

第 二 部 分

双相材料中三维断裂力学

问题的理论与应用研究

第一章 绪论

§ 1.1 本项目的目的和意义

在许多工程结构内部,由于加工或疲劳荷载等因素的影响,不可避免地存在着某些缺陷,如裂纹、夹杂或其它损伤。缺陷的存在将影响材料的强度。因此,工程结构的破坏往往是由这些缺陷引起的,此时缺陷附近的应力对破坏起着主导作用,所以,研究缺陷附近的应力场是极为重要的,断裂力学作为一门研究固体材料实际强度的科学,为工程结构的安全设计提供可靠的理论和数据,在工程实际中具有重要意义。

随着复合材料的广泛应用,与此有关的复合材料断裂力学也得到了很大的发展。由于复合材料及其结构的力学特性比较复杂,如各向异性、非均匀性、宏观构造上呈层性等,使得复合材料断裂力学的研究变得十分困难^[1~3],特别是在三维问题方面的研究工作更为少见。为了研究方便,人们将实际的复合材料简化成各种各样的力学模型,其中双相材料(bimaterial)模型是其中最为简单的一种,本项目将以此模型为基础来开展三维复合材料断裂力学方面的研究工作。这不仅具有重要的理论意义,而且也具有重要的实际应用价值。

关于三维复合材料断裂力学问题的研究,早期的工作^[1, 4]大都限于解析的工作,但由于问题的复杂性,要想求得各种各样问题的解析解是不可能的,因此,工程中经常采用数值方法进行求解。随着计算机的广泛应用,在求解三维断裂力学问题的数值方法方面已有不少新进展,如差分法、有限元法和边界元法等^[5, 6]。在众多的数值法中,边界元法是一种比较成功的方法,它是相应于边界积分方程的数值法。由于它在数值计算过程中尽可能地采用了解析运算,最后主要涉及边界上的信息,因而它的数值计算要比一般的数值法具有更高的精度,所以目前文献中,这种方法用得较多。由于边界元法在其求解过程中,需要无限域的基本解,正是由于这一特点,使得边界元法求解复合材料中的有关问题存在着较大的困难^[3]。虽然关于双相材料空间问题的基本解已经有了部分结果^[7~9],但这些结果直接用于边界元法还存在困难,如果能够完整地得到其基本解,这对于用边界元法求解双相材料中的有关问题具有重要的意义。本项目对这一问题进行了详细研究,给出了双相材料空间在集中力作用下的位移分量和应力分量的显式表达式,这为使用边界元法求解双相材料空间中的力学问题奠定了基础。在此基础上,本项目对双相材料中的任意平片裂纹问题进行了详细讨论。首先使用 Betti 互换定理,导出了平片裂纹分别在平行于界面和垂直于界面两种情况下的超奇异积分方程组,并根据有限部积分的原理和方法,为其建立了统一的数值处理方法。考虑到裂纹的存在对双相材料界面强度的影响,本项目具体推导了界

界面裂纹问题是复合材料工程中的重要问题,也是目前国内外非常关注的一个研究热点^[2,10,11]。就目前而言,绝大多数工作仍然是集中在二维问题^[12~15],而许多实际问题都是三维的,因此,开展三维界面断裂力学方面的研究,不仅具有重要的理论意义,它的实际应用前景也是非常广阔的。由于这一问题非常困难,现有除了一部分解析结果外,直到最近才有人开始用有限元法对其进行数值计算,但在这里,还有许多基本问题没有解决,所以本文在这方面亦作了探索,并力求达到在理论上获得某些新进展。本文利用所得到的基本解,使用边界元法得到了任意平片界面裂纹问题的超奇异积分方程,然后用主部分析法,得到了裂纹前沿的奇异性指数。这一结果表明,裂纹前沿的奇性应力场具有振荡性,这与以往的结果是完全一致的。最后指出,由于时间及数值处理上某些技术的困难,本文在获得平片界面裂纹的积分方程后,未能进一步开展界面裂纹的数值工作,但这组积分方程的建立,对于进一步开展三维界面断裂力学问题的研究具有基本意义。

§ 1.2 三维断裂力学的研究进展

在三维断裂力学的早期文献中,解析工作较多,从事三维断裂解析分析工作的主要有 Sneddon^[16,17]以及 Sih 和 Kassir^[4,18~21]等人,他们使用积分变换等方法,求得了无限体或半空间体中圆形或椭圆形裂纹的解析解,Hartranft 等^[22]利用 Williams 特征展形的方法,获得了裂纹前沿光滑点处的奇性应力场。Smith 和 Alaui^[23]利用 Schwarz-Neuman 交替法^[24]求得了半空间体圆形裂纹的半解析半数值解。就在同一时期,Erdog 和 Arin^[25]曾用积分变换的方法,对于一个含有圆片裂纹的弹性层与两种不同材料性质的弹性半空间粘合在一起的空间轴对称问题进行了研究,通过将问题归结为一组 Cauchy 型积分方程,给出了问题的数值解。以上工作大都是在 1970 年前后完成的。在这一时期,还有一些学者也做了有关的解析工作,这可以参见 Sih 等人的专著^[1,4],在此不再一一介绍。总之,由于三维裂纹问题的复杂性,解析分析十分困难,能够求得精确解的,仅限于几何形状及荷载比较特殊的简单问题。

近年来,三维断裂力学问题的研究有不少是属于数值方法,其中用的较多的是有限元法和边界元法。由于有限元法的数值离散比较规范,它的通用性较强,因此很受工程界的欢迎。在早期的研究工作中,在裂纹前缘附近,由于单元的形函数不能表征裂纹前缘应力所具有的奇异性,因此,只能通过加密网格的方法来获取可靠的精度^[26],为了克服这一缺点,许多学者在裂纹前缘引入奇异单元,使得裂纹前缘的应力函数具有 $1/2$ 阶奇性,但由于这些单元比较特殊,需要特殊处理,因此显得非常麻烦^[27],后来,Bursoum^[28]于 1976 年首次采用等参奇异单元法计算三维断裂力学问题,从而克服了这一缺点。目前这种方法得到了广泛应用和发展^[5,29,30]。我国在这一领域中也开展了大量工作,柳春图等人^[31~33]

采用“局部—整体分析法”，即在局部区域采用 Williams 特征展开法，分析裂纹前沿的奇性应力场，获得了裂纹前沿应力场的一般解，然后使用有限元法计算了三维表面裂纹问题的应力强度因子，得到了精度较高的数值结果。总之，由于有限元法可说是一种纯数值法，并且需要对整个裂纹体进行离散，使得计算工作量较大，特别是分析多个三维裂纹问题，几乎难以具体实施，这是该方法的一个主要缺点。

边界元法是在最近二十几年才发展起来的一种数值方法。由于边界元法能够将所研究的问题的控制微分方程转换成边界上的一组积分方程，使得问题的离散只需要在边界上进行，从而使计算工作量大为减少，并且能够提高计算精度，所以该方法在力学及其它领域得到了广泛的应用。最早使用该方法求解三维裂纹问题的是 Cruse 和 Buren (1971)^[6]，他们将边界积分方程法应用于断裂力学，采用分割区域法将裂纹问题化为一般的边值问题进行处理，从而避免了边界元法解决断裂力学问题时所遇到了不确定性。此后，有不少作者采用这种方法来求解三维裂纹问题。为了提高计算精度，一般需要在裂纹前沿配置奇异单元，Cruse 和 Wilson^[34]、Tan 和 Fenner^[35]最早使用等参奇异元计算了三维裂纹体的应力强度因子。Luchi 等人^[37-37]曾经在裂纹前沿引入了一种特殊的奇异单元 (Traction Singular Element)，由于该单元能够准确描述裂纹前缘的奇性应力场，因此，这种方法能够获得精度较高的应力强度因子的数值结果。近年来，Levan 和 Peseux^[38]，Jia、Shippy 和 Rizzo^[39]以及 Farris 和 Liu^[40]等人分别采用奇异单元法对三维裂纹问题进行了研究，取得了理想的数值结果。在我国，边界元法的研究亦受到广泛重视，杜庆华和嵇醒最早开展了这方面的研究工作，他们在断裂力学方面亦取得了许多重要成果^[41,42]。另外，张永元在这方面的的工作也是比较有特色的。他们对等参奇异元在求解三维裂纹体中的应用进行过详细讨论，不仅提出了一种新的等参奇异元^[43]，而且发现单元的配置是否合理和奇性元尺寸的选择对应力强度因子的计算精度有很大影响，若在奇性元与一般等参元之间适当采用过渡元，可以提高计算精度^[44]。

由于边界元法在其公式化的过程中，需要无限域中的基本解，使得边界元法的应用具有一定的局限性。特别是用于求解复合材料中的有关问题存在着较大困难^[3]。关于三维问题，除著名的 Kelvin 基本解外，Mindlin^[45]给出了边界为自由的半无限空间在集中力作用下的基本解，Lorentz 曾给出了弹性半空间在集中力作用下的位移边值问题的解^[46]。而关于双相材料空间在集中力作用下的基本解 Rongved^[7]曾做过研究，Dundurs 和 Hetenyi^[8]曾对此解答做过整理。该结果后来被 Keer 及其合作者引用^[47, 48]。由于 Rongved 的结果在国内没有这方面的资料，所以本人一直未能见到其详细结果，而文[8]中的结果又不完整，因此无法采用这些结果来进行双相材料空间中的裂纹问题的研究。黄克服和王敏中^[9]最近也对这个问题进行了研究，但他们只是给出了问题的位移解答。为了便于应用，本文对此

结果进行了进一步整理,最后获得了双相材料显式基本解,从而使得边界元法能够推广用于该类问题的求解。

边界元法的另一个缺点就是在求解裂纹问题时需要沿裂纹面进行分域。对于三维裂纹问题,特别是对三维裂纹群的分析,其计算工作仍然很大,有时几乎难以实现。

近年来,在三维断裂力学中还发展了一种由边界积分方程演化过来的奇异积分方程方法。这种方法操作比较规范,可以解决一般的三维断裂力学问题,其中除解决应力强度因子的计算外,还可以解决断裂力学的其它参数计算,它们的解析性也比较理想,所以在目前断裂力学文献中应用较广。其中最流行的有两种类型的奇异积分方程,一种是主值型积分方程,另一种是超奇异积分方程。

最早使用主值型积分方程方法求解三维裂纹问题的是 Guidera 和 Lardner (1975)^[49],他们将 Somigliana 公式用于分析三维断裂力学的任意平片裂纹问题,首次建立了以裂纹面位移间断的切向导数为未知函数的积分方程。这是一组在 Cauchy 主值意义下才收敛的二维奇异积分方程,称为主值型积分方程。随后, Cruse (1975)^[50]和 Weaver (1977)^[51]也分别得到了与此类似的奇异积分方程。Bui (1977)^[52]使用 Kupradze 单层势函数和双层势函数^[53],也曾独立地导出了任意形状平片裂纹问题的主值型奇异积分方程,其中的未知函数为势函数的切向导数,与裂纹面位移间断的切向导数相当,此方程与 Weaver^[51]的结果等价。关于主值型奇异积分方程的数值求解,虽然 Weaver^[51]、Bui^[52]、Polch 和 Cruse^[54]等分别进行了讨论,但由于二维主值型奇异积分方程还没有能供实际使用的解析理论,在近似计算上亦无很好的求积分式,另外,由于方程的未知函数在裂纹边界上存在奇性,并且其耦联度又较大,这些都给数值计算带来困难,所以这方面的改进有待于进一步的研究^[55,56]。

关于用超奇异积分方程方法求解三维裂纹问题,最早是由 Ioakimidis 于 1982 年首次提出的^[57,58]。他使用有限部积分的概念和方法,从理论上严格地导出了裂纹面上受法向载荷作用的二维和三维 I 型裂纹问题的超奇异积分方程。随后,他又在文献^[59]中进一步证明了所建立的超奇异积分方程在裂纹前沿的点上也是成立的,从而为超奇异积分方程在断裂力学中的应用奠定了基础。Takakuda^[60]、Linkov 和 Mogilevshaga^[61]分别获得了受一般载荷作用的任意形状平片裂纹的超奇异积分方程组,但它们对方程的正确性并未作严格证明。在裂纹前沿的性态分析方面, Ioakimidis^[62]、Takakuda^[63]分别使用超奇异积分方程方法,分析了楔形裂纹角点处的奇性应力场,给出了计算奇性指数的近似公式,但他们的计算公式只适合于 I 型裂纹问题,对于 II 型和 III 型问题未作研究。此外,他们在研究过程中使用了分离变量法,这在角点处是否成立,他们并未作证明。

关于超奇异积分的有限部分的计算, Kutt 曾在 1975 年建立了比较系统的数值理论^[64,65]。此后, 又有许多学者对于一维超奇异积分方程的数值计算方法作了大量研究^[66~69], 这些结果对于二维超奇异积分方程的求解有一定的参考意义。Takakuda 和 Kaizumi^[60]等曾推广了一维超奇异积分方程的数值法, 利用位移间断的 Chebyshev 多项式展开获得了椭圆形裂纹的数值解。Sohn 和 Hony^[70]利用位移间断的分片线性表示技巧为无限体 I 型裂纹的超奇异积分方程建立了数值法, 并获得了椭圆形裂纹的数值结果。Linkov 等^[61]和 Ioakimidis^[71]虽然也对二维超奇异积分方程的数值计算方法作过研究, 但最终都没有给出具体的数值结果。Martin 和 Rizzo^[72]曾从边界积分方程的角度, 评述了断裂力学中的超奇异积分方程方法, 并且指出在数值计算的研究方面具有广阔的前景。在国内, 关于超奇异积分方程方法也有大量的研究工作, 汤任基在文献[73]中首先对三类积分方程进行了研究, 指出它们之间相互是等价的。随后, 在文献[74~76]中, 他们又对超奇积分方程组的正确性进行了严格证明, 并且利用主部分分析法, 精确地求得了裂纹前沿光滑点附近的奇性应力场, 在此基础上, 与常规边界元法结合, 统一地为其建立了数值法, 并用此计算了若干典型的平片裂纹问题。这些工作不仅具有重要的理论意义, 在应用上也是很有价值的。另外, 国内还有一些这方面的研究工作^[77,78], 这些也都是很有意义的。由于超奇异积分方程方法具有耦合度低, 数值计算容易实现等优点, 如果能将该方法推广用于求解复合材料中的三维裂纹问题, 特别是用于三维界面裂纹问题中去, 这将是非常有意义的。

用体积力学求解裂纹问题是 Nisitani^[79]于 1967 年提出的, 就其实质来讲, 它是一种间接边界元法。Nisitani 及其合作者曾用此方法系统地分析过二维裂纹问题^[80]。1974 年, Nisitani 和 Murakami^[81]将该方法用于求解三维裂纹问题。由于该方法的未知函数为体积力密度, 其物理意义不甚明确, 另外, 他们所得到的边界积分方程也是一种超奇异积分方程, 但对其正确性一直未能给出严格的数学证明, 在数值计算方面也未能给出一般的超奇异积分的数值处理方法。因此, 他们早期的工作主要局限于无限及半无限空间中的椭圆平片裂纹问题。1982 年, Murakami 和 Nemat-Nasser^[82]首次利用 Eshelby^[83]和 Mura^[84]关于夹杂问题的本征应变法, 将问题表示成以裂纹面上的位错作为未知函数的边界积分方程, 该方法才得到进一步的发展^[85~87]。用体积力法求解复合材料中的三维裂纹问题, 最早是由 Lee 和 Keer^[47]于 1986 年作过研究。他们首先分析了垂直于双相材料界面的半椭圆裂纹问题, 随后又将该方法推广应用于求解处于任意位置的平片裂纹问题^[48], 并给出了椭圆形和圆形平片裂纹问题的数值结果。随着复合材料的广泛使用, 有必要对双相材料中的三维平片裂纹问题进行进一步研究。

§ 1.3 界面断裂力学

在许多工程材料中,界面是一个重要组成部分。比如复合材料中的相界、多晶合金材料中的晶界,以及双相材料中的界面等都是典型的例子。由于材料中的界面处往往是缺陷极易萌生乃至断裂破坏的地方,它的存在必然会影响材料本身的力学行为,因此近代新型材料的研制与细观结果的设计均与界面及界面断裂力学的研究紧密结合,从而使得界面及界面断裂力学的研究显得十分重要,现已成为固体力学、金属物理学及材料科学等领域内的一个研究热点^[2,88,89]。

界面断裂力学的研究起始于五十年代末。1959年,Williams^[90]首次利用应力函数的分离变量形式,使用渐近展开的方法,分析了各向同性双相材料界面裂纹问题,发现裂纹尖端附近的应力场的奇异性指数为复数,从而导致了裂纹顶端应力场的振荡奇性及裂纹面的相互嵌入现象,这在物理上是不合理的。后来,England^[91]、Erdogan^[92]、Rice 和 Sih^[93]以及 Malyshev 和 Salganik^[94]等相继采用不同的方法(复变函数法,复变函数法与渐近展开相结合等)对类似的直线界面裂纹问题进行了研究,从理论上进一步证实了这种振荡奇异性。England^[95]、Perlman 和 Sih^[96]以及 Taya^[97]等对曲线界面裂纹问题的研究结果表明,这种振荡奇异性不仅局限于直线界面裂纹,对于一般的曲线界面裂纹也存在这种现象。关于双相材料界面裂纹在III型载荷作用下的情况,Erdogan 曾作过详细研究^[98],结果表明,这类问题中并不存在应力振荡现象。

在经典断裂力学中,应力强度因子不仅是用于表征裂纹尖端应力场的奇性强度,同时,也是一个重要的物理参量,因此确定裂纹尖端的应力强度因子一直是断裂力学中的首要任务。对于界面裂纹问题,由于裂纹尖端的应力场具有振荡奇异性,因此常规的应力强度因子定义遇到了困难,目前还无统一的定义方法,现有文献中较合理的定义采用了复数形式,即: $K = K_I + iK_{II}$ 。与均质体中的情形不同,其实部 K_I 和虚部 K_{II} 并非单纯地对应于 I 型

外载和 II 型外载,而是彼此耦合在一起的。另外, K 的量纲为 $[\text{应力}][\text{长度}]^{\frac{1}{2}-\epsilon}$ (其中 ϵ 为振荡奇异性指数),这在物理中也是少见的,虽然如此,但这种复应力强度因子 K 可使用均质材料裂纹的能量释放率公式计算界面裂纹的能量释放率,并具有相同的量纲,因此,在界面断裂力学韧性分析中,一般都采用以上定义,并用此计算能量释放率 G 进行断裂分析^[94]。最近, Hutchinson 等^[12]、Rice^[34]等对界面断裂力学问题作了进一步的分析,其结果表明,如果界面裂纹尖端附近的振荡区域与裂纹本身的尺寸相比非常小,还可以引进另一种新的复应力强度因子 K^* ^[12],它可以作为一种物理参数来描述裂纹尖端的奇异应力场和表征裂纹的扩展条件。对于许多工程材料,两相材料的常数比 ϵ 的值都很小^[12],此时只要无穷远处的外载的相位角满足一定的条件,上述结论是适用的^[13]。

关于界面裂纹问题的研究, Erdogan 及其合作者在此领域中完成了大量的极为出色的工作, 为复合材料断裂力学的研究打下了坚实的理论基础。他们的系列工作所采用的方法大致相同, 即利用积分变换和位错方法, 将问题归结为一组奇异积分方程, 根据有关的数值法给出问题的数值解答。其数值结果主要集中在应力奇异性指数、应力强度因子和能量释放率等方面。

1969 年, Erdogan 和 Ozbek^[99]分析了含有缺陷连接的纤维增强复合材料, 缺陷连接被看成为一个典型的界面裂纹。文中分别给出了它的应力强度因子和能量释放率, 并配以详细的数值结果。

对于双层或多层的复合材料中含有各种裂纹问题, Erdogan 及其同事做了大量的研究工作。在文献[100]中, 他们分析了一种由三层介质组成的复合材料, 裂纹位于其中与上下两个半平面相粘合的均匀弹性层内。通过 Fourier 变换, 将问题化简成一个第一类的 Fredholm 奇异积分方程。由于嵌入均匀介质中的裂纹的应力奇异性与界面上的裂纹有所不同, 当裂纹与界面之间的距离趋近于零时, 并没有从一个解到另一个解的光滑过渡。因此, 文献[101]接着处理了这一问题, 在文[100]的基础上, 通过分离出奇异性核中的奇异部分, 得到了一个第二类的奇异积分方程, 并讨论了该方程的数值求解方法。在文[102, 103]中, Erdogan 和 Arin 将上述方法推广用于求解空间轴对称的圆形裂纹问题。当裂纹位于界面上时^[103], 其奇异积分方程与文[101]中的结果类似。在文献[104]中, Cook 和 Erdogan 采用 Mellin 变换, 研究了裂纹垂直于界面的情形, 详细分析了当裂纹尖端位于界面时的应力奇异性指数。Erdogan 和 Biricikoglu^[105]在文[104]的基础上对裂纹穿过界面后的情形进行了研究, 结果表明, 在裂纹尖端和裂纹与界面的交点处, 应力均有奇性, 文中对它们的性质逐一作了讨论。他们还将该方法推广用于分析其它类似的问题^[106~113]。

对于纤维增韧型复合材料中的曲面界面裂纹问题, Luo 和 Chen^[14]采用三相复合材料本构模型^[114, 115]对此问题进行了研究。他们使用复变函数法, 将问题归结为一组 Hilbert 问题, 给出了界面上的应力分布以及裂纹面上的张开位移, 并相应给出了复应力强度因子, 结果表明, 当纤维的体积集中系数增加时, 复应力强度因子的模也逐渐变大。这对于纤维增韧型复合材料的设计是很有意义的。

有限元法也是研究界面裂纹问题的一个有力工具。许多学者曾采用有限元法对线弹性界面裂纹问题作过研究, 如 Lin 和 Mar^[116], Wang and yuan^[117], Raju, Crews and Aminpour^[118]等。近年来, 有限元法在这一领域中得到了广泛使用。对于二维界面裂纹问题的弹塑性分析, Shih 和 Asaro 使用有限元法完成了一系列极为出色的工作^[15, 119~120]。其结果表明, 在裂纹尖端, 双相材料的力学行为象一种塑性材料粘接在一种刚体上。这一性质被 Wang^[121]

和 Guo and Keer^[122]等的结果所证实。关于三维界面裂纹问题, 已有部分学者采用有限元法做过一些探索性工作。Barsoum and Chen^[123]用有限元迭代法(The Finite Element Iterative Method)对三维界面裂纹与自由表面相关的角点邻域中的奇异性应力场进行了研究。他们将渐近场展成为 $f(r) \cdot g(\theta, \varphi)$ 的形式(其中 $f(r)$ 和 $g(\theta, \varphi)$ 都是一般的复函数, 而 $f(r)$ 可以按照复型指数形式进行展开), 对于一种弹性材料与刚性材料粘接在一起的情形进行了具体分析, 结果表明, 应力奇性指数的实部大于 0.5, 并且随着 ν 的增加而增大, 而其虚部随着 ν 的增大而减小, 特别是 $\nu \geq 0.25$ 时, 其虚部几乎为零。Naka mura^[124]曾采用有限元法对薄板和厚板的双材料界面裂纹的三维效应进行了分析, 结果表明, 在裂纹前缘, 特别是在裂纹与自由边界的交点处, 存在很大的III型变形, 其三维效应非常明显, 它不仅影响了能量释放率的变化, 同样也影响了裂纹前沿的三种应力强度因子。关于界面裂纹的角点区域的奇异性问题, Ghahremani and Shih^[125]也曾作过研究。他们指出, 如果双相材料界面裂纹的角点问题的渐近展开级数的两个主导特征值为实型的, 则此类角点处渐近场的结构与均质材料中的角点问题是类似的, 但也存在着明显的差别, 其强奇异性应力场与反对称模式有关, 而弱奇异性应力场与对称模式有关, 但这两种奇异性应力场总是耦合在一起的。文献[123~125]是作者目前所见到的关于三维界面断裂力学的研究成果。

关于用边界元法来研究二维界面裂纹问题只是在最近几年才开始的。Yuuki and Chao 等人^[126,127]利用 Hetengi and Dundurs^[128,129]双相材料平面在集中力作用下的弹性力学基本解, 使用边界元法分析了界面裂纹问题。通过计算裂纹面上的位移分量, 然后使用外推法来计算裂纹尖端的应力强度因子。Lee and Choi^[130]使用边界元法中的分域法, 也分析了上述问题, 利用靠近裂纹尖端单元节点上的位移值, 并结合界面裂纹尖端场的解析结果, 来计算问题的应力强度因子。Tan and Gao^[131, 132]虽然也采用了分域法, 但在计算应力强度因子的过程中, 通过计算应力强度因子 $K = K_I + iK_{II} = K_0 e^{i\psi}$ 的模 K_0 和相位角 ψ , 来间接确定 K_I 和 K_{II} 。关于用边界元法研究三维界面裂纹问题, 本人至今仍未见到。

界面裂纹尖端存在振荡性奇异性以及裂纹面产生相互嵌入的现象, 这在力学意义上总是不正确的。为了消除这种现象, 人们提出了各种各样的界面裂纹模型。

1977年, Comninou^[133]提出了裂纹面接触区模型。假定裂纹前沿存在一个无摩擦的接触区域。分析结果表明, 在裂纹前沿, 正应力是有界的, 剪应力是呈现负平方根奇异性, 而在接触区内, 正应力也呈现负平方根的奇异性。当考虑接触区的摩擦作用时, Comninou^[134]发现摩擦的存在减弱了应力的奇异性。该模型会产生一种奇怪的现象。对于承受I型外载的Griffith界面裂纹, 由于裂纹前沿的正应力有界, 而剪应力奇异, 从而使得裂纹扩展更接近于纯剪切破坏。对于界面两侧的弹性常数相差不太大的情况, 这种结论显得不太合理。

考虑到 Comninou 的解答中裂纹面之间都有一个相对滑移,而这一点在实际应用中不一定成立, Mak、Keer^[135]等人提出了一种无滑移界面裂纹模型,即认为裂纹面是凹凸不平的,当裂尖附近的裂纹面有所接触时,这种裂纹面的不光滑性限制了它们之间的相对错动。这种模型的分析结果表明,裂纹尖端的正应力和剪应力都呈现负平方根的奇异性,并且 II 型应力强度因子总是比 I 型强度因子小。

Atkinson (1977)^[136]曾提出了一种粘着层模型。他将界面看作是有一定厚度的界面层,这种界面层的力学性能与上、下两种材料的力学性能完全相异,可以用粘弹性来描述。他用此模型讨论了裂纹处于界面层中和位于界面层与一种介质相交的界面上的两种情况,结果表明,裂纹面的相互嵌入现象被消除。

Delale and Erdogan (1988)^[137]提出了一种非均匀层模型。此模型可以看作是对 Atkinson 的粘着层模型的一种改进。他们将界面看作是厚度相同的非均匀材料层,其弹性模量是连续变化的,并在上、下材料相接的地方与对应的材料保持连续。裂纹平行于界面并处于界面层内任意位置,结果表明,裂纹顶端有通常意义上的平方根奇性。

另外, Sinclair (1980)^[138]曾提出了裂纹张开角模型。该模型只能适用于上、下材料的弹性常数相差不大的情况。Knolwes and Sternbeg (1983)^[139]还通过对两种不同的 Neo-Hookean 板之间的界面裂纹的大变形分析发现,如果材料的本构关系用非线性的方式来描述,其应力振荡现象和裂纹面相互嵌入现象就会被消除。

最近,王吉伟和匡振邦^[140]对单向拉伸的界面裂纹提出了一种条形损伤——塑性区模型。在裂纹前方引入塑性区和损伤区,并假定在塑性区端点的应力有界,且使弱相介质达到屈服,损伤区的尺寸与裂纹的有效张开位移成正比。结果表明,在裂纹末端,应力的振荡性被清除,而在裂纹面上的位移呈现高阶的奇异性振荡 ($3/2 + i\varepsilon$)。

总之,以上的力学模型和分析方法都有一定的局限性,有的甚至带来另外一些物理上不合理的现象,这些问题仍需要进一步研究。

§ 1.4 本项目的主要工作

根据以上综述,本项目作了如下几方面的研究工作:

- 1、双相材料组成空间的弹性力学基本解。在这一部分中,本项目在文献[9]的基础上,采用弹性力学问题的 Papkovitch-Neuber 通解,使用调和函数的镜像法,对双相材料空间在集中力作用下的弹性力学基本解作了详细研究,给出了问题的位移场和应力场的显式表达式。此解答可以作为 Green 函数在边界元法中进行使用,从而为使用边界元法

究双相材料空间中的力学问题奠定了基础。这部分内容将在本文的第二章中介绍。

- 2、用超奇异积分方程方法求解双相材料空间中的平片裂纹问题。本文采用上述的双相材料空间问题的基本解,首次使用边界元法,对双相材料空间中位于一侧区域的平片裂纹问题作了详细研究。根据有限部积分的概念和方法,获得了在垂直于和平行于界面两种情况下的任意形状的平片裂纹问题的超奇异积分方程组,并根据平片裂纹前沿光滑点附近的奇性应力场,使用裂纹面上的位移间断定义了应力强度因子,这些结果为使用超奇异积分方程方法求解双相材料空间中的平片裂纹问题提供了理论基础。这部分内容在本文的第三章中给出。
- 3、超奇异积分方程组的数值算法及典型算例。本文使用有限部积分与常规边界元法相结合,利用位移间断的线性模型,将上述的超奇异积分方程组离散化为代数方程,并对其中的超奇异积分作了专门处理,为其建立了数值法,并给出了具体的计算公式。同时,使和(2)中的理论结果,给出了数值计算裂纹前沿应力强度因子的具体表达式。为了验证该方法的可靠性,这里作了考核性算例,然后使用上述方法对若干典型的平片裂纹问题作了数值计算,最后将数值结果列出表格或绘制了函数图。这些结果都是用自己编制的专用程序计算得到的,其中很多结果都是第一次报道。这部分工作将在第四章中介绍。
- 4、界面应力的计算。在复合材料裂纹问题的研究中,不仅需要计算裂纹尖端的应力强度因子,还应考虑裂纹的存在对界面上的应力的影响。本文在前述结果的基础上,给出了位于双相材料一侧的平片裂纹对材料界面干扰影响的界面应力的表达式,并具体讨论了其数值算法,编制了相应的计算程序,对几种典型问题进行了计算,并给出了数值结果。这部分内容也属于首次报道。这些工作将在本文的第五章中给出。
- 5、三维平片界面裂纹问题的基本方程及其理论分析。在这一部分中,本文采用边界元法,并结合有限部积分的概念和方法,首次对双相材料空间中的任意形状的平片界面裂纹问题进行了研究,获得了问题的积分——微分方程组,当问题退化到二维界面裂纹问题时,该方程的退化结果与已有的结果完全一致。本文还使用奇异积分方程的主部分分析法,系统研究了三维平片界面裂纹问题未知解的性态,求得了未知解的性态指数,该结果与已有的结果完全一致。由于振荡奇性的困难,本文未能对平片界面裂纹的求解进行讨论,这留待以后进行。以上结果为进一步研究三维界面裂纹问题奠定了基础,它是对三维复合材料断裂力学问题研究的一个推进。这部分内容将在本文的第六章中给予介绍。

第二章 双相材料空间的弹性力学基本解

关于双相材料空间在集中力作用下的弹性力学基本解, Rongved^[7]、黄克服和王敏中^[9]等分别进行了研究, 但他们的解答未能充分化简可作为基本解在边界元法中进行使用。本章使用文[9]的结果, 经过繁复的运算, 最后求得了单位集中力作用时区域中任一点以显式表示的位移场和应力场, 这一基本解已可方便地用于双相材料的边界元法研究, 从而为使用边界元法求解双相材料空间中的有关力学问题打下了基础。以下 § 2.1 ~ § 2.4 为文[9]获得的主要结果, § 2.5 是经本项目作者作了十分繁复的运算而得的基本解。

§ 2.1 三维弹性力学问题的通解

对于图 2.1 所示的三维无限大弹性体, 假定其弹性常数为 μ 和 ν , 在点 $p(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ 处作一个集中力 $F(F_1, F_2, F_3)$ 。根据弹性理论, 若不考虑体积力作用, 其位移场应满足如下的 Navier 方程^[14]:

$$(\lambda + \mu)U_{j,j} + \mu U_{i,jj} + F_i \delta(p, Q) = 0 \quad (2.1)$$

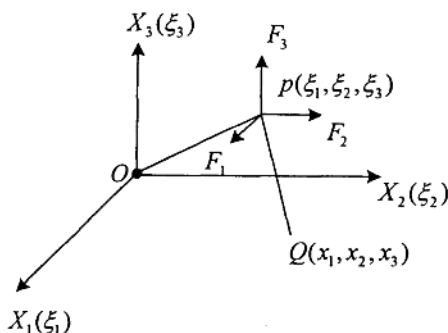


图 2.1

其中 $\lambda = \frac{2\nu\mu}{1-2\nu}$ 为拉梅弹性常数。 $i, j = 1, 2, 3$, 在此使用了张量求和规则。 $\delta(p, Q)$ 为 Dirac 函数, 它具有如下性质:

$$\delta(p, Q) = \begin{cases} 0 & \text{当点 } p \text{ 与点 } Q \text{ 不重合时} \\ \infty & \text{当点 } p \text{ 与点 } Q \text{ 重合时} \end{cases} \quad (2.2)$$

$$\int f(Q) \delta(p, Q) dv(Q) = f(p)$$

此方程的 Kelvin 特解为^[14]:

$$U_i^*(Q) = \frac{1}{4\pi\mu} \frac{F_i}{R} - \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)} \left[\frac{F_j(x_j - \xi_j)}{R} \right]_i \quad (2.3)$$

其中 $[]_i = \frac{\partial}{\partial x_i} []$, $R = [(x_i - \xi_i)(x_j - \xi_j)]^{\frac{1}{2}}$ 。

令

$$K_i = \frac{1}{4\pi\mu} \frac{F_i}{R}, \quad K_0 = -\frac{1}{4\pi\mu} \frac{\xi_j F_j}{R} \quad (2.4)$$

则(2.3)式可写成以下形式:

$$U_i^*(Q) = K_i - \frac{1}{4(1-\nu)} [K_0 + X_j K_j]_i \quad (2.5)$$

若不考虑集中力的作用, 方程(2.1)的通解就是 Papkovitch-Neuber 通解^[141]:

$$2\mu\tilde{U}_i(Q) = \Phi_i - \frac{1}{4(1-\nu)} [X_j \Phi_j + \Phi_0]_i \quad (2.6)$$

其中 Φ_0 和 Φ_i ($i=1,2,3$) 皆为调和函数。即:

$$\nabla^2 \Phi_0 = 0, \quad \nabla^2 \Phi_i = 0 \quad (i=1,2,3) \quad (2.7)$$

式中, $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$ 为 Laplace 算子。为了方便起见, 我们令:

$$\Phi_0 = 2\mu\varphi_0, \quad \Phi_i = 2\mu\varphi_i \quad (i=1,2,3) \quad (2.8)$$

很明显, φ_0 和 φ_i 仍然保持为调和函数。因此, Navier 方程(2.1)的通解可以表示成如下形式:

$$U_i(Q) = U_i^*(Q) + \tilde{U}_i(Q) = K_i + \varphi_i - \frac{1}{4(1-\nu)} [x_j \varphi_j + K_j(x_j - \xi_j) + \varphi_0]_i \quad (i=1,2,3) \quad (2.9)$$

其中 φ_0 和 φ_i ($i=1,2,3$) 皆为调和函数。

§ 2.2 双相材料空间问题的基本方程

考虑由两种材料的半空间所组成的弹性体, 其上半空间 ($x_3 > 0$) 的弹性常数为 μ_1 、 ν_1 , 下半空间的弹性常数为 μ_2 、 ν_2 , 两种材料在 $x_1 \circ x_2$ 平面上连接在一起 (如图 2.2 所示)。假定两种材料之间的连接是理想的, 即在界面 ($x_3 = 0$) 上位移和应力连续。设在上半空

间点 $p(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ 处作用一个集中力 $F = (F_1, F_2, F_3)$ 。我们的主要目的是要得到满足弹性力学方程和界面连续条件的位移场和应力场。

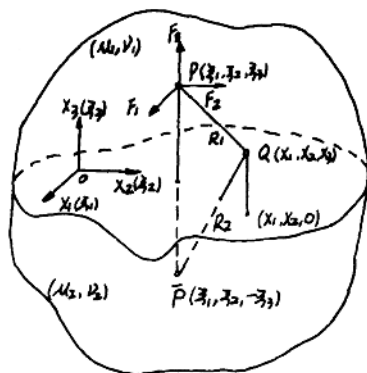


图 2.2

很明显，其上、下半空间中的位移场分别满足如下的 Navier 方程：

$$\begin{cases} (\lambda_1 + \mu_1)U_{i,jj}^+ + \mu_1 U_{i,jj}^+ + F_i \delta(P, Q) = 0 & (x_3 > 0) \\ (\lambda_2 + \mu_2)U_{i,jj}^- + \mu_2 U_{i,jj}^- = 0 & (x_3 < 0) \end{cases} \quad (2.10)$$

根据通解(2.9)式，方程(2.10)中的位移分量 U_i^+ 、 U_i^- ($i=1,2,3$) 可以直接写成如下形式：

$$\begin{cases} U_i^+ = \varphi_i + K_i - \frac{1}{4(1-\nu_1)} [\varphi_0 + K_0 + x_j \varphi_j + x_j k_j]_{,i} & (x_3 > 0) \\ U_i^- = \varphi_i - \frac{1}{4(1-\nu_1)} [\varphi_0 + x_j \varphi_j]_{,i} & (x_3 < 0) \end{cases} \quad (2.11)$$

式中 U_i^+ 和 U_i^- 分别表示上、下半空间中的位移场。 φ_0 、 ψ_0 及 φ_i 、 ψ_i 都是调和函数。即：

$$\begin{cases} \nabla^2 \varphi_0 = 0, \quad \nabla^2 \varphi_i = 0 & (x_3 > 0) \\ \nabla^2 \psi_0 = 0, \quad \nabla^2 \psi_i = 0 & (x_3 < 0) \end{cases} \quad (i=1,2,3) \quad (2.12)$$

因为两种材料的连接方式是理想的，因此在连接面 ($x_3 = 0$) 上，其位移及应力连续，即：

$$\begin{cases} U_i^+ = U_i^- \\ \sigma_{13}^+ = \sigma_{13}^-, \quad \sigma_{23}^+ = \sigma_{23}^-, \quad \sigma_{33}^+ = \sigma_{33}^- \end{cases} \quad (x_3 = 0) \quad (2.13)$$

利用(2.11)式以及应力应变关系(广义 Hooke 定律)，可以将 $x_3 = 0$ 处的连接条件(2.13)

用 φ_0 、 φ_i 、 ψ_0 、 ψ_i 以及 k_0 、 k_i 表示如下的形式:

$$\begin{cases} \varphi_1 + k_1 - \frac{1}{4(1-\nu_1)} P_{,1} = \psi_1 - \frac{1}{4(1-\nu_2)} q_{,1} \\ \varphi_2 + k_2 - \frac{1}{4(1-\nu_1)} P_{,2} = \psi_2 - \frac{1}{4(1-\nu_2)} q_{,2} \\ \frac{(3-4\nu_1)}{4(1-\nu_1)} (\varphi_3 + k_3) - \frac{1}{4(1-\nu_1)} P_{,3} = \frac{(3-4\nu_2)}{4(1-\nu_2)} \psi_3 - \frac{1}{4(1-\nu_2)} q_{,3} \end{cases} \quad (x_3 = 0) \quad (2.14)$$

以及

$$\begin{cases} \mu_1(\varphi_1 + k_1)_{,3} + \frac{\mu_1}{2(1-\nu_1)} [(1-2\nu_1)(\varphi_3 + k_3) - p_{,3}]_{,1} \\ \quad = \mu_2\varphi_{1,3} + \frac{\mu_2}{2(1-\nu_2)} [(1-2\nu_2)\psi_3 - q_{,3}]_{,1} \\ \mu_1(\varphi_2 + k_2)_{,3} + \frac{\mu_1}{2(1-\nu_1)} [(1-2\nu_1)(\varphi_3 + k_3) - p_{,3}]_{,2} \\ \quad = \mu_2\varphi_{2,3} + \frac{\mu_2}{2(1-\nu_2)} [(1-2\nu_2)\psi_3 - q_{,3}]_{,2} \\ \mu_1(\varphi_3 + k_3)_{,3} + \frac{\mu_1\nu_1}{1-\nu_1} [\varphi_{1,1} + \varphi_{2,2} + k_{1,1} + k_{2,2}] - \frac{\mu_1}{2(1-\nu_1)} P_{,33} \\ \quad = \mu_2\psi_{3,3} + \frac{\mu_2\nu_2}{2(1-\nu_2)} [\psi_{1,1} + \psi_{2,2}] - \frac{\mu_2}{2(1-\nu_2)} q_{,33} \end{cases} \quad (x_3 = 0) \quad (2.15)$$

这里:

$$\begin{cases} P = \varphi_0 + x_1\varphi_1 + x_2\varphi_2 + k_0 + x_1k_1 + x_2k_2 \\ q = \psi_0 + x_1\psi_1 + x_2\psi_2 \end{cases} \quad (2.16)$$

只要我们能够通过(2.12)以及边界条件(2.14)和(2.15)确定调和函数 φ_0 、 φ_i 及 ψ_0 、 ψ_i , 由此可以通过(2.11)来确定问题的位移场, 进而可以得到问题的应力场, 该问题就算完全解决。

§ 2.3 问题的求解

由于问题的边界是平面, 因此可以用调和函数的镜像法来求解。先引入如下定义: 设 $f(x_1, x_2, x_3)$ 是空间中的镜意函数, 我们定义一个与之——对应的函数 $\bar{f}(x_1, x_2, x_3)$, 它满足以下条件:

$$\bar{f}(x_1, x_2, x_3) = f(x_1, x_2, -x_3) \quad (2.17)$$

显然, 函数 $\bar{f}$ 具有如下性质:

$$\begin{cases} \overline{(\bar{f})} = f; \bar{f}|_{x_3=0} = f|_{x_3=0} \\ \overline{f_{,1}} = (\bar{f})_{,1}; \overline{f_{,2}} = (\bar{f})_{,2}; \overline{f_{,3}} = -(\bar{f})_{,3} \\ \overline{\nabla^2 f} = \nabla^2 (\bar{f}) \end{cases} \quad (2.18)$$

为了求解方便, 我们先引入下半空间中的调和函数 g 与 G :

$$\begin{cases} g(x_1, x_2, x_3) = -\frac{1}{4\pi\mu_1} \left(F_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + F_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \right) \ln(R - x_3 + \xi_3) \\ G(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{4\pi\mu_1} \left[(1-2\nu_1)\alpha_1 \left(F_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + F_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \right) - \delta_1 F_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \right] (x_3 < 0) \\ \quad \cdot [(-x_3 + \xi_3) \ln(R - x_3 + \xi_3) - R] \end{cases} \quad (2.19)$$

其中 $R = [(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 + (x_3 - \xi_3)^2]^{\frac{1}{2}}$, α_1 和 δ_1 均是材料常数, 将在以后给出。显然 g 与 G 有如下性质:

$$\begin{cases} g_{,3} = k_{1,1} + k_{2,2} \\ G_{,3} = (1-2\nu_1)\alpha_1 g - \delta_1 (k_3 + g) \end{cases} \quad (x_3 < 0) \quad (2.20)$$

考虑到 φ_i ($i=1,2,3$) 和 φ_0 是 $x_3 > 0$ 中的调和函数, 而 $\bar{\varphi}_i$ 和 $\bar{\varphi}_0$ 是 $x_3 < 0$ 中的调和函数, 另外, φ_0, φ_i 及 k_0, k_i 是 $x_3 < 0$ 上的调和函数 (k_0 和 k_i 的奇点在上半空间)。利用这些性质, 可以得到问题的解答如下:

$$\begin{cases} \varphi_0 = (\beta-1)\bar{k}_0 + (1-2\nu_1)\alpha_1\beta[\bar{k}_0 + x_1\bar{k}_1 + x_2\bar{k}_2 + x_3\bar{g}] + 4(1-\nu_1)\beta\bar{G} \\ \varphi_1 = (\beta-1)\bar{k}_1 \\ \varphi_2 = (\beta-1)\bar{k}_2 \\ \varphi_3 = (\beta-1)\bar{k}_3 + 2\alpha_1[\bar{k}_{0,3} + x_1\bar{k}_{1,3} + x_2\bar{k}_{2,3} + x_3\bar{g}_{,3}] + (1-2\nu_1)\alpha_1\beta[\bar{k}_3 - \bar{g}] \end{cases} \quad (x_3 > 0) \quad (2.21)$$

和:

$$\begin{cases} \psi_0 = \beta K_0 + \beta \left[\frac{1-v_2}{1-v_1} (1-2v_1) \alpha_1 + \frac{v_1-v_2}{1-v_1} \right] [k_0 + x_1 k_1 + x_2 k_2 - x_3 g] \\ \quad + 4(1-v_2) \beta G \\ \psi_1 = \beta k_1 \\ \psi_2 = \beta k_2 \\ \psi_3 = \beta k_3 - (1-2v_2) \alpha_2 \beta (k_3 + g) \end{cases} \quad (x_3 < 0) \quad (2.22)$$

这里各个常数分别为:

$$\begin{cases} \beta = \frac{2\mu_1}{\mu_1 + \mu_2}, \quad \alpha_1 = \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + \mu_2(3-4v_1)}, \quad \alpha_2 = \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_2 + \mu_1(3-4v_2)} \\ \delta_1 = \frac{1}{2} \left[\frac{\mu_1(1-2v_1)}{\mu_1 + \mu_2(3-4v_1)} - \frac{\mu_2(1-2v_2)}{\mu_2 + \mu_1(3-4v_2)} \right] \\ \delta_2 = \frac{\mu_1(1-2v_2)}{\mu_2 + \mu_1(3-4v_2)} - \frac{\mu_2(1-2v_1)}{\mu_1 + \mu_2(3-4v_1)} \end{cases} \quad (2.23)$$

§ 2.4 问题的位移场及几种退化结果

将以上得到的调和函数 φ_0 、 φ_i 与 ψ_0 、 ψ_i 的解答 (2.21) 和 (2.22) 代入位移场的表达式 (2.11) 中, 就可获得所要求解问题的位移场:

$$\begin{cases} U_i^+ = U_i + (3-4v_1) \alpha_1 \bar{U}_i - \alpha_1 x_3 [2\bar{U}_{3,i} + x_3 \nabla^2 \bar{U}_i] \\ \quad - \beta [(1-2v_1) \alpha_1 \bar{k}_i + \bar{G}_i] \quad (i=1,2) \\ U_3^+ = U_3 + (3-4v_1) \alpha_1 \bar{U}_3 - \alpha_1 x_3 [2\bar{U}_{1,1} + 2\bar{U}_{2,2} - x_3 \nabla^2 \bar{U}_3] \\ \quad - \beta \delta_1 (\bar{k}_3 + \bar{g}) \quad (x_3 > 0) \end{cases} \quad (2.24)$$

和

$$\begin{cases} U_i^- = U_i + (3-4v_1) \alpha_1 \bar{U}_i - \beta \delta_2 x_3 [k_3 + g]_i \\ \quad - \beta [(1-2v_1) \alpha_1 k_i + G_i] \quad (i=1,2) \\ U_3^- = U_3 + (3-4v_1) \alpha_1 U_3 - \beta \delta_2 x_3 (k_3 + g)_{,3} - \beta \delta_1 (k_3 + g) \quad (x_3 < 0) \end{cases} \quad (2.25)$$

式中 U_j ($j=1,2,3$) 表示与集中力 $F=(F_1, F_2, F_3)$ 对应的 Kelvin 特解的位移场:

$$U_j = k_j - \frac{1}{4(1-v_1)} (k_0 + x_i k_i)_{,j} \quad (j=1,2,3) \quad (2.26)$$

以上 (2.24) 和 (2.25) 式就是由两种材料的半空间组成的弹性体在集中力作用下, 满足弹性力