# 固体物理试题及参考解答

# 前　言

1983年8月，在河北承德避暑山庄举行的全国高师第四次固体物理讲习班及固体物理教学研究会上决定委托中南民族学院物理系与湖南师院物理系共同负责汇编一本"1981年 — 1983年全国部分重点高等院校硕士学位研究生固体物理学试题及参考解答"（以下简称"解答"），这主要是提供高校固体物理教师作内部参考之用。对有志报考相应专业硕士研究生的大学生，它也是一份有益的参考资料。

本"解答"的试题及参考解答由南开大学、山东大学、中山大学、云南大学、同济大学、华南工学院、西北电讯工程学院等院校提供，"附录"由湖南师院提供。最后由中南民族学院 龚道本及湖南师院物理系王瑞旦负责整理、汇编而成。但由于时间仓促、水平有限，本"解答"定有许多不妥甚至错误之处，诚恳希望各院校的读者批评、指正。

中南民院负责本"解答"的印刷与发行，在这一方面克服了不少困难，作了大量工作。南开大学等院校的固体物理教师不辞劳苦地为本"解答"抄写和寄来了全部材料，在此一并表示衷心的感谢！

编者

1984年3月

后来供稿的单位还有：

吉林大学　武汉大学

中国科技大学

上海交通大学

中国科学技术大学

1981年硕士学位研究生入学考试试题

《固体物理》

〈一〉（25分） 名词解释

a) 阿羽依有理指数定律；

b) 晶系、布喇菲原胞；

c) F心，F'心；

d) 布格斯矢量 $\vec{b}$；

e) 休漠—饶塞里定则。

〈二〉（15分）有N个相同原子组成的面积为S的二维晶体，在德拜近似下，设声速为c，求

a) 频谱分布函数 $f(\omega)$；

b) 德拜频率 $\omega_D$；

c) 德拜温度 $\Theta_D$；

d) 晶体的零点振动能。

〈三〉（10分）假定离子电导由热缺陷在外场作用下的运动所产生，a) 试导出弱场条件下离子电导率的表达式；b) 若晶体的扩散系数为 $D=a^2\nu_0\exp(-\varepsilon/k_BT)$，此处 $a$ 为离子跳动一步的距离，$\nu_0$ 为振动频率，$\varepsilon$ 为激活能，试导出爱因斯坦关系式

$$\frac{\mu}{D}=\frac{e}{k_BT}$$

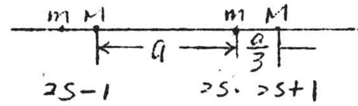
，此处 $\mu$ 为离子迁移率。

〈四〉（10分）质量 $m$ 及 $M$ 的两种原子组成如图所示的一维复式格子，假设相邻原子间的恢复力常数同为 $\beta$.

a) 写出每种原子的动力学方程

b) 写出格波的波动方程式

c) 导出频谱 $\omega(q)$




〈五〉（10分）对N个惰性气体原子组成的线性布喇菲固体链，设原子间势为

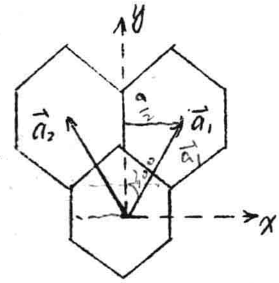
$$\phi(x)=\phi_0\left[\left(\frac{\sigma}{x}\right)^{12}-2\left(\frac{\sigma}{x}\right)^{6}\right],$$

求：a）原子间的平均距离 $x_0$；

b）每个原子的平均晶格能 $U_0$；

c）压缩模量 $K_0$。

〈六〉（15分）对于同一种原子组成的平面六方晶格，设六边形两个对边的间距为 $a$，




基矢：

$$\begin{cases}\vec{a}_1=\dfrac{a}{2}\vec{i}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}a\vec{j},\\[2mm] \vec{a}_2=-\dfrac{a}{2}\vec{i}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}a\vec{j}\end{cases}$$

a）求出倒格子基矢 $\vec{b}_1$、$\vec{b}_2$；

b）求晶体的结构因子及出现最强衍射的条件；

c）画出前两个布里渊区，并求出布里渊区面积；

d）如果每个原胞有两个电子，试求费米半径 $k_F$，并在布里渊区中画出费米圆。

〈七〉（15分）对于简立方布拉菲格子，设其晶格常数为 $a$，对原子的S轨道交迭积分 $J_s=-J<0$，在紧束缚最近邻近似下，

a）证明能谱的一般表达式为

$$E(k)=E_0-2J(\cos k_x a+\cos k_y a+\cos k_z a),$$

其中 $E_0$ 为一常数；

b）画出［111］、［100］方向的能谱曲线 $E(k)$，并给出相应于此两方向上的允许带宽度；

c）给出［111］方向带顶的有效质量 $m^*$；

d）画出（001）晶面在紧束缚近似下，各种能量的等能线；

c）画出（001）晶面在近自由电子近似下各种能量的等能线，并指出与紧束缚近似的区别。

〈二〉解：a) $f(\omega)d\omega = 2\cdot\frac{S}{4\pi^2}\cdot 2\pi k dk = \frac{S}{\pi C^2}\,\omega d\omega$

$\therefore\ f(\omega) = \frac{S}{\pi C^2}\,\omega$

b) $2N = \int_0^{\omega_0} f(\omega)d\omega = \frac{S}{\pi C^2}\int_0^{\omega_0}\omega d\omega = \frac{S\omega_D^2}{2\pi C^2}$

$\omega_D = C\left(\frac{4\pi N}{S}\right)^{1/2}$

c) $\Theta_D = \frac{\hbar\omega_0}{k_B} = \frac{\hbar C}{k_B}\left(\frac{4\pi N}{S}\right)^{1/2}$

d) $E_0 = \int_0^{\omega_D}\frac{\hbar\omega}{2}f(\omega)d\omega = \frac{\hbar S}{2\pi C^2}\int_0^{\omega_D}\omega^2 d\omega$

$= \frac{\hbar S\omega_D^3}{6\pi C^2} = \frac{2}{3}N\hbar\cdot\omega_D^3\cdot\frac{S}{4\pi N C^2}$

$= \frac{2}{3}N\hbar\omega_D = \frac{2}{3}Nk_B\Theta_D = \frac{2}{3}N\hbar C\left(\frac{4\pi N}{S}\right)^{1/2}$

〈三〉解：以填隙正离子为例讨论之，其余类推：

a) 令填隙离子的振动频率为 $\nu_0$，跳迁势垒即激活能为 $\varepsilon$，跳迁距离为 $a$，则在无外力作用时跳迁频率为

$$P = \nu_0 \exp(-\varepsilon/k_B T).$$

现设有自左向右的外电场 $E$，则正离子有附加势能 $-eEx$，于是离子的跳迁频率左右不相等，

$$P_{左} = \nu_0 \exp\left[-\left(\varepsilon + eE\frac{a}{2}\right)/k_B T\right],$$

$$P_{右} = \nu_0 \exp\left[-\left(\varepsilon - eE\frac{a}{2}\right)/k_B T\right]。$$

净向右跳迁频率为

$$\Delta P = P_{右} - P_{左} = 2\nu_0 \exp(-\varepsilon/k_B T)\sinh\left(\frac{eEa}{2k_B T}\right)。$$

净向右迁移速度为

$$v = a\Delta p = 2\nu_0 a\exp(-\varepsilon/k_B T)\sinh\left(\frac{eEa}{2k_B T}\right)。$$

在弱场近似下，$\dfrac{eEa}{2k_B T} \ll 1$，于是

$$v = \nu_0 a^2 \exp(-\varepsilon/k_B T)\cdot\frac{eE}{k_B T}\quad。$$

由此得离子迁移率 $\mu$ 及离子电导率 $\sigma$ 分别为

$$\mu = \frac{v}{E} = \nu_0 a^2\exp(-\varepsilon/k_B T)\cdot\frac{e}{k_B T},$$

$$\sigma = ne\mu = \frac{ne^2\nu_0 a^2}{k_B T}\exp(-\varepsilon/k_B T).$$

b) 由以上结果立即得爱因斯坦关系式

$$\frac{\mu}{D} = \frac{e}{k_B T}。$$

〈四〉解：a) 每种原子的动力学方程为：

$$\begin{cases} m\ddot{u}_{2s} = \beta(u_{2s+1} + u_{2s-1} - 2u_{2s}) \\ M\ddot{u}_{2s+1} = \beta(u_{2s+2} + u_{2s} - 2u_{2s+1}) \end{cases}$$

b) 格波的波动方程为：

$$u_{2s} = Ae^{i(\omega t - \frac{4}{3}asq)}$$

$$u_{2s+1} = Be^{i(\omega t - \frac{4}{3}asq - \frac{a}{3}q)}$$

c) 将波动方程代入动力学方程得：

$$(2\beta - m\omega^2)A - \beta(e^{-i\frac{qa}{3}} + e^{iqa})B = 0$$

$$-\beta(e^{-iqa} + e^{i\frac{qa}{3}})A + (2\beta - M\omega^2)B = 0$$

由久期方程解的频谱

$$\omega^2 = \frac{\beta}{Mm}\left[(M+m) \pm \sqrt{M^2 + m^2 + 2Mm\cos\frac{4}{3}qa}\right]$$

d) 第一布里渊区的宽度：

因为晶格常数为 $\frac{4}{3}a$，故正格子基矢为 $\vec{a}=\frac{4}{3}a\vec{i}$，倒格子基矢为 $\vec{b}=\frac{3\pi}{2a}\vec{i}$，其长度 $\frac{3\pi}{2a}$ 即为第一布里渊区的宽度。

〈五〉解：a) 由 $\left.\frac{d\phi}{dx}\right|_{x_0}=0$ 得 $x_0=\sigma$。

b) 每个原子的平均晶格能 $U_0$，就等于平衡时平均每两个原子间势：

$$U_0=\phi(x_0)=-\phi_0\text{。}$$

c) 压缩模量亦称体积弹性模量：

$$K_0=x_0\left.\frac{d^2\phi}{dx^2}\right|_{x_0}=\frac{72\phi_0}{\sigma}\text{。}$$

〈六〉解：a) 由 $\vec{a}_i\cdot\vec{b}_j=2\pi\delta_{ij}$ 令：

$$\begin{cases}\vec{b}_1=b_{11}\vec{i}+b_{12}\vec{j}\,,\\ \vec{b}_2=b_{21}\vec{i}+b_{22}\vec{j}\,.\end{cases}$$

得：

$$\begin{cases}\vec{b}_1=\frac{2\pi}{a}\left(\vec{i}+\frac{\sqrt{3}}{3}\vec{j}\right),\\ \vec{b}_2=\frac{2\pi}{a}\left(-\vec{i}+\frac{\sqrt{3}}{3}\vec{j}\right)\text{。}\end{cases}$$

b) 每个原胞中有两个原子，其坐标为：

$$\left(0,\frac{a}{\sqrt{3}}\right),\qquad\left(0,\frac{2a}{\sqrt{3}}\right)\text{。}$$

取倒格矢为：$\vec{K}_{HK}=H\vec{b}_1+K\vec{b}_2$，则晶体的结构因子为：

$$\sum_j e^{-i\vec{K}\cdot\vec{r}_j}=e^{-i\left(H\frac{2\pi}{3}+K\frac{2\pi}{3}\right)}+e^{-i\left(H\frac{4\pi}{3}+K\frac{4\pi}{3}\right)}$$
$$=e^{-i\frac{2\pi}{3}(H+K)}\left(1+e^{-i\frac{2\pi}{3}(H+K)}\right)\text{。}$$

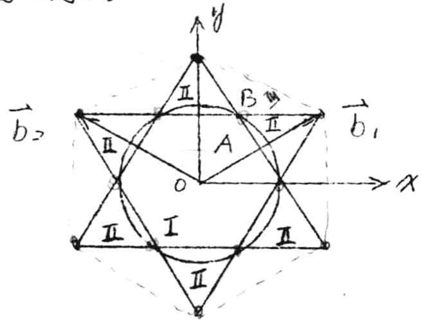
当 $\frac{2\pi}{3}(H+K)=2n\pi$，即 $H+K=3n$ 时，衍射最强。

c) 每一个布里渊区面积都等于倒格子，原胞面积：

$$|\vec{b}_1\times\vec{b}_2| = \left|\frac{4\pi^2}{a^2}(\vec{i}+\frac{1}{\sqrt{3}}\vec{j})\times(-\vec{i}+\frac{1}{\sqrt{3}}\vec{j})\right|$$

$$= \frac{8\pi^2}{\sqrt{3}a^2}\text{。}$$

前两个布里渊区如图所示。




d) 由 $2\times\frac{S}{4\pi^2}\times\pi k_F^2 = 2N$ 得

$$k_F = \left(\frac{4\pi N}{S}\right)^{1/2} = \left(\frac{4\pi N}{N|\vec{a}_1\times\vec{a}_2|}\right)^{1/2} = \frac{2\pi}{a}\left(\frac{2}{\sqrt{3}\pi}\right)^{1/2} = 0.606\times\frac{2\pi}{a}.$$

而第一布里渊区的内切圆和外接圆半径为

$$k_内 = \frac{1}{2}|\vec{b}_1| = \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{2\pi}{a} = 0.577\times\frac{2\pi}{a},$$

$$k_外 = \frac{2}{\sqrt{3}}k_内 = \frac{2}{3}\cdot\frac{2\pi}{a} = 0.667\times\frac{2\pi}{a},$$

所以 $k_内 < k_F < k_外$，费米圆已进入第二布里渊区。

<七>解：a) 简立方晶体一个原子的最近邻有六个原子，其坐标为：$\pm a, 0, 0$；$0, \pm a, 0$；$0, 0, \pm a$。

则：

$$E(\vec{k}) = E_s - J_0 - J(e^{ik_xa} + e^{-ik_xa} + e^{ik_ya} + e^{-ik_ya} + e^{ik_za} + e^{-ik_za})$$

$$= E_0 - 2J(\cos k_xa + \cos k_ya + \cos k_za)\text{。}$$

b) 沿 [111] 方向，$k_x = k_y = k_z = k$，

$(-\frac{\pi}{a} < k \le \frac{\pi}{a})$，于是

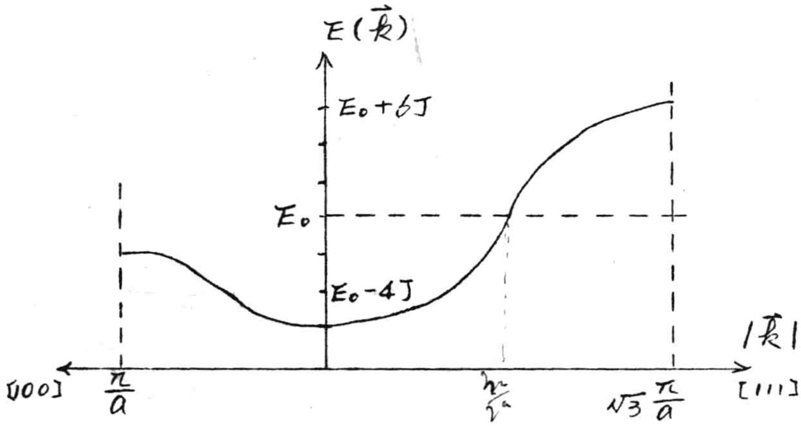
$$E(\vec{k}) = E_0 - 6J\cos ka\,,$$

所以允许带宽度为 12J 。

沿 [100] 方向，$k_y = k_z = 0$，于是

$$E(\vec{k}) = E_0 - 4J - 2J\cos k_x a\,,$$

所以允许带宽度为 4J 。能谱曲线如下：




c)

$$\frac{1}{m^*} = \frac{1}{\hbar^2}\nabla_{\vec{k}}\nabla_{\vec{k}} E = \frac{1}{\hbar^2}\cdot 2Ja^2\begin{bmatrix}\cos k_x a & 0 & 0\\ 0 & \cos k_y a & 0\\ 0 & 0 & \cos k_z a\end{bmatrix}.$$

在 [111] 方向的带顶，$k_x = k_y = k_z = \frac{\pi}{a}$，所以

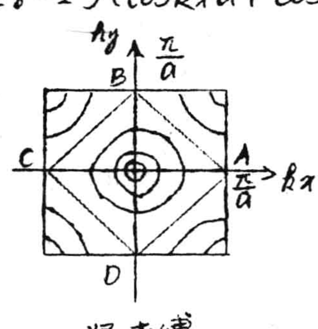
$$\frac{1}{m^*} = \frac{2Ja^2}{\hbar^2}\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix} = -\frac{2Ja^2}{\hbar^2}$$，退化为标量。

d) (001) 晶面在紧束缚近似下的 S 能带为

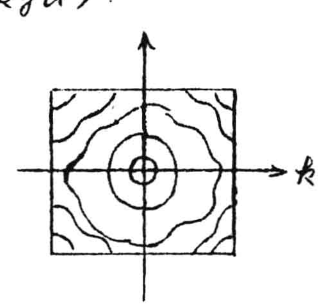
$$E(\vec{k}) = E_0' - 2J(\cos k_x a + \cos k_y a)$$

等能线如图其中等能线 ABCD 为正方形。

c) 近自由电子等能线如图，等能线与布里渊区边界面正交。




紧束缚




近自由电子

# 中国科学技术大学
# 1982年硕士学位研究生入学考试试题
# 《固体物理》

〈一〉(10分)写出以下各物理量的量级:

共价晶体的结合能

德拜温度

一般晶体的位错密度

金属的费米温度

一般本征半导体的禁带宽度

〈二〉(12分)填明下表:

| 晶系 | 该晶系必备的对称性 | 惯用晶胞参量特征 | 布拉菲晶胞种类 | 决定晶胞所必须的独立参量数目 |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| | | | | |

〈三〉(15分)惰性气体原子(质量为$m$)组成的一维布拉菲固体链,原子间势为Lennard-Jones势,由实验测得晶格常数$r_0$和弹性模量$K$,试由这两个参数推求以下参量(只考虑原子间近邻作用):

1. Lennard-Jones势中的常数$\varepsilon$,$\sigma$.
2. 晶格振动的截止频率

〈四〉(12分)设有同种原子排成的一维晶体,长度为$L$,原子间距为$a$,截止频率为$\omega_m$,试由格波的色散关系出发,求以下物理量的表达式:

△1. 格波的模式密度$\rho(\omega)$

2. 晶格振动能量$E$

<五>（10分）在AB型离子晶体中，由于电中性的要求，肖脱基缺陷常成对产生，令产生一对肖脱基缺陷所需的能量为$u$，晶体的总结点数为$N$，试证明温度T时晶体中肖脱基缺陷对的平衡数$n$为

$$n \approx N\exp\{-u/2k_BT\}$$

式中$k_B$为玻尔兹曼常数。

<六>（12分）应用Sommerfeld自由电子模型求：

1．$T=0$时电子的平均动能$\overline{E}$

2、自由电子气的压强$P$

3．Au的原子密度约为$6\times10^{22}cm^{-3}$，试估标$E_F^0$和$P$的量级．（电子质量$m\approx9\times10^{-31}kg$，$\hbar\approx1\times10^{-34}J\cdot Sec$）

<七>（15分）设有某种二维晶体由同种原子排成石墨片结构，原子间距为$a_0$，

1．作出二维点阵图形，写出基矢在平面笛卡儿坐标中的表达式，並求原始晶胞的面积．

2．求倒易点阵矢，作出倒易点阵图形。

3．画出前三个布里渊区图形，並求第一布里渊区的面积．

4．求第一布里渊区中内切园的面积，及此内切园为费米园时所对应的电子浓度。

<八>（14分）考虑在二维情况下具有晶体势场

$$U(x\cdot y)=4U\cos(2\pi x/a)\cos(2\pi y/a)$$

的正方点阵，应用中心方程（电子在倒易空间的波动方程）近似求出第一布里渊区点$(\frac{\pi}{a},\frac{\pi}{a})$处的能隙。

# 参考解答

〈一〉解：以上各物理量的量级依次为：$\sim 800\,\text{kcal/mol}$，$\sim 10^2\,K$，$10^5 - 10^{12}\,cm^{-2}$，$10^4 - 10^5\,K$，$\sim 1\,eV$。

〈二〉解：

| 晶系 | 该晶系必备的对称性 | 惯用晶胞参量特征 | 布拉菲晶胞种类 | 决定晶胞所必须的独立参量数目 |
|---|---|---|---|---|
| 三斜 | 只有 1 或 $\bar{1}$ | $\begin{cases} a \neq b \neq c \\ \alpha \neq \beta \neq \gamma \neq 90^\circ \end{cases}$ | P | 6 |
| 单斜 | 只有一个 2 或 $\bar{2}$ | $\begin{cases} a \neq b \neq c \\ \alpha = \gamma = 90^\circ \neq \beta \end{cases}$ | P、C | 4 |
| 正交 | 有三个 2 或 $\bar{2}$ | $\begin{cases} a \neq b \neq c \\ \alpha = \beta = \gamma = 90^\circ \end{cases}$ | P、I、C、F | 3 |
| 四方 | 只有一个 4 或 $\bar{4}$ | $\begin{cases} a = b \neq c \\ \alpha = \beta = \gamma = 90^\circ \end{cases}$ | P、I | 2 |
| 三方 | 只有一个 3 或 $\bar{3}$ | $\begin{cases} a = b = c \\ \alpha = \beta = \gamma \neq 90^\circ \end{cases}$ | P | 2 |
| 六方 | 只有一个 6 或 $\bar{6}$ | $\begin{cases} a = b \neq c \\ \alpha = \beta = 90^\circ, \gamma = 120^\circ \end{cases}$ | P | 2 |
| 立方 | 有四个 3 | $\begin{cases} a = b = c \\ \alpha = \beta = \gamma = 90^\circ \end{cases}$ | P、I、F | 1 |

〈三〉解：1 Lennard-Jones 势为：

$$U(r) = 4\varepsilon\left[\left(\frac{\sigma}{r}\right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{r}\right)^{6}\right],$$

由

$$\left.\frac{dU}{dr}\right|_{r_0} = 4\varepsilon\left[-12\frac{\sigma^{12}}{r_0^{13}} + 6\frac{\sigma^6}{r_0^7}\right] = 0,$$

得

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt[6]{2}}\, r_0$$

又

$$K=r_0\frac{d^2U}{dr^2}\bigg|_{r_0}=r_0\cdot 4\varepsilon\left[12\times 13\frac{\sigma^{12}}{r_0^{14}}-6\times 7\frac{\sigma^6}{r_0^8}\right]=\frac{72\varepsilon}{r_0},$$

所以

$$\varepsilon=\frac{Kr_0}{72}。$$

2．力系数为

$$\beta=\frac{d^2U}{dr^2}\bigg|_{r_0}=\frac{K}{r_0},$$

所以

$$\omega_{max}=\sqrt{\frac{4\beta}{m}}=\sqrt{\frac{4K}{mr_0}}。$$

〈四〉解：1．色散关系式为

$$\omega=\omega_m\left|\sin\frac{qa}{2}\right|,$$

于是

$$\frac{d\omega}{dq}=\frac{a}{2}\omega_m\cos\frac{qa}{2}=\frac{a}{2}\omega_m\left(1-\sin^2\frac{qa}{2}\right)^{1/2}$$

$$=\frac{a}{2}(\omega_m^2-\omega^2)^{1/2}。$$

每一模式在 $q$ 空间所占据的线度为 $\frac{2\pi}{L}$，故在 $q$ 到 $q+dq$ 范围内模式数为 $\frac{L}{2\pi}dq$。由于 $\pm q$ 对应于同一个 $\omega$，故在 $\omega$ 到 $\omega+d\omega$ 范围内模式数为

$$\rho(\omega)d\omega=2\cdot\frac{L}{2\pi}\frac{dq}{d\omega}d\omega=\frac{L}{\pi}\frac{2}{a(\omega_m^2-\omega^2)^{1/2}}d\omega,$$

所以格波的模式密度为

$$\rho(\omega)=\frac{2L}{a\pi(\omega_m^2-\omega^2)^{1/2}}。$$

2．格波振动能量

$$E=\int_0^{\omega_m}\frac{2L}{a\pi(\omega_m^2-\omega^2)^{1/2}}\cdot\frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/k_BT}-1}d\omega+E_0$$

$$=\frac{2L}{\pi a}\int_0^{\omega_m}\frac{\hbar\omega d\omega}{(e^{\hbar\omega/k_BT}-1)(\omega_m^2-\omega^2)^{1/2}}+E_0。$$

〈五〉解：正负离子空位各有$n$个，分布在$N$个结点中的组合数各为

$$W_+=\frac{N!}{(N-n)!\,n!},$$

$$W_-=\frac{N!}{(N-n)!\,n!},$$

所以总组合数为

$$W=W_+W_-=\left[\frac{N!}{(N-n)!\,n!}\right]^2。$$

于是系统自由能的变化为

$$\Delta F=nu-k_BT\ln W=nu-2k_BT\ln\frac{N!}{(N-n)!\,n!}。$$

由$\frac{\partial}{\partial n}(\Delta F)=0$，并用斯太令公式，得

$$u-2k_BT\ln\frac{N-n}{n}=0。$$

又$N\gg n$，所以最后得

$$n=N\exp\{-u/2k_BT\}。$$

〈六〉解：1. 已知电子的能态密度

$$\rho(E)=CE^{1/2},$$

所以电子的平均动能

$$\bar{E}=\frac{\int_0^{E_F^0}2\rho(E)E\,dE}{\int_0^{E_F^0}2\rho(E)\,dE}=\frac{\int_0^{E_F^0}2CE^{3/2}dE}{\int_0^{E_F^0}2CE^{1/2}dE}=\frac{3}{5}E_F^0。$$

2. 自由电子气的压强

$$p=-\frac{\partial(NE)}{\partial V}=\frac{\hbar^2}{5m}(3\pi^2)^{2/3}\left(\frac{N}{V}\right)^{5/3}。$$

（或由 $p=\frac{2}{3}\frac{N}{V}E$ 求之。）

3．对于 Au，$E_F^0$ 和 $P$ 的量级为

$$E_F^0=\frac{\hbar^2}{2m}\left(3\pi^2\frac{N}{V}\right)^{2/3}=\frac{1\times10^{-68}}{2\times9\times10^{-31}}\times(3\pi^2\times6\times10^{28})^{2/3}$$

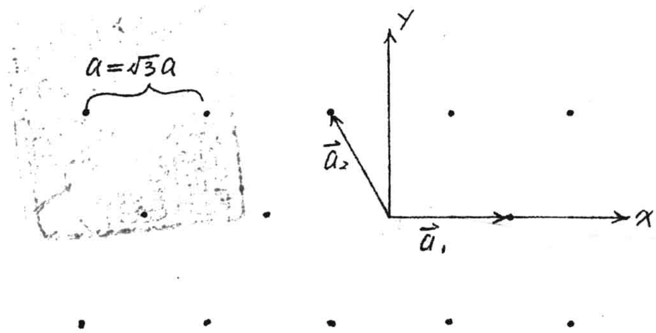
$$=8\times10^{-19}(J)=5.3(eV)。$$

$$p=\frac{\hbar^2}{5m}(3\pi^2)^{2/3}\left(\frac{N}{V}\right)^{5/3}$$

$$=\frac{1\times10^{-68}}{5\times9\times10^{-31}}\times(3\pi^2)^{2/3}\times(6\times10^{28})^{5/3}$$

$$=2\times10^{10}N\cdot/m^2=2\times10^{11}dyn/cm^2=2\times10^5atm。$$

〈七〉解：1、二维点阵图形如下：




基矢表达式：

$$\begin{cases}\vec{a}_1=(a,0)=(\sqrt{3}a_0,0),\\ \vec{a}_2=\left(-\frac{a}{2},\frac{\sqrt{3}a}{2}\right)=\left(-\frac{\sqrt{3}a_0}{2},\frac{3a_0}{2}\right)。\end{cases}$$

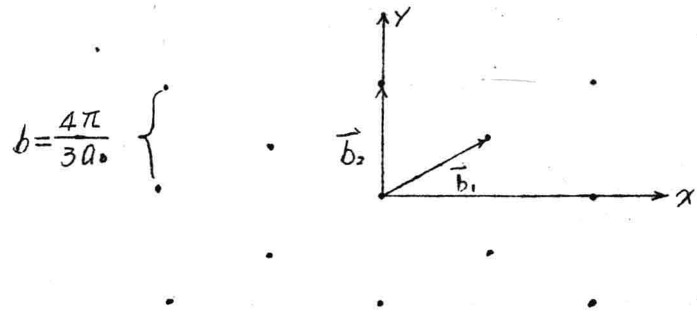
原始晶胞面积：

$$S_a=|\vec{a}_1\times\vec{a}_2|=\frac{\sqrt{3}}{2}a^2=\frac{3\sqrt{3}}{2}a_0^2。$$

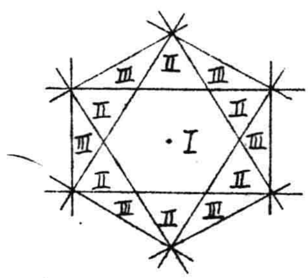
2．由 $\vec{a}_i\cdot\vec{b}_j=2\pi\delta_{ij}$ 可得

$$\begin{cases} \vec{b}_1=\left(\frac{2\pi}{a},\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{2\pi}{a}\right)=\frac{4\pi}{\sqrt{3}a}\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{\sqrt{3}b}{2},\frac{b}{2}\right), \\ \vec{b}_2=\left(0,\frac{4\pi}{\sqrt{3}a}\right)=(0,b). \end{cases}$$

式中 $b=\frac{4\pi}{\sqrt{3}a}=\frac{4\pi}{3a_0}$。倒易点阵图形如下：




3．前三个布里渊区图形如下：




第一布里渊区的面积为

$$S_b=|\vec{b}_1\times\vec{b}_2|=\frac{\sqrt{3}}{2}b^2=\frac{8\sqrt{3}\pi^2}{9a_0^2}。$$

4．第一布里渊区内切圆半径为 $\frac{b}{2}$，故内切圆面积

$$S_i=\pi\left(\frac{b}{2}\right)^2=\frac{4\pi^3}{9a_0^2}.$$

因为费米半径 $k_F$ 和电子浓度 $\eta$ 的关系为

$$\eta N=2\cdot\frac{S}{4\pi^2}\cdot\pi k_F^2,$$