目　　录

第一章　函数及其图形

微积分常被人称为"变量的数学"，而变量之间的依赖关系是用函数来刻画的，因而函数概念是高等数学中最重要的概念之一．为了后面学习的需要，必须把函数概念及其有关的一些问题弄清楚．本章重点讲：函数概念，函数的单调性、有界性、周期性等特性，反函数、复合函数的概念以及作函数图象．

§1　不等式和绝对值

不等式和绝对值是微积分中常用的工具，所以要熟练地掌握与它们有关的概念和性质．

【问1】运用不等式应注意些什么？

答：不等式的运算和等式的运算有很多相同的地方，也有很多不同的地方．运用不等式时，要特别注意它和等式不同的地方．例如

(1) 不等式两端同时以一正数相乘或相除时，所得不等式与原不等式同向；两端以一负数相乘或相除时，所得不等式与原不等式反向．

(2) 不等式两端符号相同时，两端都颠倒分子、分母，所得不等式与原不等式反向．

（3）不等式两端都非负时，可以乘方，所得不等式与原不等式同向。两端有正有负时，不能随便乘方。

（4）同向不等式可以相加，但不能相减；异向不等式可以相减，但不能相加。

关于不等式还有许多性质，读者可参看中学数学教材。上面所说的几条只是想说明不等式与等式有很多不同的地方，如果不注意，可能会出错误。请看下例：

例 1. 试分析下述运算是否正确，为什么？

$$\because \quad \lg\frac{1}{2} > \lg\frac{1}{3},$$

又 $\quad 2 > 1,$

将上两式相乘，得

$$2\lg\frac{1}{2} > \lg\frac{1}{3},$$

即 $\quad \lg\left(\frac{1}{2}\right)^2 > \lg\frac{1}{3}.$

于是 $\quad \frac{1}{4} > \frac{1}{3}.$

从结果可以看出，上述推导是错误的。产生错误的原因是不等式 $\lg\frac{1}{2} > \lg\frac{1}{3}$ 两端的数都是负数，虽然与不等式 $2>1$ 同向，却不能相乘。因为不等式的性质中，两个同向不等式相乘，要求两个不等式两端都是正的。

另外还需指出，解不等式时，要求运算各步不破坏不等式的同解性。因而读者要熟悉不等式的同解定理，否则也可

能出错误。

例 2. 解不等式$\sqrt{2x-1}+x>0$。

解： 移项，得

$$\sqrt{2x-1}>-x,$$

两端平方，得

$$2x-1>x^2,$$

即

$$x^2-2x+1<0,$$

$$(x-1)^2<0.$$

因最后不等式不能成立，故原不等式无解。

细心的读者会看出，上述解法是错误的。因为将$x=1$代入，显然满足原不等式，故不等式应该有解。产生错误的原因是两端平方这一步破坏了不等式的同解性。两端非负的不等式才能两端平方，而不等式$\sqrt{2x-1}>-x$的右端不能保证非负。原不等式的正确解法是：

原不等式本身要求根号内式子非负，即

$$2x-1\geqslant 0,\quad x\geqslant\frac{1}{2}.$$

而在这个前提下，原不等式显然成立，故不等式的解为

$x\geqslant\frac{1}{2}$.

【问 2】不等式$a<b<c$能否说成"$b>a$ 或 $b<c$"？另外，可以写 $3\leqslant 3$ 吗？

答： 不等式$a<b<c$表示"$b>a$ 同时 $b<c$"（此时必有$a<c$），不能说成"$b>a$ 或 $b<c$"（此时未必$a<c$）。前者说明

b 是 a、c 之间的数，后者说明要么 $b>a$，要么 $b<c$，不要求 b 在 a、c 之间。

$a\leqslant b$ 表示 "$a<b$ 或 $a=b$"，因而，记 $3\leqslant 3$，$2\leqslant 3$ 都是可以的。

【问 3】绝对值符号是微积分中常用的，那么关于绝对值应注意些什么？

答：为了以后的需要，对于所提的问题，我们指出以下几点：

（1）要熟练地掌握一些绝对值不等式。如

$-|a|\leqslant a\leqslant |a|$；

$\pm(|a|-|b|)\leqslant \big||a|-|b|\big|\leqslant |a\pm b|\leqslant |a|+|b|$

等。

（2）注意 $|x-a|<b$ $(b>0)$ 及 $|x-a|>b(b>0)$ 的含意及几何解释（在数轴上的表示）。

$|x-a|<b$ $(b>0)$ 表示

$$-b<x-a<b,$$

即

$$a-b<x<a+b.$$

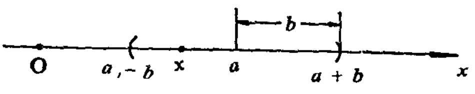

图 1-1

这个不等式从几何意义上看，可作如下解释：在数轴上以 a 为中心，以 b 为半径画两段小圆弧，交数轴于两点 $a-b$，$a+b$，那么 x 应在开区间 $(a-b,\ a+b)$ 之内。（如图 1-1 所示）特别，当 $a=0$ 时，$|x|<b$ 表示 $-b<x<b$ $(b>0)$。从几

何上看，表示 x 在以原点o为中心，以 b 为半径的开区间 $(-b, b)$ 之内.

$|x-a|>b$ $(b>0)$ 表示 $x-a>b$ 或 $x-a<-b$，即

$$x>a+b \quad \text{或} \quad x<a-b.$$

从几何上看，就是 x 在闭区间$[a-b, a+b]$之外.

(3) 要逐步学会利用绝对值的性质，对一些量进行放大或缩小，从而估计某些量的范围. 这一点在学习极限理论时常用到. 下面举个这方面的例子.

例. 已知 $|x-1|<\dfrac{1}{2}$，试估计 $|x+3|$ 的范围.

解： 由 $\quad |x+3|=|(x-1)+4|\leqslant|x-1|+4$

及

$$|x-1|<\frac{1}{2}$$

知

$$|x+3|\leqslant|x-1|+4<\frac{1}{2}+4=\frac{9}{2}.$$

从而可知，当 $|x-1|<\dfrac{1}{2}$时，量 $|x+3|$ 不会超过 $\dfrac{9}{2}$.

【问 4】在证明或解带绝对值的不等式时，应如何处理绝对值符号？

答： 在处理带绝对值的不等式（或等式）时，首先要设法去掉绝对值符号. 去绝对值符号，通常有以下三种方法：

(1) 根据绝对值定义，将变量 x 分情况讨论；

(2) 根据绝对值的性质，将绝对值不等式化成其等价形式进行讨论；

(3) 利用两端平方的办法去掉绝对值符号.

以上三种办法可以根据具体情况灵活选用。下面举个例子，从中可以看出具体的处理方法。

例． 解不等式 $|x|>|x-2|$．

解法 1：$x=0$ 和 $x=2$ 将数轴分为三个区间：

$$(-\infty,\ 0),\quad [0,\ 2],\quad (2,+\infty).$$

当 x 在每个区间上变化时，绝对值符号内的式子都有确定的正负号，因而都可以去掉绝对值符号．故可按上述三个区间分三种情况讨论．

①当 $x<0$ 时，$|x|=-x$，$|x-2|=-(x-2)$，原不等式化为

$$-x>-(x-2),$$

即
$$0>2.$$

故 $x<0$ 时，原不等式不可能成立。

②当 $0\leqslant x\leqslant 2$ 时，$|x|=x$，$|x-2|=-(x-2)$，原不等式化为

$$x>-(x-2),$$

即
$$x>1.$$

又前提条件是 $0\leqslant x\leqslant 2$，故 $1<x\leqslant 2$ 是原不等式的解．

③当 $x>2$ 时，$|x|=x$，$|x-2|=x-2$，原不等式化为

$$x>x-2,$$

即
$$0>-2.$$

此不等式恒成立，故 $x>2$ 时，原不等式成立。

综合以上三种情况，知原不等式的解为

$$x>1.$$

解法 2：按照绝对值的性质，原不等式可以化为它的等

价形式

$$x > |x-2| \tag{1}$$

或

$$x < -|x-2|. \tag{2}$$

又(1)式可化为

$$-x < x-2 < x, \tag{3}$$

(2)式变形为　$|x-2| < -x$，进一步化为

$$x < x-2 < -x. \tag{4}$$

(3) 式的解为 $x>1$，(4) 式无解．故原不等式的解为 $x>1$．

解法 3：将原不等式两端平方，得

$$x^2 > (x-2)^2,$$

化简得

$$0 > 4x-4,$$

解得

$$x > 1.$$

此即原不等式的解．

显然，本例使用第三种解法比较简便．但要注意，不等式两端平方时，要求不等式两端非负，否则，两端平方会破坏不等式的同解性．

思 考 与 练 习

1．$\sqrt[n]{a^n}=|a|$，对吗？　　　　(答：未必对．)

2．解下列不等式，并在 x 轴上画出解的范围：

(1) $|x+1|<0.1$；　　(2) $|2x-1|<|x-1|$；

(3) $|x^2+x-1|>1$．

(答：(1) $-1.1<x<-0.9$；　(2) $0<x<\frac{2}{3}$；

(3) $x<-2, x>1, -1<x<0$.)

§2 函数概念

函数概念是数学里极其重要的概念。中学里已经讲过这个概念，但要真正理解它的实质含意并不是容易的事情。读者在学习函数概念时，不要局限于定义的背诵，要通过各种例子理解函数概念的实质。

【问 1】函数概念的实质是什么？

答：通俗地说，函数可以用两个圆圈和一个箭头来描述。(如图 1-2 所示) 圆圈 D、E 分别表示两堆实数（称为数集D和数集 E)，如果对于 D 中的任一个数，按照一定的规律，E 中都有确定的数与其对应（图中箭头即表示这种对应)，那么就构成一个函数关系。实质上说，函数就是两个数集之间的一种对应关系。数集 D 称为定义域，数集 E 称为值域。如果变量 x 可以在 D 中任意取值（称为自变量)，变量 y 在 E 中取值（称为因变量)，那么 D 和 E 之间的对应关系可以记为 $y=f(x)$，称变量 y 为变量 x 的函数。先看一个例子。

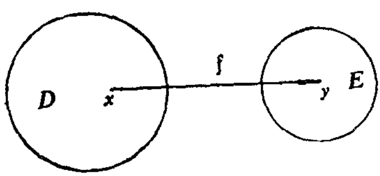

图 1-2

$$y=f(x)=\begin{cases}x^2, & 当 0\leqslant x\leqslant 2;\\ -x, & 当 -2\leqslant x<0.\end{cases} \tag{1}$$

这里，x 的变化范围 D（定义域）是闭区间$[-2,\ 2]$；y 的变

化范围E（值域）是闭区间[0，4]；对应规律是由（1）式给出的。具体地说，在D中任取一数，譬如取$x=1.5$，因1.5在区间[0，2]上，按照（1）式所给的对应关系，E中对应的数$y=1.5^2=2.25$。若在D中取$x=-1$，因-1在区间[-2，0)上，E中对应的数$y=-(-1)=1$。一般地，若$x=a$，那么当$0\leqslant a\leqslant 2$时，$y=a^2$；当$-2\leqslant a<0$时，$y=-a$。由此可见，（1）式给出了数集[-2，2]与[0,4]之间的一种对应关系，因而给出了一个函数。

弄清了函数概念的本质，很多问题就容易理解了。例如常数函数$y=1$，表示定义域是全体实数，值域由一个数1构成，定义域中任一数都有确定的数1与之对应。由于构成了两个数集间的对应关系，因而是一个函数。

谈到函数时，常有人说："因变量随着自变量的变化而变化。"这种说法不够确切。因为在函数关系中，自变量变化了，因变量不一定变化。不同的x值可能对应相同的y值，如上面谈到的常数函数。再如函数$y=x^2$，x取-1和1时，对应的y值都是1。

另外，还需要指出，函数的表示方式没有任何限制。不能认为函数就是一个数学表达式，式子只是表达函数的一种主要形式，函数还可以用图形、列表、语言叙述等其他形式表示。下面举两个用"语言叙述"表示的函数。

（1）$y=[x]$表示"y是x的最大整数部分"。这个函数定义域是全体实数，值域是全体整数，对应关系是：当$x=n+a$时，(其中n为整数，且$0\leqslant a<1$) $y=n$。

（2）$y=\pi(x)$ $(x\geqslant 0)$表示"y是不超过x的素数的个数"。

这个函数的定义域是非负实数，值域是非负整数。任给一个正数 x，那么不超过 x 的素数个数是确定的。例如，$\pi(8.2)=4$，$\pi(13)=6$。

【问 2】分段函数是由几个解析式表示出来的，那么分段函数是一个函数，还是几个函数？

答：分段函数也是一个函数，几个表达式只是说明在定义域的不同部分，对应关系由不同的解析式给出，不能理解成几个函数。例如

$$y=f(x)=\begin{cases}x^2+1, & x>0;\\ 0, & x=0;\\ 2x-1, & x<0.\end{cases}$$

这个函数的定义域为$(-\infty,+\infty)$，分为三部分：$(-\infty,0)$，0，$(0,+\infty)$。在$(-\infty,0)$上，对应关系由 $2x-1$ 给出。如 $x=-1$，则 $y=f(-1)=2\cdot(-1)-1=-3$。当 $x=0$ 时，$y=f(0)=0$。在 $(0,+\infty)$ 上，对应关系由 x^2+1 给出。如 $x=2$，则 $y=f(2)=2^2+1=5$。容易看出，这个函数的值域是$(-\infty,-1)$，0，$(1,+\infty)$，这也是个数集，设为 E。这样，由上述分析可知，所给的分段函数在数集 $(-\infty,+\infty)$和数集 E 之间建立了确定的对应关系，因而构成一个函数。不能理解成三个函数。

【问 3】确定一个函数的基本要素是什么？如何判断两个函数相同还是不同？

答：确定一个函数有两个基本要素：一个是定义域；一个是自变量与因变量之间的对应规律。也有人将值域加上去，

合称为函数三要素。实际上，给出定义域及自变量与因变量间的对应关系后，函数的值域自然可以被确定出来，因而定义域和对应关系是主要的。只要给出了定义域和对应关系，就是给出了一个函数。

根据上面所说，判断两个函数是否相同（或相等），只要看它们的定义域和对应关系是否相同就可以了。

例。函数 $y_1=x-1$，$y_2=\dfrac{x(x-1)}{x}$ 相同吗？

解：两个函数都没有给出定义域，那么，按照习惯，就认为它们的定义域就是自变量的允许值范围。这样，y_1 的定义域是全体实数，y_2 的定义域是 $x\neq0$（不等于零的任意实数）。两个函数的定义域不同，因而两个函数不相同。它们的图象如图 1-3 所示。（图中空心小圆圈表示函数在该处无定义）当

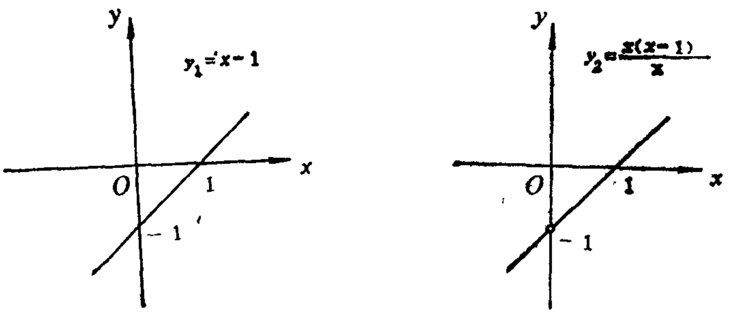

图 1-3

然，如果说："当 $x\neq0$ 时，$y_1=y_2$。"还是可以的。因为在 $x\neq0$ 的范围内，它们的对应关系是相同的。

【问 4】 人们常说"初等函数"、"非初等函数"、"代数

函数”、“超越函数”等，这些名词都是什么意思？

答：函数的分类通常有两种：一种是将函数分为初等函数和非初等函数；另一种是将函数分为代数函数和超越函数。下面具体加以解释。

先说基本初等函数。它包含六种函数*：(1) 常数函数；(2) 幂函数 $y=x^a$（a 为任意实数）；(3) 指数函数 $y=a^x$ ($a>0$, $a\neq1$)；(4) 对数函数 $y=\log_a x$ ($a>0$, $a\neq1$)；(5) 三角函数 $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\operatorname{tg}x$, $y=\operatorname{ctg}x$；(6) 反三角函数 $y=\arcsin x$, $y=\arccos x$, $y=\operatorname{arctg}x$, $y=\operatorname{arcctg}x$。这六种基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的复合步骤所得到的函数，统称为初等函数。初等函数是范围很广的一类函数，我们通常碰到的用一个解析式表示的函数（不包括分段函数）大都是初等函数。例如

$$y=\sqrt{1-\sin x},\quad y=\frac{e^x-\ln x}{x},$$

$$y=\operatorname{arctg}x+\frac{e^{\cos\sqrt{x}}+x}{\ln x}$$

等都是初等函数。

不属于初等函数的函数称为非初等函数。微积分里常出现的分段函数基本上都是非初等函数。如著名的狄利克莱函数

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 为有理数；}\\ 0, & x\text{ 为无理数}\end{cases}$$

* 有的书说五种，不含(1)；有的书说四种，不含(1)，(2)。但由此产生的初等函数类都是相同的。

就是非初等函数。又如用无穷级数表达的贝塞尔函数

$$f(x)=1-\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^4}{2^2\cdot 4^2}-\frac{x^6}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2}+\cdots\cdots$$

也是非初等函数。另外前面提到的两个用“语言叙述”表达的函数 $y=[x]$, $y=\pi(x)$ 也都是非初等函数。

代数函数是对于自变量只作有限次的四则、乘方、开方几种运算所得到的函数。这类函数范围较窄，包括以下几类：(1) 有理整函数（即多项式）；(2) 有理分式函数（仅含多项式及多项式的商），如 $y=5x+2+\dfrac{x+x^2}{2-x^3}$；(3) 无理函数（含有多项式的根式），如 $y=\sqrt[3]{x^2}+x+\dfrac{x^2+1}{\sqrt{x-5}}$. 除这三类函数外，其他函数均为超过函数，如三角函数、反三角函数、指数函数、对数函数以及所有的非初等函数等。幂函数 $y=x^{\alpha}$，当 α 为有理数时为代数函数，当 α 为无理数时为超越函数。

由上述可知，初等函数中既有代数函数，也有超越函数．而非初等函数均为超越函数。

思 考 与 练 习

1. x 的符号函数 $y=\operatorname{sign}x$ 定义如下：

$$\operatorname{sign}x=\begin{cases}1, & \text{当 } x>0;\\ 0, & \text{当 } x=0;\\ -1, & \text{当 } x<0.\end{cases}$$

试分析此函数的定义域及对应规律，并验证

$$|x|=x\cdot\operatorname{sign}x.$$

2. $y=x$ 与 $y=\sqrt{x^2}$ 相同吗？　　(答：不同。)

3. $y=|x|$ 是初等函数吗？　　(答：是，$|x|=\sqrt{x^2}$。)

4. $y=\ln x^2$ 与 $y=2\ln x$ 相同吗？(答：定义域不同。)

§3　函数符号、定义域、值域

【问1】函数符号 $y=f(x)$ 应如何理解和使用？

答： 初学者对于函数符号 $y=f(x)$ 往往不大习惯，但是在高等数学里，这种符号使用的十分普遍，所以一定要理解它，并学会使用它。

$y=f(x)$ 表示 y 是 x 的函数。如果函数是用公式给出的，那么 f 就代表公式里的所有运算。

例如，函数　$y=2x^2-3x+5$ 可以记为

$$f(x)=2x^2-3x+5.$$

此时 f 就好象一组运算的架子

$$f(\quad)=2\cdot(\quad)^2-3\cdot(\quad)+5.$$

把这个架子用于自变量 x，就得到 $f(x)=2x^2-3x+5$，

把它用于 0，2，就得到

$$f(0)=2\cdot(0)^2-3\cdot(0)+5=5,$$

$$f(2)=2\cdot(2)^2-3\cdot(2)+5=7.$$

故 $f(0)$，$f(2)$ 就是函数 $y=f(x)$ 对应于 0，2 的函数值。同样，

$$f(a+1)=2(a+1)^2-3(a+1)+5$$

就是函数 $y=f(x)$ 对应于 $a+1$ 的函数值。所以符号 $f(x)$ 不但可以表示函数，而且可以简单地表示出函数值。下面举例进一步说明函数符号 $f(x)$ 的运用。