

北京市中学1956—1957学年度

高中三角

实施基本生产技术教育参考资料

(初稿)

北京市教育局

1956.8

高二第一学期

第一、二、三单元 由 0° 到 360° 角的三角函数;
弧和角的度量; 任意角的三角函数。

一、目的要求:

1. 使学生通过单位圆, 熟练地掌握 0° 、 30° 、 45° 、 60° 、 90° 角的三角函数值及同角三角函数间的关系式;
2. 使学生深刻地掌握弧度的概念, 并能运用到实际问题中去。
3. 使学生掌握周期函数的定义, 并能求出各三角函数的周期。
4. 使学生能熟练地描绘三角函数的图象, 并能用图象说明三角函数的性质; 会用图象解简单的超越三角方程。

二、内 容:

1. 0° 、 30° 、 45° 、 60° 、 90° 角的各三角函数值; 18° 角的三角函数值。
2. 同角三角函数间的关系式;
3. 弧和角的度量。
4. 周期函数及三角函数的周期性。
5. 三角函数的图象。

三、实施方法:

本段教材含有的基本生产技术教育的因素, 教科书中已较完全的配备——如周期函数的定义; 弧度概念的应用; 用三角函数的图象说明三角函数的性质, 用三角函数的图象解简单的超越三角方程等等——为了说明周期函数的定义, 应在开头 ~~三角函数的定义中~~ 复习函数的定义, 并介绍函数符号 ~~结合教材~~ 再提出以下几点:

~~三角函数~~ 0° 、 30° 、 45° 、 60° 、 90° 角的各三角函数值, 学生

掌握得不熟练，常给以后的计算问题造成很大困难，应使学生通过单位圆，深入熟练地掌握它们，并在诱导公式等问题中经常练习，以求巩固。 18° 角的三角函数值，通过习题三第 13 题及平面几何正十边形作为例题讲解之。

2. 弧度和角的度量部分，教科书中选择实际应用题较多，如 § 17 中例 3 是很好的结合实际的问题，教师可只讲一种装置，另一种装置留为作业。又如习题五中 13 题提出了“密位”问题，是砲兵中常用的，亦名之为“千分度”。教师可参考伯拉基斯所著三角教学法 24 页。另外习题五中与物理学结合的习题，可适当选为例题和习题。
3. 週期函数的定义，与旧教科书不同，应在学生深入掌握函数的定义了解函数符号 $f(x)$ 的基础上进行讲解，通过习题八的 4, 5 题巩固之。并可从下列问题中选择适当的例题及习题，

- (1) 求表示函数 $\sin ax$ 的週期的公式。

令 $f(x) = \sin ax$ ，由週期函数的定义得

$$\sin a(x+h) = \sin ax,$$

$$\therefore a(x+h) - ax = 2K\pi \quad \text{解之 } h = \frac{2K\pi}{a}.$$

当 $K=1$ 时，得此函数之週期为 $\frac{2\pi}{a}$

- (2) 试证 $\sin 3x$ 的週期是 $\frac{2\pi}{3}$ 。

- (3) 试证 $\sin \frac{x}{5}$ 的週期是 10π 。

- (4) 试证 $\sin(ax+b)$ 的週期是 $\frac{2\pi}{a}$ 。

- (5) 试证 $\cos(ax+b)$ 的週期是 $\frac{2\pi}{a}$ 。

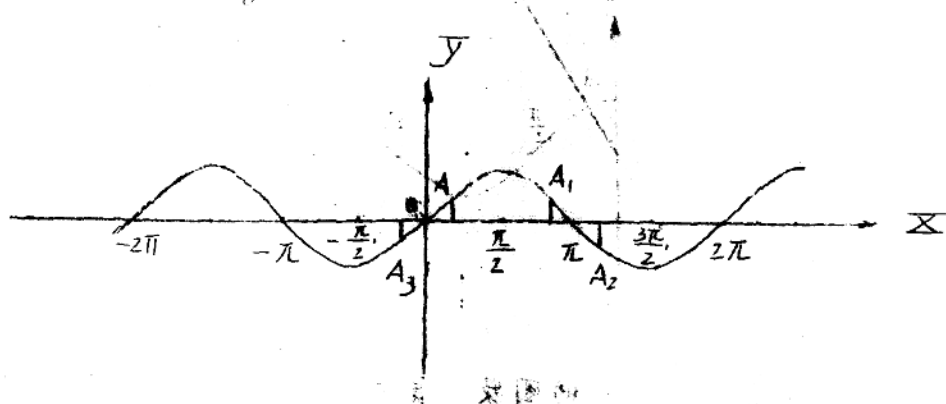
- (6) 试证 $\tan(ax+b)$ 的週期是 $\frac{\pi}{a}$ 。

4. 三角函数的图象是进行基本生产技术教育的重点部分，应

达到以下要求：

- (1) 利用方格纸细致正确地描绘函数的图象。
- (2) 描绘图象时，纵横坐标所取单位应当一致。
- (3) 利用图象，由已知变数的值求函数的值以及它的逆问题，可以巩固三角函数的定义，并为反三角函数提供基础。
- (4) 利用图象说明三角函数的性质：

例： $y = \sin x$ 的图象为



通过图象不难看出下列性质：

- i, 特殊角的正弦函数值： $\sin 0 = 0$, $\sin \frac{\pi}{2} = 1$, $\sin(-\frac{\pi}{2}) = -1$.
- ii, 正弦函数值的变化情形：如当变数从 0 逐渐增加到 $\frac{\pi}{2}$ 时，相对应的正弦函数值就从 0 逐渐增加到 1。
- iii, 正弦函数值的正负：如第 I、II 象限者为正。
- iv, 正弦函数值的变化范围：自 -1 到 1 之间。
- v, 正弦函数的週期性与週期。
- vi, 图象关于原点对称，说明正弦函数为奇函数。

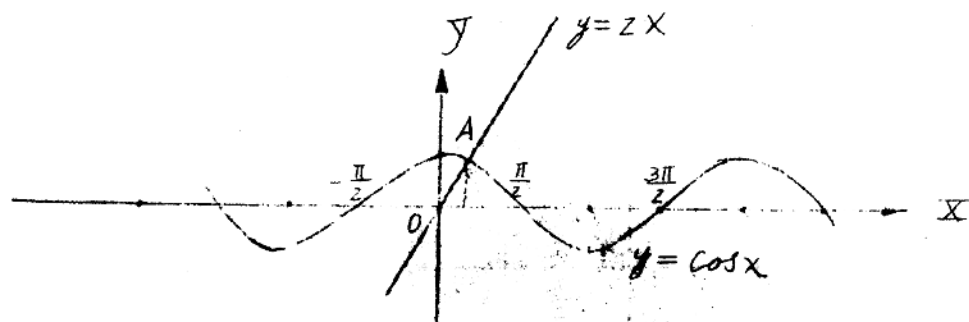
另外还可以说明诱导公式：

- i, 从点 A 与 A1 的纵坐标可以说明 $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$ 。
- ii, 从点 A 与 A2 的纵坐标可以说明 $\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$ 。

从点 A 与 A_3 的纵坐标可以说明 $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$.

(5) 利用图象解简单的超越三角方程时, (如习题八中 16、17 题) 应与高一代数密切配合, 兹举例如下:

利用图象求适合于 $\cos x = 2x$ 的 x 的值. (精确到 0.1)



作 $y = \cos x$ 及 $y = 2x$ 的图象, 其交点的横坐标即为所求.

$$\therefore x = 0.4.$$

附註: 三角函数的图象可增一课时, 改为四课时.

高二第二学期

第一单元 二角和差的三角函数，倍角、半角的三角函数，
数将三角函数式化为适于对数计算的形式。

一、目的要求：

- (一) 使学生能够熟练地求出如 15° 、 36° 等角的各个函数值。
- (二) 使学生对于无理数、小数的运算技巧，能得到进一步的提高，尤其是关于无理数的运算。
- (三) 使学生能熟练地将三角函数式化为适于对数计算的形式。

二、内容。

- (一) 二角和、差的三角函数，倍角、半角的三角函数。
- (二) 将三角函数式化为适于对数计算的形式。

三、实施方法：

- (一) 学生掌握这部分公式时，常容易产生一种偏向，即仅能熟练地正面运用这些公式，对于逆用公式常感到困难，因而有必要在习题例题中多配备一些逆用公式的题目，以便达到熟练地掌握公式的目的，除习题二中的 5 还可以增加一些与下列题类似的题目：

1. 化简
 - i, $\sin 20^\circ \cos 40^\circ + \cos 20^\circ \sin 40^\circ$
 - ii, $\sin(x+y) \cos y - \cos(x+y) \sin y$
 - iii, $\cos(x+y) \cos y + \sin(x+y) \sin y$

2. 将下列各式化为和或差：

- i, $2 \cos 10^\circ \sin 14^\circ$;
- ii, $\cos 132^\circ \sin 70^\circ$;
- iii, $4 \sin(\alpha+\beta) \sin(\alpha-\beta)$.
- iv, $-\cos \frac{1}{2}(\alpha+\beta) \cos \frac{1}{2}(\alpha-\beta)$.

3. 求适合于下式的角 x .

$$\cos x \cos 3x = \cos 5x \cos 7x.$$

(二) 在讲解将函数化为适于对数计标的形式时，要注意训练学生能正确熟练地化 $a \sin x + b \cos x$ 为乘积的形式。结合教科书 §. 34. 例 B(2) 可提出下列两种化法：

$$\begin{aligned} 1. \quad & a \sin x + b \cos x \\ &= a \left(\sin x + \frac{b}{a} \cos x \right) \quad \text{令 } \frac{b}{a} = \tan \phi \\ &= a (\sin x + \tan \phi \cos x) \\ &= a \cdot \frac{\sin x \cos \phi + \cos x \sin \phi}{\cos \phi} \\ &= \frac{a \sin(x + \phi)}{\cos \phi} \end{aligned}$$

2. 在 $a \sin x + b \cos x$ 中

$$\text{令 } a = K \cos \phi, \quad b = K \sin \phi.$$

$$\text{则 } a^2 + b^2 = K^2 \quad \text{即 } K = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\therefore a \sin x + b \cos x$$

$$= K (\cos \phi \sin x + \sin \phi \cos x)$$

$$= \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \phi)$$

两法中所取的中角是一致的。因为由 (2) 中

$$a = K \cos \phi, \quad b = K \sin \phi \quad \text{得}$$

$$\frac{b}{a} = \frac{\sin \phi}{\cos \phi} = \tan \phi.$$

(三) 要有计划地分别通过和角、差角、倍角及半角函数的讲解，告诉学生计标 75° ， 15° ， 36° ， $22^\circ 30'$ 的各个函数值的方法，要求学生能随时熟练地进行推算；并且启发学生会独立的使用相同的方法推算 12° ， 9° ， 54° ， $7^\circ 30'$ 角的各个函数值。

凡恒等式的証明問題，應告知學生不得通過查表用近似值計
算。

第三單元 解直角三角形。

一、目的要求：

- (一) 使學生明確掌握直角三角形可解的條件，進而會解應用題。
- (二) 通過實習作業，使學生獲得測量方面的必要技能；並使學生初步體會三角學在社會主義建設中的作用。

二、內 容：

(一) 解直角三角形。

(二) 實習作業。

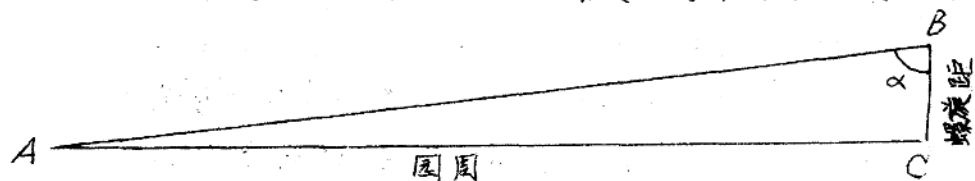
三、實施方法：

(一) 課前準備：

1. 在講課中使學生明確直角三角形可解的條件，與平面幾何中直角三角形可以作圖的條件是一致的，由此使學生掌握可解的四種情形。進而解應用題，除習題 14 中各題外，可補充下列題：

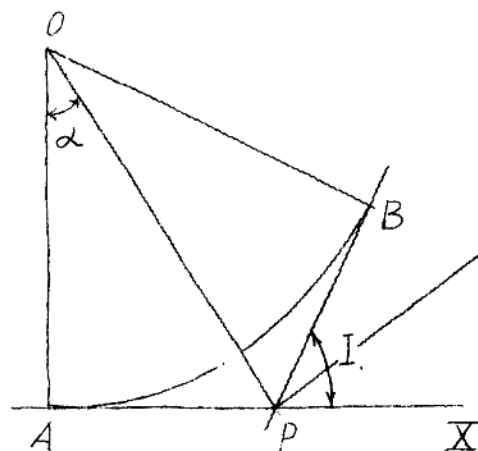
(1) 長 85 厘米的擺在相距 25 厘米的兩點間來回擺動；試求這個擺尖所經過的弧的長（振幅）。

(2) 設螺旋的直徑為 2 厘米，螺旋距為 7 毫米，試求螺旋角。



由螺旋（三角形的斜邊 AB ）與圓柱的母線（直角邊 BC ）所組成的角 α 稱為“螺旋角”。

(3) 鐵道的轉角 I 等於 $22^{\circ}14'$ ，切線 T 各等於 200 米，試求半徑 R ，設轉角 I 不變，試就 $T=250$ 米，300 米，500 米求 R 。



PA, PB 為切綫;

$\angle XPB$ 稱為鐵道的轉角(I);

OA, OB 為半徑. (R)

$$\therefore \frac{I}{2} = \alpha.$$

$$\therefore \tan \frac{I}{2} = \frac{AP}{OA}.$$

2. 解直角三角形的演算工作的安排應該是:

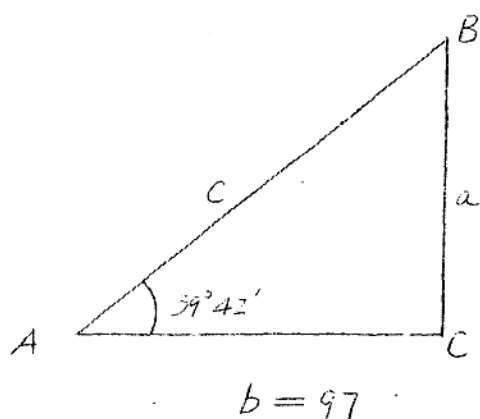
- (1) 寫 [已知], [求];
- (2) 按已知條件用量角器和比例長度比較精確地畫出要解的三角形來。
- (3) 佈列公式, 要用簡化的公式, 不必從函數定義列起。
- (4) 公式經過整齊排列後, 再進行查表。
- (5) 驗算。

例: [已知] 直角三角形的直角邊 $b=97$ 米, 銳角 $A=39^{\circ}42'$ 。

[求] 直角邊 a , 斜邊 c , 銳角 B , 面積 S 。

[解] i) 用量角器畫角, 用適當比例尺截取邊長, 畫出這個直角三角形。(如下圖比例尺是 1:2000, 即每厘米代 20 米。)

ii) $B=90^{\circ}-A=50^{\circ}18'$ (心算)



$$a = b \cdot \operatorname{tg} A = 97 \cdot \operatorname{tg} 39^\circ 42'$$

$$c = \frac{b}{\cos A} = \frac{97}{\cos 39^\circ 42'}$$

$$S = \frac{1}{2} ab = \frac{1}{2} b^2 \operatorname{tg} A$$

iii. 佈列标草:

$$\lg \operatorname{tg} 39^\circ 42' = \overline{1.9192}$$

$$\lg 97 = 1.9868$$

$$\lg 0.5 = \overline{1.6990}$$

$$\lg 97 = 1.9868$$

$$\lg \cos 39^\circ 42' = \overline{1.8862}$$

$$\lg \operatorname{tg} 39^\circ 42' = \overline{1.9192}$$

$$\lg a = 1.9060$$

$$\lg c = 2.1006$$

$$2 \lg 97 = 3.9736$$

$$\therefore a = 80.54 (\text{米})$$

$$c = 126.1 (\text{米})$$

$$\lg S = 3.5918$$

$$\therefore S = 39060 (\text{平方米})$$

[註]: 这个标草, 分作三个步骤进行, 就可节省时间:

i. 写出所有各标草等号左边諸項, 等号, 各个对数首数(函数对数可不写)横线与其右端的加減号。

ii. 将所有的对数一一抄出填在等号右边(重复者只重一次)

iii. 进行加減运算, 並圈出其各个反对数, 註上单位名称。

(4) 验标。这类計标題, 对验标应給予充分地重視。

验标法为: i. 把所画图形实际上量一量, 得: $a = 81$ 米,

$c = 126$ 米。(均为按比例尺放大的值), 可知结果大体正确。

ii) 用四位表验标方法如下:

(i) 用平方数表验标, 方法简便, 误差较大:

$$\begin{array}{r} a^2 = 6486 \\ b^2 = 8649 \\ \hline c^2 = a^2 + b^2 = 15135 \end{array} \quad (\text{表中 } c^2 = 15900)$$

(ii) 用对数表验标较精确:

$$\begin{aligned} b^2 &= c^2 - a^2 = (c+a)(c-a) & \lg(c+a) &= 2.3151 \\ 2 \lg b &= \lg(c+a)(c-a). & +) \lg(c-a) &= 1.6586 \\ & & \lg(c^2 - a^2) &= 3.9737 \end{aligned}$$

与上面标草中的 $2 \lg b = 3.9736$ 仅在末一位数字上有很小出入, 这是许可误差。

此外, 如果条件许可, 可配合代数课教学生用计标尺解直角三角形, 並以核对用四位表所解过的諸题。

(二) 实习作业:

高二的实习作业, 主要是把解直角三角形的知识应用到实际场所, 运用这些知识, 进行测量不可接近的两点间的距离及物体高度, 並可进行水准测量。从而使學生明确建設工作中的某些需要是与三角学密切联系的, 並使學生掌握某些测量仪器的使用方法。

下面所載的測量作业, 只限于用罗盘仪, 平板仪或简单的自制測具。

第一課時

一、目的要求:

- (一) 使学生了解测量仪器的装置及各部的名称,
- (二) 使学生能正确地使用这些仪器,

二、内容：

(一) 罗盘仪、平板仪的各部名称及使用法。

(二) 测斜仪与等高仪的使用法。

三、实施方法：

(一) 在讲罗盘仪时，必须将整套仪器及附属测具带到教室，按照“高中平面三角教学参考资料”第二分册第37—38页的内容，通过简单图形，进行讲解。

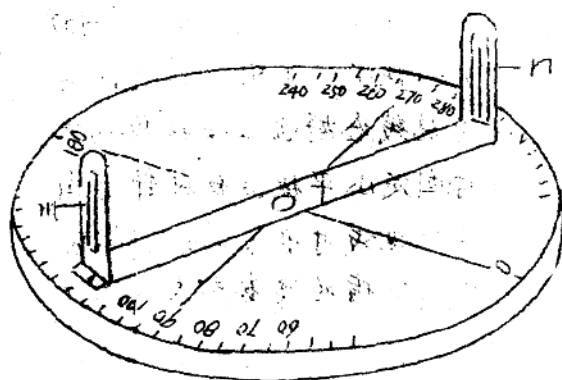
(二) 平板仪的使用法，应该在高一平面几何中讲述，学生在高一若没有学过，教师可按上法，参阅“高中平面三角教学参考资料”第二分册38—39页的内容，进行讲解。

(三) 若没有上述仪器，则可根据自制测具（等高仪与测斜仪），说明其用法。

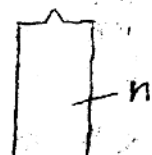
兹分述其构造及用法如下：

1. 等高仪：

构造：等高仪是用来测量平面内水平角的大小。其构造的主要部分是一个水平的

圆度盘（如附图），沿着度盘的周围刻有 $0^{\circ}-260^{\circ}$ 的度数，在圆度盘的中心上面，安置有一个可以自由转动的照准尺，这个尺是由一条水平板与两端直立的小

视板构成的。视板 m 是接目板，它的上面有一条窄缝（宽约 1 mm ）；视板 n 是接物板，它的上面有一条宽缝（宽约 $5\text{ mm}-6\text{ mm}$ ），缝上面有一条宗线（视板 n 也可以作成气靶上准星形状，这样在制

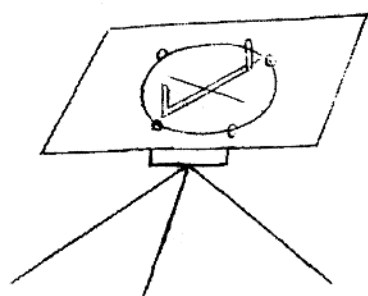


作上简单些如右图)。水平板的末端做得有一道边，上面画上一条线紧接着圆度盘的刻度，用做指示水平角的度数。

这个仪器的精确性决定于下列几点，因此在制作时应该特别注意。

- (1) 圆度盘上的刻度(一般是顺时针迴转方向)
- (2) 照准尺的轴线无论怎样旋转,必须与圆度盘的直径重合,
- (3) 两个觇板的轴线也必须与水平板的轴线在一个垂直面上。

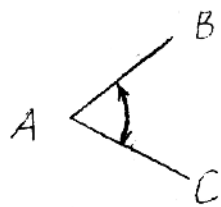
这个仪器的圆度盘可以用三合板或五合板制作(也可以用厚草板纸),在上面贴上一个画有刻度的薄圆纸片。照准尺可以用木尺或金属尺做成。



用法: 先将附有照准尺的圆度盘用图钉固定在小平板上(如左图)。

欲测水平角 BAC 时, 可先选择位置安放 A 点, 使圆度盘中心与地面的 A 点对准, 并使照准尺与度盘上的 $0^\circ-180^\circ$

的直线重合(接目板外端的刻线重合)。转动小平板使得沿接目板的窄缝望出的视线恰好通过接物板的狭缝与 B 点, 此时固定小平板沿顺时针方向旋转照准尺, 使得视线对准 C 点, 此时接目板外端的刻线所指的度数即表示水平角 BAC 的大小。



2. 测斜仪

构造: 测斜仪是用来测量垂直平面内的仰角或俯角。

其构造的主要部分是一个垂直的半圆度盘(如本页上左方图)。它可以用三合板或五合板, 在上面贴一张画有分度的纸, 或者用厚草板纸制作; 如果有木制半圆仪也可以代用, 最重

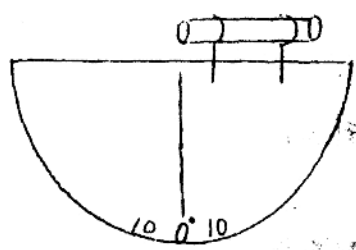
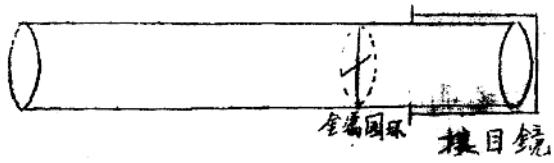
要的是半圆的直径必须刨平。

在半圆的圆心处用一套长螺钉将这个半圆的度盘与支柱连接起来，并且借助于螺帽就可以将度盘固定在任何位置不动。在螺丝上要挂上一个带有重物的铅垂线（可以借用平板仪的悬锤，在一端缚一金属小扁圆环或者就用螺帽垫，再套在螺钉上）。

支柱可以用下端削尖的木棍，在顶端钻一个孔，以

便使螺钉穿过。

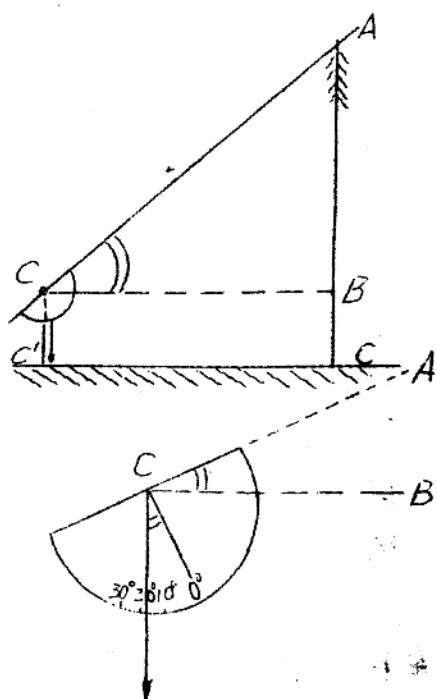
如欲提高测量的精确度，还可以在半圆度盘上装置一个瞄准筒，利用市上所卖儿童用的单筒望远镜加以简单的附件就可以了。制法是将单筒望远镜的接目镜卸下，在筒内放入一个金属弹性小圈（可用手錶的旧发条制作），在小圈上用条铁丝架成十字形，然后再放入接目镜（如下图）。



最后用两个金属箍将此单筒望远镜固定在半圆度盘上即成功了（如左图）。但装置时要注意必须使望远镜筒的轴线与半圆度

盘的直径平行。

用法：将测斜仪放置在地面上的 C' 点，半圆度盘的中心在 C



点，松开螺帽，沿半圆度盘的直径（或瞄准筒）使视线（或瞄准筒的十字线交点）对准高物的顶端 A 将螺帽拧紧，在半圆度盘上沿铅垂线读出度数（如左图中为 20° ），此即仰角 ACB 的大小，（可参攷阿·伊·菲齐索夫等编的数学教学中的综合技术教育 203—209 页）

在課堂上，須將學生分为若干个小组，使他們能够轮流到講台前，切实了解仪器的名称及用法。其他暫時没有到講台前的學生必須作

简单的筆記。

第二課时

一、目的要求：

使学生会用测量仪器测量地面上不可通过的两点间的距离。

二、内容：

(一) 用罗盘仪（或平板仪或等高仪）测量地面上彼此不能通过，但均可由第三点到达的两点间的距离。

(二) 用罗盘仪测量地面上只有一点可以到达的两点间的距离。

三、实施方法：

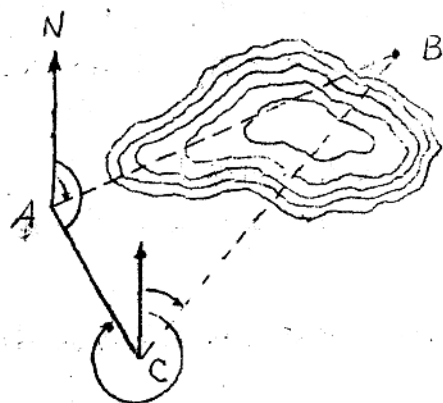
(一) 鉅叙教学，根据学校的设备条件，把全班学生分为若干

个小组，进行实地测量，并要求学生遵守下列规则：

1. 到现场中应注意听讲，不得自由活动，
2. 尚未接近测站的同学，不可散队，
3. 进行测量时，要特别爱护仪器，防止损坏，

(二) 进行测量的步骤：

1. 持整套仪器到现场去，说明测量的目的，选好要测量的



两点（如图中的A、B）
并在这两点各插一标杆。

2. 在A点处安仪器，观测AB的方位角。（设为 α ）

3. 将AB的方位角加 90° （即 $\alpha + 90^\circ$ ），以 $\alpha + 90^\circ$ 为方位角，由仪器上的觇管观测一个方向，

在此方向中，选取一个C点，插上一个标杆。

4. 用皮尺测量AC的距离。
5. 将仪器移置于C点，在A点插上一个标杆。
6. 在C点处整理仪器，测量CA及CB的方位角，而计算其差数，得 $\angle ACB$ 的度数。

7. 令学生把测量的略图及各测量结果记录下来。

(三) 结束工作：

1. 令学生卸下仪器，装置箱内，切实检查有无损坏，送回指定地点。

2. 告诉学生，根据测量结果，计算AB间的距离，要求学生有已测测量结果编成一个习题，于课后解答出来。

3. 将测量结果在小黑板上佈。

(四) 附註：

上面所述的测量，专使用罗盘仪。教师亦可自制“等高仪”进行测量。“等高仪”的制法可参阅初中平面几何实施基本生产技术教育参考资料。

另外，亦可用平板仪测量上述问题。测量步骤：

1. 同前，但在平板上贴上图纸。
2. 在A点安置测板。在平板上定A'点，使与实地上A点对应。倚A'点所插标针，用测斜仪瞄准B点标杆，过A'点画一条直线A'B'。（长度不定）
3. 在平板上作 $\angle B'A'C' = 90^\circ$ 。（用三角板）
4. 用测斜仪沿A'C'线观看，在远方方向中选一点C，插上标杆。
5. 用皮尺量AC的距离。在测板上以适当的比例截取A'C'的长。
6. 将测板移到C点，使C'和地上C点对应。用测斜仪边线与C'A'一致。转动测板，至测斜仪对准A点为止。旋紧测板的螺旋固定其位置。
7. 将测斜仪倚C'点的标针，观测B点，在平板上沿这个方向过C'点再作一直线C'B'，与上次所画直线A'B'交于B'。则A'B'之长可按平板上的圆规标出来：

$$AB = A'B' \div (\text{比例尺数})$$

或用 $\frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'} = \frac{1}{\text{比例尺数}}$

$$\therefore AB = AC \cdot \frac{A'B'}{A'C'} \quad (\text{右边三个长均为已知，且} \frac{AC}{A'C'} \text{为比例尺的倒数，说明})$$

与上一公式一致。）

其他组织教学，结束工作等同前。