的物理意义（例如电量与电流、或位置与速度等等）一个相点表示运动过程中的一个状态，而相平面上的一条曲线反映一个运动过程。就自治系统而言，对于周期解来说，从一个运动状态出发经过周期 T 后仍回到原来的状态，反映在相平面上就形成一条封闭轨道，如图(6.4)（注意

这种轨道都是简单闭曲线图(6.5)的情况不会发生，因为在 $x-y$ 平面上 $\frac{dy}{dx} = \frac{Y(x,y)}{X(x,y)}$ 的解是存在唯一的，一点不可能有二个切线方向）

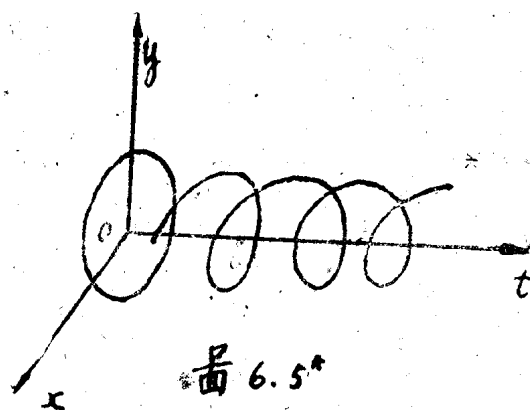


反过来，相平面上的闭轨道（简单闭曲线）一定对应于周期解，

事实上，从闭轨道上点 p 出发沿着闭轨道运动，经有限时间 T ，便回到 p 点（因为闭轨道上没有奇点）如此继续下去，周而复始，就构成周期性运动，其周期是 T 。这样对自治系统来说，考虑周期解的问题，就转化为在相平面考虑封闭轨道的问题。

註2：为了全面直观地了解主要量 x, y 和时间 t 的关系，引进三维空间 $\{x, y, t\}$ 那么 $\left\{ \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, 1 \right\}$ 表示了方程(2)在空间中的方向场，而方程(2)的解 $x=x(t), y=y(t)$ 就是空间中一条积分曲线，这样就形象地表示了量 x, y 随时间 t 的变化过程。

我们注意到方程(2)右端不显含 t ，因此方向场的方向不随时间改变，故任何一个平行 xy 平面上的方向场与 x, y 平面上的方向场相同。故对于方程(2)与(4)对应的方程 $\frac{dy}{dx} = \varepsilon(1 - x^2) - \frac{x}{y}$ 在相平面上的轨道是三维空间的积分曲线沿 t 轴方向在 x, y 平面上压缩。这一点是自治系统的特性。



§3 极 限 环

1. 等斜线法和极限环的概念:

我們要求上面的振荡电路产生等幅周期振荡, 並且要求这种振荡是稳定的。相应地就要研究方程有没有周期解的問題。在工程技术上常采用一种比較粗略, 但快速有效的方法, 这就是前面在綫性方程組里已經講过的等斜綫法, 在相平面上用等斜綫描出方向場, 作出方程(2)的軌道, 根据积分曲綫的分布情况, 便可确定周期解的存在及其性質, 下面就用这个方法来解决我們的具体問題。

把方程
$$\frac{d^2x}{dt^2} - \varepsilon \left(1 - x^2 \frac{dx}{dt} \right) + x = 0 \quad (1)$$

化为

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = \varepsilon(1 - x^2)x - x \end{cases} \quad (2)$$

将(2)式中两式相除得

$$\frac{dy}{dx} = \varepsilon(1 - x^2) - \frac{x}{y} \quad (3)$$

以后把(3)的方向称为(1)的方向場

以 $\varepsilon = 0.1$ 为例來作出等斜綫, 相应于 $\frac{dy}{dx} = -1$ 的等斜綫为 $y = \frac{x}{0.1(1-x^2)+1}$, 这

是一条三次曲綫。同样可以作 $\frac{dy}{dx} = -2, 0.5, 0.25, 0, -0.5$ 时的等斜綫 (見圖6.6) 再

根据 $\frac{dy}{dx}$ 的正負号确定等斜綫上每一点的方向, 我們就得到了方向場, 于是就可以大致描出軌道了 (見圖6.6所示)

从圖(6.6)上看出, 原点附近的积分曲綫愈來愈向外盘旋, 离原点較远的积分曲綫愈來

愈向内盘旋，这两类，积分曲线愈来愈接近，並大体上可以看出趋向于一条近于圆形的閉积分曲线。存在封閉积分曲线就是表示方程(1)有周期解，即电路中产生的是等幅周期振荡，我們得到的封閉积分曲线在实际和理論上都是重要的，故引進定义：方程

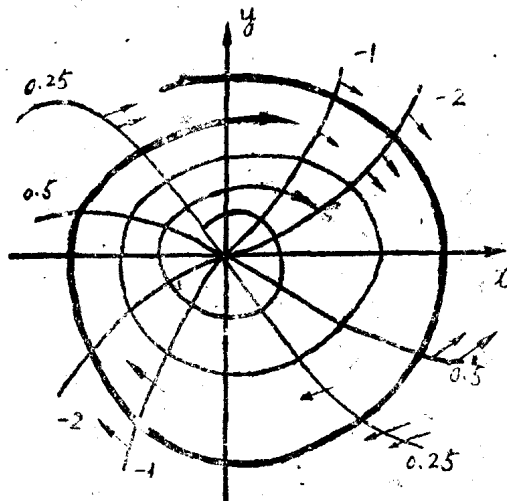


圖 6.6

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = X(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = Y(x, y) \end{cases}$$

的軌道中如果有閉曲线，並且周圍的軌道都是以它为极限的螺旋线，則称此閉曲线为极限环。

順便指出，这种現象，綫性系統是不能具有的。因为，由于綫性系統的解乘以常数还是解。所以若有周期解，必不是孤立的更不会产生螺旋形的軌道。从这点，可以看到綫性系統与非綫性系統的一种質的差別。

从方程(3)可看出，原点是方程的唯一奇点，奇点和极限环在相平面上都居于特殊的地位。从圖上看出这个唯一的奇点正好落在极限环內。这个事实不是偶然的，我們指出，在一般問題中，极限环內至少存在一个奇点。（註明从略）。

上面我們具体地作出了极限环，解决了周期解的存在性問題。但是，还要考慮这个周期解是否穩定。怎样确定周期解（极限环）的穩定性呢？如果极限环附近的积分曲线当 $t \rightarrow +\infty$ 时趋向于极限环，就算极限环是穩定的。对于方程(1)來說，从圖上可以看出，当 $t \rightarrow +\infty$ 时环內外的积分曲线，都是无限地趋向于它，因此它是穩定的。除了穩定的情况以外，还有两种情形：半穩定的和不穩定的[圖(6.7)圖(6.8)]由于实际中很少遇到这两种情形，我們不詳細討論它了。

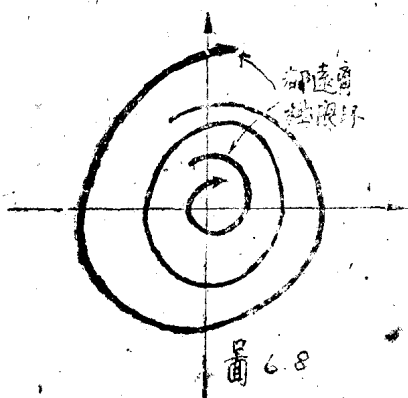
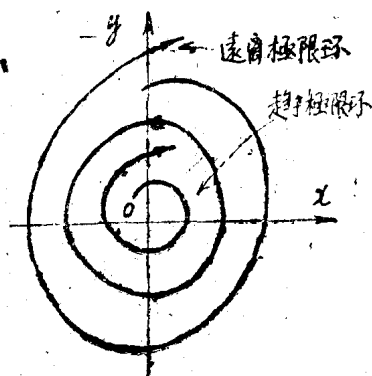


圖 6.8



2. 极限环存在判别法及其运用。

对于一般的工程技术问题，利用上节方法（用等斜法画出方向场，然后描出轨道）不但可以估计出稳定极限环的存在，而且可估计出电流振幅（即极限环半径）大小。但是若只判断稳定极限环是否存在时，可不用花那么多功夫描轨道（有的螺旋线很缓慢地趋向于极限环）而只要能够知道方向场（并不需要作出方向场）就足够了。

下面从特殊问题方程(1)出发，具体分析稳定极限环，周围方向有何特性，这种性质是否刻画了稳定极限环本质，从而确定一般问题稳定极限环存在判别法。

从方程(1)的方向场和轨道分布情况，我们看到稳定极限环附近轨道，趋于向极限环，且围绕它越来越紧密，可以想像有如图所示。以 c_1, c_2 为边界，由细密轨道组成的一个环带，轨道都经过 c_1, c_2 进入环带内部，即方向场在 c_1, c_2 上的方向皆指向环带内部，这个特性确实深刻的反映了稳定极限环附近方向的性质。 c_1 和 c_2 上每点方向皆指向环带内部，这个特性没有反映轨道趋向极限环的快慢，但却足够确定稳定极限环的存在。

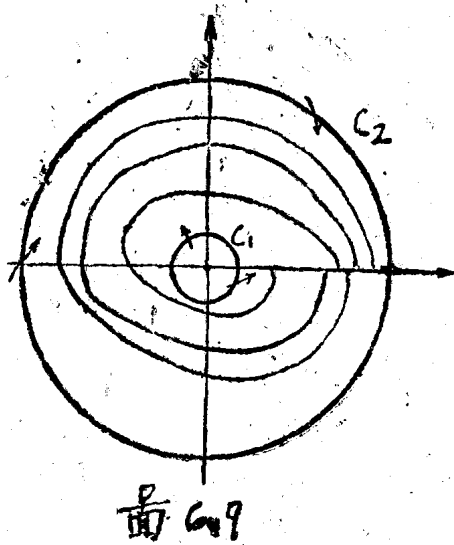
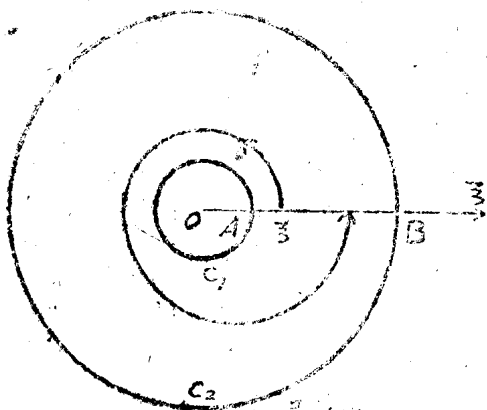


圖 6.9

现在要问：反过来，若存在上述由 c_1, c_2 围成的区域是否能够决定稳定极限环的存在呢？

即从方程(1)表示的结果是否是个普遍规律呢? 我們知道由于 c_1, c_2 上各点方向指向環帶內部, 所以过 c_1, c_2 上各点的軌道都将進入環帶內部, 由于無論 c_1 或是 c_2 上各点方向都是指向環帶內部, 所以軌道進入環帶就出不來了 (若在 c_1, c_2 上某点 p 出來, 則 p 点有指向帶外部之方向, 但由 c_1, c_2 性質 p 点有指向內部之方向, 則 p 点至少有二方向, 和方程解唯一性矛盾) 如果環帶內部沒有奇点, 軌道就不能有終点, 而將无止境的在環帶內部繞環, 由于每点不許有二方向, 所以軌道又不能相交, 所以最后总有一极限, 即极限環。从上例(1)中也可看出极限環附近的軌道螺旋的趨向于它的原因之一是那里沒有奇点。下面我們就比較嚴格地証明对一般問題, 在不包含奇点的上述環帶內一定有一个穩定的极限環。

作一環帶截綫 $O\xi$ 交 C_1 于 A 点, 交 C_2 于 B 点, 在 AB 上选取坐标系, A, B 坐标分别为 a 和 b , 如圖 6.10。从 AB 上任一点 ξ 出發的軌道出不了帶 (C_1, C_2 方向是指向內部) 又因帶內无奇点, 所以軌道繞一周必回來与 AB 相交, 交点随 ξ 而变, 是 ξ 的函数, 把交点記作 $f(\xi)$ 。这样以來, 把极限環是否存在的問題, 化成为, 是否存在这样的一点 $\xi = \xi_0$, 使得 $f(\xi_0) = \xi_0$ 。即軌道封閉了。若令 $\varphi(\xi) = f(\xi) - \xi$, 則問題归結为在区間 $[a, b]$ 內 $\varphi(\xi)$ 是否有零点的問題了。由于軌道总是環帶內部所以 $a \leq f(\xi) \leq b$ 。則 $\varphi(a) = f(a) - a > 0$, $\varphi(b) = f(b) - b < 0$ 根据 $f(\xi)$ 的連續性^[註] 至少在 $[a, b]$ 內存在一点 ξ_0 。使 $\varphi(\xi_0) = 0$, 所以在 Γ 環帶內有封閉軌道。



[註]: 在 AB 上任取一点 p_0 。坐标 ξ_0 。过 p_0 軌道繞一周交 AB 于 Q_0 。点坐标 $f(\xi_0)$ 。函数 $f(\xi)$ 在 ξ_0 連續, 即只要 p 充分接近 p_0 。便可 Q 充分接近 Q_0 。(Q 为一軌道) 下面証明 $f(\xi)$ 在 $[a, b]$ 內任一点連續: 任給 $\varepsilon > 0$ 我們 Q_0 旁取定点 Q_1, Q_2 如圖 6.11 使 $\overline{Q_1 Q_0} = \overline{Q_0 Q_2} = \frac{\varepsilon}{2}$ 逆着过 Q_1, Q_2 軌道交 $O\xi$ 軸于 p_1, p_2 則从 $[p_1, p_2]$ 內任一点 p 出發的軌道必在圖示阴影区域之內 (因解存在唯一, 所以軌道不能相交) 則交点 Q 必在 $\overline{Q_1 Q_2}$ 之內即当 $|\xi - \xi_0| < \delta = \min(p_1 p_0, p_0 p_2)$

时 $|f(\xi) - f(\xi_0)| < \varepsilon$

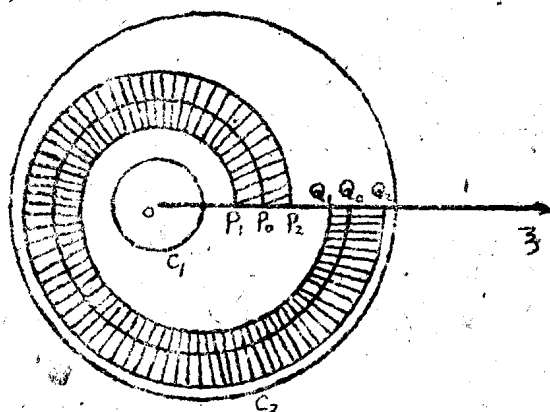


圖 6.11

上面我們只證明了，在這個區域內至少存在一個軌道，進一步還可以證明在這些閉軌道中至少有一個穩定的極限環（證明從略），這樣我們就得到了：

關於一般問題穩定極限環存在判別法：

對於方程

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = X(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = Y(x, y) \end{cases}$$

在平面上由 C_1 和 C_2 (C_1, C_2 稱為無切環) 所圍成的環形區域，若內部無奇點且方向場在 C_1, C_2 上的方向指向環形區域內部 (C_1, C_2 可以由軌道組成) 則區域中至少有一個穩定極限環。

這個定理把具體描繪軌道問題，歸結為找出無切環 C_1, C_2 的問題。它適用於在無線電技術領域中經常出現的（歸納為）下列類型的方程

$$x'' + f(x)x' + g(x) = 0$$

故有着廣泛的指導意義。

怎樣用這個定理去解決實際問題呢？即對於實際問題如何選取 C_1, C_2 呢？沒有一個一般的方法，必須具體問題具體分析，下面我們通過對方程 (1) 的具體分析來歸納幾點經驗。

我們所求 C_1 和 C_2 之間沒有奇點，此外，至 §3 開始已指出極限與奇點有如下關係：極限環內只少包含一個奇點。這兩個特點就給 C_1 和 C_2 的選取確定了一個大致的範圍。因此首先讓我們研究系統的奇點。

為下面在方向場上作方向方便，在此我們採用把二階方程化為方程組的另一種方法，即

令 $\frac{dy}{dt} = x$ (一種方法是令 $\frac{dx}{dt} = y$) 對方程 (1) 積分一次就得：

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = x \\ \frac{dx}{dt} = -y - 0.1 \left(\frac{x^3}{3} - x \right), \quad (\text{在此 } \epsilon = 0.1) \end{cases}$$

改写此方程为:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 0.1x - y - 0.1\frac{x^3}{3} \\ \frac{dy}{dt} = x \end{cases}$$

对于线性方程:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 0.1x - y \\ \frac{dy}{dt} = x \end{cases}$$

的奇点(0.0)附近积分曲线分布情况,已经在线性方程部分讨论过。它是焦点型的(见图6.12)奇点附近的积分曲线是螺旋线,它有如下特点:当时间增加时动点向径长度增加,幅角 θ 减少,当方程右端附加高一个次项 $-0.1\frac{x^3}{3}$ 后,奇点仍是(0.0),但是奇点附近积分曲线的

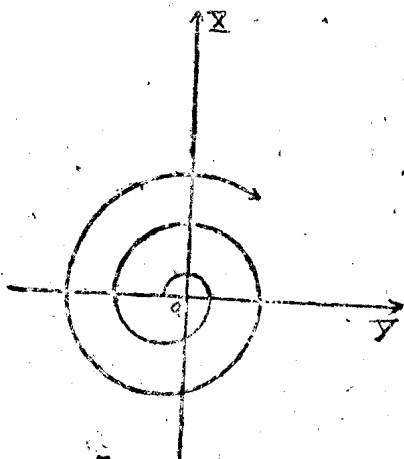


图 6.12

特性有所改变。直观看来,附加项当 $\gamma = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow 0$ 时是高阶无穷小,大概影响不大,

为了证实这点,引入坐标变换:

$$\begin{cases} x = \gamma \sin \theta \\ y = \gamma \cos \theta \end{cases}$$

则 $dx = d\gamma \sin \theta + \gamma \cos \theta d\theta$

$$\dot{x} = \dot{\gamma} \sin \theta + \gamma \cos \theta \dot{\theta}$$

$$dy = d\gamma \cos \theta - \gamma \sin \theta d\theta$$

$$\dot{y} = \dot{\gamma} \cos \theta - \gamma \sin \theta \dot{\theta}$$

代入原方程

$$\begin{cases} \dot{\gamma} \sin \theta + \gamma \cos \theta \dot{\theta} = 0.1 \gamma \sin \theta - \gamma \cos \theta - 0.1 \frac{1}{3} \gamma^3 \sin^3 \theta & (1) \\ \dot{\gamma} \cos \theta - \gamma \sin \theta \dot{\theta} = \gamma \sin \theta & (2) \end{cases}$$

$$\textcircled{1} \cos \theta - \textcircled{2} \sin \theta$$

$$\dot{\gamma} \theta = 0.1 \gamma \sin \theta \cos \theta - \gamma - 0.1 \frac{1}{3} \gamma^3 \sin^3 \theta \cos \theta$$

即

$$\dot{\theta} = 0.1 \sin \theta \cos \theta - 1 - 0.1 \frac{1}{3} \gamma^2 \sin^3 \theta \cos \theta$$

$$< 0.1 - 1 + 0.1 \frac{1}{3} \gamma^2 < 0 \quad (\text{只要 } \gamma < 3)$$

$$\textcircled{1} \sin \theta + \textcircled{2} \cos \theta$$

$$\dot{\gamma} = 0.1 \gamma \sin^2 \theta - 0.1 \frac{1}{3} \gamma^2 \sin^4 \theta$$

$$> 0.1 \gamma \sin^2 \theta \left[1 - \frac{1}{3} \gamma^2 \right] > 0 \quad (\text{只要 } \gamma < \sqrt{3})$$

由 $\gamma^2 = x^2 + y^2$ 得 $\gamma \frac{d\gamma}{dt} = x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt}$ 再連系到原方程推出:

$$\gamma \frac{d\gamma}{dt} = 0.1 \left(1 - \frac{x^2}{3} \right) x^2$$

$$\frac{d\gamma}{dt} > 0 \quad (\text{当 } x^2 < 3 - \delta \text{ 即在原点附近})$$

$$\text{另外 (在原点附近 } \gamma < 3) \quad \frac{d\theta}{dt} = -1 - \frac{0.1}{3} \gamma^2 \sin^3 \theta \cos \theta + 0.1 \cos \theta \sin \theta$$

$$< 0.1 + \frac{0.1}{3} (3)^2 - 1 < -A < 0$$

故非綫性系統的奇点附近的积分曲綫仍是螺旋綫，而且是順时針向外綫的。即奇点仍属焦点型。

一般說來，对于綫性方程組:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax + by \\ \frac{dy}{dt} = cx + dy \end{cases}$$

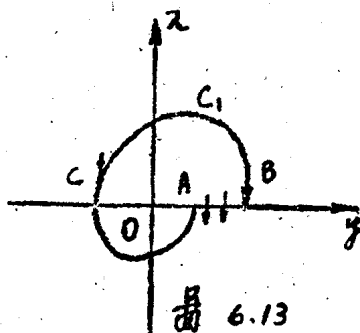
若奇点是焦点 (或鞍点，或結点) 型，則:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax + by + \varphi(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = cx + dy + \psi(x, y) \end{cases}$$

(其中 φ, ψ 对 $\gamma \rightarrow 0$ 來說是高階无穷小)的奇点类型不变。(証明从略)

回到原來的問題我們先來找无切環 C_1 ，根据上面分析， C_1 必包包圍奇点 $(0,0)$ ，而原点是不穩定焦点，我們选取原点鄰域的积分曲綫 $\widehat{ACB}$ 作为 C_1 的一部份(見圖0.13)此时A点与B点之間的缺口还没有联接起來。因为在綫段AB上 $\frac{dx}{dt} < 0$ ， $\frac{dy}{dt} = 0$

所以方向場的方向垂直向下，由于这个特点，我們用直綫把A,B联接起來，把閉曲綫ACBA取作 C_1 ，到此余下的任务就是找出 C_2 ，



我們对 C_2 提出了这样的要求： C_2 上方向場每点的方向必須指向 C_2 所圍区域的内部。由于 C_2 与方向場具有緊密的关系，所以我們先引進方向場的簡易作圖法。

已知方程

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = x \\ \frac{dx}{dt} = -y - \varphi(x) \end{cases}$$

則相平面上方向場在任意一点 $p(x, y)$ 的方向可以这样作出(見圖6.14)

作曲綫 $y = -\varphi(x)$ (在此 $\varphi(x) = 0.1 \left(\frac{x^3}{3} - x \right)$)由 p 点作 Oy 軸的平行綫交曲綫

$y = -\varphi(x)$ 于A，由A点作 Oy 軸的垂綫交 Oy 軸于B点(以后就簡称 P 点对应于B点)联接B,P，作BP的垂綫方向場在P点的方向就沿着这条垂綫。(指向由 $\frac{dx}{dt}$ 的 $\frac{dy}{dt}$ 符号而定)

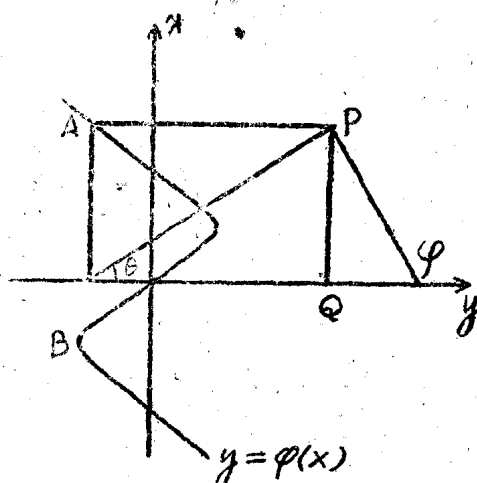


图 6.14

(圖上曲綫改为 $y = -\varphi(x)$)

証明： 由作圖知 A 点的坐标是 $[-\varphi(x), x]$, B 点的坐标是 $[-\varphi(x), 0]$ 作 PQ 垂直于 Oy 軸交 Oy 軸于 Q, 令 $\angle PBQ = \theta$, BP 的垂綫与 Oy 軸正向交角为 φ , 于是

$$\operatorname{tg} \varphi = -\operatorname{ctg} \theta = -\frac{BQ}{QP} = -\frac{y - \varphi(x)}{x} = -\frac{[y + \varphi(x)]}{y} = \frac{dx}{dy}$$

这表明作圖是正确的。

这是个很重要的作圖法, 根据綫 $y = -\varphi(x)$ 便可确定整个方向場, 在工程上逐点应用此法就可近似作出积分曲綫, 所以它有普遍用途。

我們对具体問題(1)已經有了求出每点方向的办法, 可以做出方向場, 但我們的任务是求 C_2 , 用不着做出整个方向場。我們先來看看方程(1)的方向場的大致分布情况。

为此, 三个有代表性的点 R, P, Q 來說明 [見圖(6.1)] 由 $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ 的符号可以确定

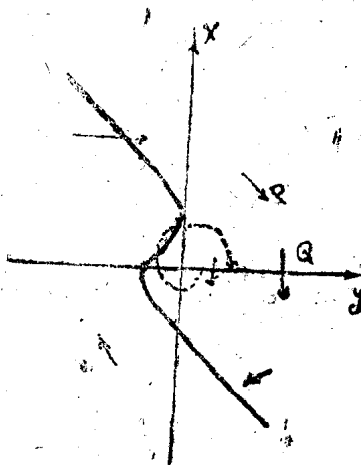


图 6.15