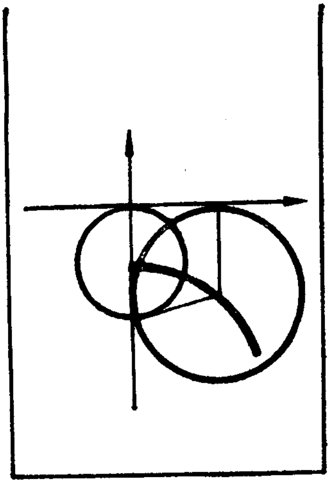
1982

研究生入学数学试题汇解

YANJIUSHENG
RUXUESHUXUE
SHITIHUIJIE

安徽教育出版社



研究生入学数学试题汇解

（上）

严镇军 苏家铎 朱功勤 卢树铭 戴俭华 何天晓 合编

前　言

本书选编了中国科学院及国内部分高等理工科院校1982年度招收攻读硕士研究生的数学入学试题。它基本上包括了大学理工科各专业(非数学专业)所学的数学分析、场论、常微分方程、线性代数、复变函数、数学物理方程、概率论与数理统计等内容。

编入本书的试题全部作了解答和论证。其中既有一定数量的基本理论和运算题，又有相当数量的各种证明题、应用题和综合题。大多数试题不仅具有相当的难度，而且有一定的技巧性。不少试题的构造对综合、灵活运用基本知识解题很有启发。

为了适应部分读者的需要，本书还选编了中国科学技术大学本学年数学系攻读硕士研究生的数学分析、函数论、线性代数、数理方程试题及解答。

由于条件限制，收集到的试题有些属于抄件，加以编者业务水平所限，因而试题错漏及解答不够准确之处在所难免，敬请读者批评指正。

本书在编写过程中，得到了有关院校的同志热情支持和大力帮助，及时惠寄了试题，特在此表示感谢。

编　者

一九八二年五月

目 录

一、中国科学院

1.高等数学(一)

一. (1)(4分)证明:$\nabla\times(\varphi\mathbf{A})=\varphi\triangle\times\mathbf{A}+\nabla\varphi\times\mathbf{A}$

(2)(10分)证明:$\oint\limits_{\lambda} f\,d\bar{\lambda}=\iint\limits_{\sigma}\hat{n}\times\triangle f\,d\sigma$

σ 为一曲面,其边界线为 λ,$\hat{n}$为 σ 面上的单位法向矢量,f 为点 M 的函数.

(3)(3分)已知矢量场 $\boldsymbol{a}=\{x^2-y^2,\ 2xy\}$

计算 $\oiint\limits_{\sigma}\mathrm{rot}_n\,\boldsymbol{a}\,d\sigma$

σ 为 xoy 平面上由 $x=0$,$x=a$,$y=0$,$y=b$ 所围成的矩形平面.

解 (1)设 $\mathbf{A}=P\mathbf{i}+Q\mathbf{j}+R\mathbf{k}$,有

$$\nabla\times(\varphi\mathbf{A})=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x}&\dfrac{\partial}{\partial y}&\dfrac{\partial}{\partial z}\\ \varphi P&\varphi Q&\varphi R\end{vmatrix}$$

$$[\nabla\times(\varphi\mathbf{A})]_x=\frac{\partial(\varphi R)}{\partial y}-\frac{\partial(\varphi Q)}{\partial z}$$

$$=\frac{\partial\varphi}{\partial y}R+\varphi\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial\varphi}{\partial z}Q-\varphi\frac{\partial Q}{\partial z}$$

$$=\varphi\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)+\frac{\partial\varphi}{\partial y}R-\frac{\partial\varphi}{\partial z}Q$$

$$=\varphi[\nabla\times\mathbf{A}]_x+[\nabla\varphi\times\mathbf{A}]_x$$

同理

$$[\nabla\times(\varphi A)]_y=\varphi[\nabla\times A]_y+[\nabla\varphi\times A]_y$$

$$[\nabla\times(\varphi A)]_z=\varphi[\nabla\times A]_z+[\nabla\varphi\times A]_z$$

所以

$$\nabla\times(\varphi A)=\varphi(\nabla\times A)+\nabla\varphi\times A$$

（2）由 *stokes* 公式，得

$$\left[\oint_\lambda f\,d\bar{\lambda}\right]_x=\oint_\lambda f\,dx=\iint_S\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)dz\,dx-\frac{\partial f}{\partial y}dx\,dy$$

又设 $\hat{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ 为 σ 面上的外法向单位向量，有

$$\hat{n}\times\nabla f=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} & \dfrac{\partial f}{\partial z}\end{vmatrix}$$

故

$$\left[\iint_\sigma\hat{n}\times\nabla f\,d\sigma\right]_x=\iint_\sigma\left(\frac{\partial f}{\partial z}\cos\beta-\frac{\partial f}{\partial y}\cos\gamma\right)d\sigma$$

$$=\iint_\sigma\frac{\partial f}{\partial z}dz\,dx-\frac{\partial f}{\partial y}dx\,dy$$

$$=\left[\oint_\lambda f\,d\bar{\lambda}\right]_x$$

同理

$$\left[\oint_\lambda f\,d\bar{\lambda}\right]_y=\left[\iint_\sigma\hat{n}\times\nabla f\,d\sigma\right]_y$$

$$\left[\oint_\lambda f\,d\bar{\lambda}\right]_z=\left[\iint_\sigma\hat{n}\times\nabla f\,d\sigma\right]_z$$

所以

$$\oint_{\lambda} f d\bar{\lambda} = \iint_{\sigma} \hat{n} \times \nabla f d\sigma.$$

(3) $\displaystyle\oiint_{\sigma} \mathrm{rot}_n \boldsymbol{a} d\sigma = \iint_{\sigma} \left[\frac{\partial(2xy)}{\partial x} - \frac{\partial(x^2-y^2)}{\partial y} \right] dx dy$

$$= \int_0^a dx \int_6^b 4y dy = 2ab^2.$$

二. (6分;3分;2分) 求矩阵:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

的本征值 λ_i; 本征矢量 x_i; 这些矢量 $\{x_i\}(i=1, 2, 3)$是否为正交的?

解 B 的特征多项式是

$$\det(B-\lambda E) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (2-\lambda)^2(3-\lambda) - 2(2-\lambda)$$

$$= (2-\lambda)(\lambda^2 - 5\lambda + 4)$$

$$= (2-\lambda)(\lambda-4)(\lambda-1).$$

故 B 的本征值为 $\lambda_1=1$, $\lambda_2=2$, $\lambda_3=4$, 下面求相应本征向量。

1°. $\lambda=1$, 由

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0; \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0; \\ x_2 + x_3 = 0, \end{cases}$$

求得与 $\lambda=1$ 相应的本征向量 $X_1 = C_1(1, -1, 1)$.

2°. $\lambda=2$, 由

$$\begin{cases} x_2 = 0; \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \end{cases}$$

求得 $X_2 = C_2(1, 0 - 1)$.

3°. $\lambda = 4$, 由

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 = 0; \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0; \\ x_2 - 2x_3 = 0, \end{cases}$$

求得 $X_3 = C_3(1, 2, 1)$.

因 B 为实对称阵。故这些本征向量相互正交.

三.（1）（4分，4分）将函数 $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$ 在区域 K_1：$|z| < 1$；K_2：$1 < |z| < 2$ 展开为罗朗级数.

（2）（8分）计算：$\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx$.

解 （1）在区域 K_1：$|z| < 1$ 内，

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1}$$

$$= \frac{1}{1-z} - \frac{1}{2-z} = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{2} \frac{1}{1 - \frac{z}{2}}$$

因 $|z| < 1$，$\left|\frac{z}{2}\right| < 1$，故

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) z^n$$

此为 Taylor 展开.

在区域 K_2：$1 < |z| < 2$ 内，$\left|\frac{z}{2}\right| < 1$，$\left|\frac{1}{z}\right| < 1$，而

$$\frac{1}{1-z}=-\frac{1}{z\left(1-\frac{1}{z}\right)}$$

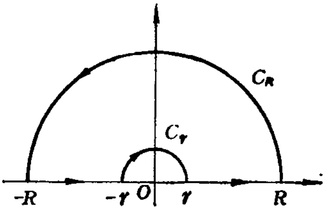
$$=-\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n},$$

所以

$$f(z)=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n}.$$

(2) $\int_0^{\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}dx=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\frac{1-\cos 2x}{x^2}dx,$

取辅助函数$f(z)=\frac{1-e^{2iz}}{z^2}$，闭路$C$如图，因$f(z)$在$C$内无奇点，故



$$0=\int_C f(z)dz$$

$$=\int_{C_R}+\int_{-R}^{-r}f(x)dx+$$

$$+\int_{C_r}+\int_r^R f(x)dx \quad (1)$$

而

$$\int_{C_R}=\int_{C_R}\frac{1}{z^2}dz-\int_{C_R}\frac{1}{z^2}e^{2iz}dz$$

$$\left|\int_{C_R}\frac{1}{z^2}dz\right|\leqslant \pi R\cdot\frac{1}{R^2}=\frac{\pi}{R}\longrightarrow 0 \quad (R\to\infty)$$

又由 *Jordan* 引理

$$\lim_{R\to 0}\int_{C_R}\frac{1}{z^2}e^{2iz}dz=0.$$

故

$$\int_{C_R}\longrightarrow 0 \qquad (R\to\infty).$$

又

$$\int_{C_r}=\int_{\pi}^{0}\frac{1}{r^2e^{2i\theta}}[(1-\exp(2ire^{i\theta})]ire^{i\theta}d\theta$$

$$=\int_{\pi}^{0}\frac{i}{re^{i\theta}}[-2ire^{i\theta}+o(r)]d\theta$$

故

$$\lim_{r\to 0}\int_{C_r}=\int_{\pi}^{0}2d\theta=-2\pi.$$

所以，在(1)中令$R\to\infty$，$r\to 0$取极限，得

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-\cos 2x+i\sin 2x}{x^2}dx-2\pi=0$$

所以

$$\int_{0}^{\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}dx=\frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-\cos 2x}{x^2}dx$$

$$=\frac{1}{4}\cdot 2\pi=\frac{\pi}{2}.$$

四．（12分）求微分方程组的通解$y(x)$，$z(x)$：

$$\begin{cases} y'+z'-\dfrac{2}{x^2}y-z=x, \\ xy'-z'+\dfrac{2}{x^2}y-xz=x^2. \end{cases}$$

解 把第一个方程和第二个方程分别记作(1)及(2)，于是(1)+(2)得

$$(x+1)y'-(x+1)z=x(x+1).$$

即

$$y'=z+x,$$

$$y=\int z\,dx+\frac{x^2}{2}.$$

将y及y'代入(1)，得

$$z+x+z'-\frac{2}{x^2}\left(\int z dx+\frac{x^2}{2}\right)-z=x.$$

即

$$z'-\frac{2}{x^2}\int z\,dx-1=0,$$

$$x^2z'-2\int z\,dx-x^2=0. \tag{3}$$

(3)式求导，得

$$x^2z''+2xz'-2z=2x,$$

令 $x=e^t$，得

$$\frac{d^2z}{dt^2}+\frac{dz}{dt}-2z=2e^t, \tag{4}$$

特征根为 1，-2，故相应齐次方程的通解是 $c_1e^t+c_2e^{-2t}$，再令 $z=Ate^t$，代入(4)可求得一特解 $\frac{2}{3}te^t$，故(4)是通解是

$$z=c_1e^t+c_2e^{-2t}+\frac{2}{3}te^t$$

$$=c_1x+c_2\frac{1}{x^2}+\frac{2}{3}x\ln x.$$

再把(1)式乘以 x 减去(2)式，得

$$(x+1)z'-\frac{2}{x}y-\frac{2}{x^2}y=0$$

故

$$y=\frac{1}{2}x^2z'$$

$$=\frac{1}{2}x^2\left(c_1-2c_2\frac{1}{x^3}+\frac{2}{3}\ln x+\frac{2}{3}\right)$$

$$=\frac{c_1}{2}x^2-c_2\frac{1}{x}+\frac{1}{3}x^2(\ln x+1).$$

综上，得所求通解为