

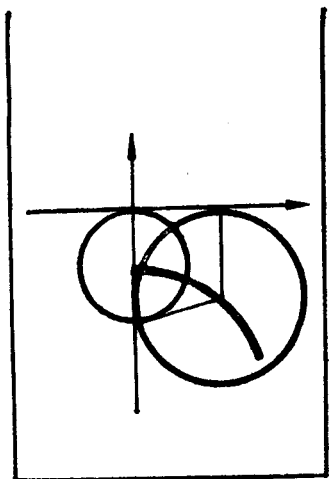
The background of the book cover is a deep purple color. It is decorated with several golden-yellow mathematical diagrams. In the top right, there is a circle with a horizontal and vertical diameter, and a shaded region within it. Below this, on the right side, is a diagram of a parabola opening upwards with its vertex at the origin of a coordinate system. In the center, there is a larger coordinate system with a parabola opening upwards and two intersecting lines. At the bottom, there is another coordinate system with a parabola opening upwards. The year '1982' is printed in a large, stylized font within a dark rectangular box in the upper left.

1982

**研究生
入学数学试题汇解**

**YANJIUSHENG
RUXUESHUXUE
SHITI HUIJIE**

安徽教育出版社



研究生入学数学试题汇解

(上)

严镇军 苏家铎 朱功勤 卢树铭 戴俭华 何天晓 合编

前 言

本书选编了中国科学院及国内部分高等理工科院校1982年度招收攻读硕士研究生的数学入学试题。它基本上包括了大学理工科各专业(非数学专业)所学的数学分析、场论、常微分方程、线性代数、复变函数、数学物理方程、概率论与数理统计等内容。

编入本书的试题全部作了解答和论证。其中既有一定数量的基本理论和运算题,又有相当数量的各种证明题、应用题和综合题。大多数试题不仅具有相当的难度,而且有一定的技巧性。不少试题的构造对综合、灵活运用基本知识解题很有启发。

为了适应部分读者的需要,本书还选编了中国科学技术大学本学年数学系攻读硕士研究生的数学分析、函数论、线性代数、数理方程试题及解答。

由于条件限制,收集到的试题有些属于抄件,加以编者业务水平所限,因而试题错漏及解答不够准确之处在所难免,敬请读者批评指正。

本书在编写过程中,得到了有关院校的同志热情支持和大力帮助,及时惠寄了试题,特在此表示感谢。

编 者

一九八二年五月

目 录

一、中国科学院	1
1. 高等数学(一).....	1
2. 高等数学(二).....	13
3. 高等数学(三).....	22
4. 高等数学(四).....	29
二、中国科技大学	32
1. 高等数学(甲).....	32
2. 高等数学(乙).....	43
3. 高等数学(自动控制专业).....	59
4. 线性代数(自动控制专业).....	69
三、北京大学	75
1. 高等数学、数学物理方法(固体地球物理、大气物理、大气动力学、空间物理等专业).....	75
2. 高等数学(地图与遥感专业).....	83
3. 高等数学(声学、无线电电子学专业).....	92
四、清华大学	103
1. 甲 型.....	103
2. 乙 型.....	115
五、复旦大学	118
高等数学(物理系各专业).....	118
六、浙江大学	130
七、同济大学	139

八、南京大学	150
1. 高等数学(甲)	150
2. 高等数学(乙)	155
3. 高等数学(丙)	160
4. 线性代数(矿床学专业)	163
九、北京师范大学	171
1. 高等数学(物理、天文、无线电专业)	171
2. 高等数学(化学、地理、生物专业)	180
十、中山大学	184
高等数学(物理各专业)	184
十一、山东大学	197
高等数学(物理类专业)	197
十二、厦门大学	208
高等数学	208
十三、兰州大学	219
1. 高等数学(天气动力学专业)	219
2. 高等数学(生物系各专业)	228
3. 高等数学(自然地理专业)	234
十四、西北大学	242
1. 高等数学(计算机专业)	242
2. 数学物理方法(理论物理专业)	246
十五、安徽大学	257
1. 高等数学(经济管理专业)	257
2. 数学物理方法(理论物理专业)	264
十六、陕西师范大学	279
1. 高等数学(超声学专业)	279
2. 高等数学(近代光学专业)	292

十七、北京师范学院	299
高等数学(太阳能专业)	299
十八、南京工学院	305
高等数学	305
十九、西安交通大学	312
高等数学	312
二十、天津大学	322
高等数学	322
二十一、北京工业学院	335
高等数学	335
二十二、合肥工业大学	342
高等数学	342
二十三、华中工学院	358
高等数学	358
二十四、大连工学院	371
高等数学(电类、化工类以外各专业)	371
二十五、北京钢铁学院	382
高等数学	382
二十六、华东水利学院	389
高等数学	389
二十七、上海工业大学	399
高等数学	399
二十八、武汉地质学院	409
1. 高等数学(水文地质、工程地质、探矿工程、数学地质专业)	409
2. 高等数学(应用地球物理专业)	417
3. 高等数学(地质类各专业)	425

4. 概率论及数理统计(数学地质专业)	436
二十九、南京航空学院	443
高等数学	443
三十、东北工学院	451
高等数学	451
三十一、武汉钢铁学院	463
高等数学	463
三十二、武汉测绘学院	473
1. 高等数学	473
2. 线性代数	480
三十三、南京邮电学院	490
数 学	490
三十四、华东化工学院	502
1. 高等数学(工程类)	502
2. 高等数学(工艺类)	511
三十五、成都电讯工程学院	517
高等数学	517
三十六、西北工业大学	525
高等数学	525
三十七、北京工业大学	532
高等数学	532
三十八、西北电讯工程学院	540
高等数学	540
三十九、北方交通大学	550
1. 高等数学(非电类)	550
2. 高等数学(电类)	556
四十、昆明工学院	558

高等数学	558
四十一、湖南大学	569
高等数学	569
四十二、山东工学院	581
数 学	581
四十三、南京化工学院	595
高等数学 线性代数 概率论	595
四十四、上海机械学院	604
高等数学	604
四十五、华东纺织工学院	616
高等数学	616
四十六、武汉建材学院	628
高等数学	628
四十七、中南矿冶学院	636
高等数学(包括线性代数和概率论基础)	636
四十八、成都地质学院	653
高等数学(地质类专业)	653
四十九、兰州铁道学院	661
高等数学	661
五十、北京农业机械化学院	671
高等数学	671
五十一、镇江农机学院	680
高等数学	680
五十二、湘潭大学	690
高等数学(焊接专业)	690
五十三、长沙铁道学院	698
高等数学	698

五十四、陕西机械学院	706
高等数学	706
五十五、太原工学院	718
1. 高等数学(固体力学专业)	718
2. 高等数学	727
3. 高等数学(岩土工程专业)	730
五十六、安徽工学院	733
高等数学	733
五十七、淮南矿业学院	746
高等数学	746
五十八、甘肃工业大学	754
高等数学	754
五十九、无锡轻工业学院	764
高等数学	764
六十、贵州工学院	772
高等数学(采煤学、水工结构专业)	772
六十一、郑州工学院	780
高等数学	780
六十二、北京轻工业学院	792
高等数学	792
六十三、大连轻工业学院	801
高等数学	801
六十四、南京林产工业学院	812
高等数学	812
六十五、中国科学院长春光机所	821
高等数学	821
六十六、一机部机械研究院	833

1. 高等数学	833
2. 工程数学	841
六十七、中国科学技术大学	849
1. 数学分析(数学系)	849
2. 函数论(数学系)	856
3. 线性代数(数学系)	864
4. 数学物理方程(数学系)	872

一、中国科学院

1. 高等数学(一)

一. (1) (4分) 证明: $\nabla \times (\varphi \mathbf{A}) = \varphi \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \varphi \times \mathbf{A}$

(2) (10分) 证明: $\oint_{\lambda} f d\bar{\lambda} = \iint_{\sigma} \hat{n} \times \nabla f d\sigma$

σ 为一曲面, 其边界线为 λ , $\hat{n}$ 为 σ 面上的单位法向矢量, f 为点 M 的函数.

(3) (3分) 已知矢量场 $\mathbf{a} = \{x^2 - y^2, 2xy\}$

计算 $\oint_{\sigma} \text{rot}_n \mathbf{a} d\sigma$

σ 为 xoy 平面上由 $x=0$, $x=a$, $y=0$, $y=b$ 所围成的矩形平面.

解 (1) 设 $\mathbf{A} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$, 有

$$\nabla \times (\varphi \mathbf{A}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \varphi P & \varphi Q & \varphi R \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} [\nabla \times (\varphi \mathbf{A})]_x &= \frac{\partial(\varphi R)}{\partial y} - \frac{\partial(\varphi Q)}{\partial z} \\ &= \frac{\partial \varphi}{\partial y} R + \varphi \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial \varphi}{\partial z} Q - \varphi \frac{\partial Q}{\partial z} \\ &= \varphi \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) + \frac{\partial \varphi}{\partial y} R - \frac{\partial \varphi}{\partial z} Q \end{aligned}$$

$$= \varphi [\nabla \times \mathbf{A}]_x + [\nabla \varphi \times \mathbf{A}]_x$$

同理

$$[\nabla \times (\varphi \mathbf{A})]_y = \varphi [\nabla \times \mathbf{A}]_y + [\nabla \varphi \times \mathbf{A}]_y$$

$$[\nabla \times (\varphi \mathbf{A})]_z = \varphi [\nabla \times \mathbf{A}]_z + [\nabla \varphi \times \mathbf{A}]_z$$

所以

$$\nabla \times (\varphi \mathbf{A}) = \varphi (\nabla \times \mathbf{A}) + \nabla \varphi \times \mathbf{A}$$

(2) 由 *stokes* 公式, 得

$$\left[\oint_{\lambda} f d\bar{\lambda} \right]_x = \oint_{\lambda} f dx = \iint_s \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right) dz dx - \frac{\partial f}{\partial y} dx dy$$

又设 $\hat{n} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ 为 σ 面上的外法向单位向量, 有

$$\hat{n} \times \nabla f = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix}$$

故

$$\begin{aligned} \left[\iint_{\sigma} \hat{n} \times \nabla f d\sigma \right]_x &= \iint_{\sigma} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \cos \beta - \frac{\partial f}{\partial y} \cos \gamma \right) d\sigma \\ &= \iint_{\sigma} \frac{\partial f}{\partial z} dz dx - \frac{\partial f}{\partial y} dx dy \\ &= \left[\oint_{\lambda} f d\bar{\lambda} \right]_x \end{aligned}$$

同理

$$\left[\oint_{\lambda} f d\bar{\lambda} \right]_y = \left[\iint_{\sigma} \hat{n} \times \nabla f d\sigma \right]_y$$

$$\left[\oint_{\lambda} f d\bar{\lambda} \right]_z = \left[\iint_{\sigma} \hat{n} \times \nabla f d\sigma \right]_z$$

所以

$$\oint_1 f d\bar{\lambda} = \iint_{\sigma} \hat{n} \times \nabla f d\sigma.$$

$$\begin{aligned} (3) \quad \oiint_{\sigma} \operatorname{rot}_n \alpha d\sigma &= \iint_{\sigma} \left[\frac{\partial(2xy)}{\partial x} - \frac{\partial(x^2 - y^2)}{\partial y} \right] dx dy \\ &= \int_0^a dx \int_0^b 4y dy = 2ab^2. \end{aligned}$$

二. (6分; 3分; 2分) 求矩阵:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

的本征值 λ_i , 本征矢量 x_i , 这些矢量 $\{x_i\} (i=1, 2, 3)$ 是否为正交的?

解 B 的特征多项式是

$$\begin{aligned} \det(B - \lambda E) &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (2-\lambda)^2(3-\lambda) - 2(2-\lambda) \\ &= (2-\lambda)(\lambda^2 - 5\lambda + 4) \\ &= (2-\lambda)(\lambda-4)(\lambda-1). \end{aligned}$$

故 B 的本征值为 $\lambda_1=1, \lambda_2=2, \lambda_3=4$, 下面求相应本征向量.

1°. $\lambda=1$, 由

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ x_2 + x_3 = 0, \end{cases}$$

求得与 $\lambda=1$ 相应的本征向量 $X_1 = C_1(1, -1, 1)$.

2°. $\lambda=2$, 由

$$\begin{cases} x_2=0, \\ x_1+2x_2+x_3=0, \end{cases}$$

求得 $X_2 = C_2(1, 0, -1)$.

3°. $\lambda=4$, 由

$$\begin{cases} -2x_1+x_2=0, \\ x_1-x_2+x_3=0, \\ x_2-2x_3=0, \end{cases}$$

求得 $X_3 = C_3(1, 2, 1)$.

因 B 为实对称阵. 故这些本征向量相互正交.

三. (1) (4分, 4分) 将函数 $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$ 在区域 $K_1: |z| < 1$, $K_2: 1 < |z| < 2$ 展开为罗朗级数.

(2) (8分) 计算: $\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx$.

解 (1) 在区域 $K_1: |z| < 1$ 内,

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1} \\ &= \frac{1}{1-z} - \frac{1}{2-z} = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{2} \frac{1}{1-\frac{z}{2}} \end{aligned}$$

因 $|z| < 1$, $\left|\frac{z}{2}\right| < 1$, 故

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) z^n$$

此为 Taylor 展开.

在区域 $K_2: 1 < |z| < 2$ 内, $\left|\frac{z}{2}\right| < 1$, $\left|\frac{1}{z}\right| < 1$, 而

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-z} &= -\frac{1}{z\left(1-\frac{1}{z}\right)} \\ &= -\frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n},\end{aligned}$$

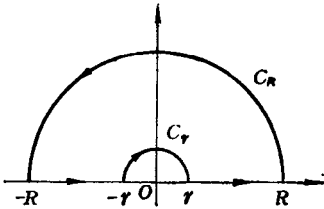
所以

$$f(z) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n}.$$

$$(2) \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{1 - \cos 2x}{x^2} dx,$$

取辅助函数 $f(z) = \frac{1 - e^{2iz}}{z^2}$, 闭路 C 如图, 因 $f(z)$ 在 C 内无

奇点, 故

$$\begin{aligned}0 &= \int_C f(z) dz \\ &= \int_{C_R} + \int_{-R}^{-r} f(x) dx + \\ &\quad + \int_{C_r} + \int_r^R f(x) dx \quad (1)\end{aligned}$$


而

$$\begin{aligned}\int_{C_R} &= \int_{C_R} \frac{1}{z^2} dz - \int_{C_R} \frac{1}{z^2} e^{2iz} dz \\ \left| \int_{C_R} \frac{1}{z^2} dz \right| &\leq \pi R \cdot \frac{1}{R^2} = \frac{\pi}{R} \rightarrow 0 \quad (R \rightarrow \infty)\end{aligned}$$

又由 Jordan 引理

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{1}{z^2} e^{2iz} dz = 0.$$

故

$$\int_{C_R} \rightarrow 0 \quad (R \rightarrow \infty).$$

又

$$\begin{aligned}\int_{C_r} &= \int_{\pi}^0 \frac{1}{r^2 e^{2i\theta}} [(1 - \exp(2ire^{i\theta})) ire^{i\theta}] d\theta \\ &= \int_{\pi}^0 \frac{i}{re^{i\theta}} [-2ire^{i\theta} + o(r)] d\theta\end{aligned}$$

故

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{C_r} = \int_{\pi}^0 2 d\theta = -2\pi.$$

所以, 在(1)中令 $R \rightarrow \infty$, $r \rightarrow 0$ 取极限, 得

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \cos 2x + i \sin 2x}{x^2} dx - 2\pi = 0$$

所以

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx &= \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \cos 2x}{x^2} dx \\ &= \frac{1}{4} \cdot 2\pi = \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

四. (12分) 求微分方程组的通解 $y(x)$, $z(x)$;

$$\begin{cases} y' + z' - \frac{2}{x^2}y - z = x, \\ xy' - z' + \frac{2}{x^2}y - xz = x^2. \end{cases}$$

解 把第一个方程和第二个方程分别记作(1)及(2), 于是(1)+(2)得

$$(x+1)y' - (x+1)z = x(x+1).$$

即

$$\begin{aligned}y' &= z + x, \\ y &= \int z dx + \frac{x^2}{2}.\end{aligned}$$

将 y 及 y' 代入(1), 得

$$z + x + z' - \frac{2}{x^2} \left(\int z dx + \frac{x^2}{2} \right) - z = x.$$

即

$$\begin{aligned} z' - \frac{2}{x^2} \int z dx - 1 &= 0, \\ x^2 z' - 2 \int z dx - x^2 &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

(3)式求导, 得

$$x^2 z'' + 2x z' - 2z = 2x,$$

令 $x = e^t$, 得

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{dz}{dt} - 2z = 2e^t, \quad (4)$$

特征根为 1, -2, 故相应齐次方程的通解是 $c_1 e^t + c_2 e^{-2t}$,

再令 $z = Ate^t$, 代入(4)可求得一特解 $\frac{2}{3}te^t$, 故(4)的通解是

$$\begin{aligned} z &= c_1 e^t + c_2 e^{-2t} + \frac{2}{3}te^t \\ &= c_1 x + c_2 \frac{1}{x^2} + \frac{2}{3}x \ln x. \end{aligned}$$

再把(1)式乘以 x 减去(2)式, 得

$$(x+1)z' - \frac{2}{x}y - \frac{2}{x^2}y = 0$$

故

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2}x^2 z' \\ &= \frac{1}{2}x^2 \left(c_1 - 2c_2 \frac{1}{x^3} + \frac{2}{3} \ln x + \frac{2}{3} \right) \\ &= \frac{c_1}{2}x^2 - c_2 \frac{1}{x} + \frac{1}{3}x^2 (\ln x + 1). \end{aligned}$$

综上, 得所求通解为