江苏省中学数学竞赛

试题题解

江苏省数学竞赛办公室编

目 录

一、江苏省一九七八年中学数学竞赛各地市预赛试题题解

1. 南 京 市

一、1. 求$x=12\sin\theta+4\cos^2\theta$的极大值。

2. 证明：$\dfrac{1}{\cos^2 100^\circ}-\dfrac{3}{\sin^2 100^\circ}=32\cos 20^\circ$

1. 解：$x=12\sin\theta+4\cos^2\theta=12\sin\theta+4-4\sin^2\theta$

$$=-4(\sin^2\theta-3\sin\theta-1)=-4\left(\sin\theta-\frac{3}{2}\right)^2+13$$

$\because -1\leqslant\sin\theta\leqslant 1$，$\therefore \sin\theta=1$时，$\left(\sin\theta-\dfrac{3}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$取得极小值，

$\therefore$当$\sin\theta=1$，$\theta=\dfrac{\pi}{2}+2K\pi$（$K$为整数）时，

$x=-4\cdot\frac{1}{4}+13=12$为极大值。

2. 证：$\dfrac{1}{\cos^2 100^\circ}-\dfrac{3}{\sin^2 100^\circ}=\dfrac{1}{\sin^2 10^\circ}-\dfrac{3}{\cos^2 10^\circ}$

$$=\frac{\cos^2 10^\circ-3\sin^2 10^\circ}{\sin^2 10^\circ\cos^2 10^\circ}=(\cos 10^\circ+\sqrt{3}\sin 10^\circ)$$

$$\times(\cos 10^\circ-\sqrt{3}\sin 10^\circ)\div\frac{1}{4}\sin^2 20^\circ$$

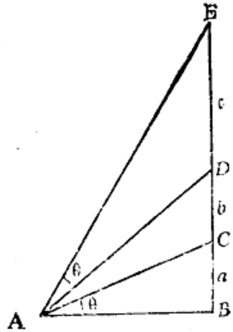
$$=\frac{4\left(\frac{1}{2}\cos 10^\circ+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 10^\circ\right)\left(\frac{1}{2}\cos 10^\circ-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 10^\circ\right)}{\frac{1}{4}\sin^2 20^\circ}$$

$$=\frac{16(\sin 30^\circ\cos 10^\circ+\cos 30^\circ\sin 10^\circ)}{\sin 20^\circ}$$

$$\times\frac{(\sin 30^\circ\cos 10^\circ-\cos 30^\circ\sin 10^\circ)}{\sin 20^\circ}$$

$$=\frac{16\sin 40^{\circ}\sin 20^{\circ}}{\sin^{2}20^{\circ}}=\frac{32\sin^{2}20^{\circ}\cos 20^{\circ}}{\sin^{2}20^{\circ}}=32\cos 20^{\circ}$$

二、一小山峰 BC 高 a 米，山峰顶上有建筑物 CD 高 b 米，建筑物顶上竖一电视塔 DE 高 c 米。问在地面上离 B 点多远的地方能找到这样一点 A，使 $\angle BAC=\angle DAE$？



解：设 $AB=x$（米），$\angle BAC=\angle DAE=\theta$，

$\angle BAD=\alpha$，那么，$\operatorname{tg}\theta=\frac{a}{x}$，

$\operatorname{tg}\alpha=\frac{a+b}{x}$，$\operatorname{tg}(\alpha+\theta)=\frac{a+b+c}{x}$，

又 $$\operatorname{tg}(\alpha+\theta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\theta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\theta}=\frac{\frac{a+b}{x}+\frac{a}{x}}{1-\frac{a+b}{x}\cdot\frac{a}{x}}$$

$$=\frac{(2a+b)x}{x^{2}-a(a+b)}$$

$$\therefore \frac{a+b+c}{x}=\frac{(2a+b)x}{x^{2}-a(a+b)}$$

$$(c-a)x^{2}=a(a+b)(a+b+c)$$

$$\therefore x=\sqrt{\frac{a(a+b)(a+b+c)}{c-a}}\text{（米）}$$

答：在地面上离 B 点 $\sqrt{\frac{a(a+b)(a+b+c)}{c-a}}$ 米的地方能找到这样一点 A，使 $\angle BAC=\angle DAE$。

三、解方程$x(1+\sqrt{x})(1-x)+x=8+8\sqrt{x}-8x-7x\sqrt{x}$

解：令$y=\sqrt{x}$，代换后，得：

$y^2(1+y)(1-y^2)+y^2=8+8y-8y^2-7y^3$，

$y^2(1+y)(1-y^2)+y^2-y^3=8+8y-8y^2-8y^3$，

$(1-y)[y^2(1+y)^2+y^2]=8(1+y)(1-y^2)$，

$(1-y)[y^2(1+y)^2+y^2-8(1+y)^2]=0$，

$\therefore\ \ 1-y=0$，则 $y=1$。

$y^2(1+y)^2+y^2-8(1+y)^2=0$，

$y^2(1+y)^2+2y^2(1+y)+y^2-8(1+y)^2-2y^2(1+y)=0$，

$y^2(2+y)^2-2(1+y)(4+4y+y^2)=0$，

$(y+2)^2(y^2-2y-2)=0$。

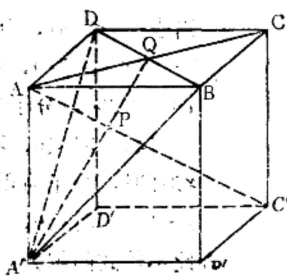
$\therefore\ \ y=-2$，$y=1\pm\sqrt{3}$，当$y=1$时，$x=1$；

$y=1-\sqrt{3}$时，x无解；

$y=-2$时，x无解；$y=1+\sqrt{3}$时，

$x=(1+\sqrt{3})^2=4+2\sqrt{3}$。

四、过正方体$ABCD-A'B'C'D'$的三个顶点B、D、A'作一平面，此平面与对角线AC'交于P点，求AP与PC'之比。



解：作平面$A'C'CA$与平面$A'BD$的交线为$A'Q$，

$\because P$点在平面$A'C'CA$上（因为它在AC'上），又在平面$A'BD$上，所以它必在此两平面的交线$A'Q$上，$\because$平面$ABCD\parallel$平面$A'B'C'D'$，平面$A'C'CA$和这两个平面相交于AC，$A'C'$，

$\therefore AC\parallel A'C'$，在平面$A'C'CA$上，

$\because AC \parallel A'C'$，$\therefore \Delta AQP \backsim \Delta A'C'P$，

$AP : PC' = AQ : C'A'$，又 $AQ = \frac{1}{2}AC$，

$AC = A'C'$，　$\therefore$ $\dfrac{AP}{PC'} = \dfrac{AQ}{C'A'} = \dfrac{1}{2}$，

即 $AP : PC' = 1 : 2$

五、解不等式：$\dfrac{(x-2)\sqrt{(4x-7)^2}}{(1-|4x-3|)\lg(2x-1)} > 0$

解：当 $x \neq \dfrac{7}{4}$ 时，$\sqrt{(4x-7)^2}$ 恒为正，因此只需解不等式

$\dfrac{x-2}{(1-|4x-3|)\lg(2x-1)} > 0$ 即可，

$\because x-2 \neq 0, x \neq 2, \lg(2x-1) \neq 0, 2x-1 \neq 1, x \neq 1$，

且　$2x-1 > 0, x > \frac{1}{2}$；

$1-|4x-3| \neq 0$，$\begin{cases} 1-4x+3 \neq 0，\text{即} x \neq 1\ (4x-3>0) \\ 1-3+4x \neq 0，\text{即} x \neq \frac{1}{2}\ (4x-3<0) \end{cases}$

$\therefore$ 在数轴上取点 $\frac{1}{2}$，1，2，逐段检查。

当 $\frac{1}{2} < x < 1$ 时，分子为负，$\lg(2x-1) < 0$，

$1-|4x-3| > 0$，不等式成立

$1 < x < 2$ 时，分子为负，$\lg(2x-1) > 0$，

$1-|4x-3| < 0$，不等式成立；

$x > 2$ 时，分子为正，$\lg(2x-1) > 0$，

$1-|4x-3| < 0$，不等式不成立。

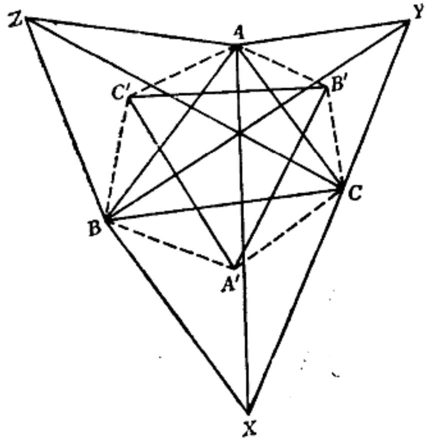
$\therefore$ 此不等式的解为：$\frac{1}{2} < x < 1$ 与 $1 < x < 2$，但 $x \neq \dfrac{7}{4}$。

六、设，A'，B'，C' 分别为正三角形 XBC、YCA 与 ZAB 的重心，求证：

1、$AX = BY = CZ$

2、$B'C' = \dfrac{1}{\sqrt{3}}AX$

3、$\triangle A'B'C'$ 为正三角形



证：(1) $\Delta ACX \cong \Delta YCB$ $(s.a.s)$

$\therefore$ $AX = YB$，同理：$YB = CZ$。

$\therefore$ $AX = YB = CZ$。

(2)在$\triangle AB'C'$和$\triangle AYB$中，

$\because$ $\angle C'AB' = \angle BAY = \angle BAC + 60°$

$$\frac{AB'}{AY} = \frac{AC'}{AB} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$\therefore$ $\triangle AB'C' \backsim \triangle AYB$

$\therefore$ $\dfrac{B'C'}{YB} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$，$\therefore B'C' = \dfrac{1}{\sqrt{3}}YB$

$\therefore$ $B'C' = \dfrac{1}{\sqrt{3}}AX$

(3)同理：$A'B' = \dfrac{1}{\sqrt{3}}BY$, $A'C' = \dfrac{1}{\sqrt{3}}CZ$

$\because$ $AX = YB = CZ$, $\therefore A'B' = B'C' = A'C'$

$\therefore$ $\triangle A'B'C'$为正三角形.

2. 无　锡　市

（第　一　试）

一、化简

$$\sqrt{2^{\log_{\sqrt{2}}\sin x}-\sin x\log_{\sqrt{2}}2-\log_{(\sqrt{2}-1)}(\sqrt{2}+1)}$$
$$+(1+\log_2 5)\sin x\lg 2$$

解：原式 $=\sqrt{2^{\log_2\sin^2x}-\sin x\log_2 2^2-\log_{(\sqrt{2}-1)}(\sqrt{2}-1)^{-1}}$

$$+\left(1+\frac{\lg 5}{\lg 2}\right)\sin x\lg 2$$

$$=\sqrt{\sin^2x-2\sin x+1}+\left(\frac{\lg 2+\lg 5}{\lg 2}\right)\sin x\lg 2$$

$$=\sqrt{(1-\sin x)^2}+\lg(2\times 5)\sin x$$

$$=1-\sin x+\sin x=1$$

（2）解方程　$\log_2x+\log_4x+\log_8x=1\frac{5}{6}$，

解：（Ⅰ法）$\log_2x+\log_2x^{\frac{1}{2}}+\log_2x^{\frac{1}{3}}=1\frac{5}{6}$，

$\log_2x\cdot x^{\frac{1}{2}}\cdot x^{\frac{1}{3}}=1\frac{5}{6}$，

$\log_2x^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}=1\frac{5}{6}$，　$\frac{11}{6}\log_2x=\frac{11}{6}$，

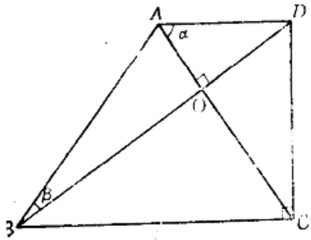
$\log_2x=1$，$x=2$。

（Ⅱ法）$\frac{\lg x}{\lg 2}+\frac{\lg x}{\lg 4}+\frac{\lg x}{\lg 8}=\frac{11}{6}$，$\frac{\lg x}{\lg 2}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3})=\frac{11}{6}$，

$\frac{11}{6}\lg x=\frac{11}{6}\lg 2$，$x=2$。

二、梯形ABCD中AD∥BC，CD⊥BC，AC⊥BD，求证：

$\operatorname{tg}\beta\cdot\operatorname{tg}^3\alpha=1$。



证明：$\text{tg}\beta\cdot\text{tg}^3\alpha=\frac{OA}{OB}\cdot\frac{OD}{OA}\cdot\frac{OC}{OD}\cdot\frac{OB}{OC}=1$。

三、已知A、B、C是锐角三角形ABC的三个内角，a、b、c是它的对边，且$\sin^2A-\cos^2A=\frac{1}{2}$，

求证：$b+c\leqslant 2a$。

证明：由$\sin^2A-\cos^2A=\frac{1}{2}$，

$$得2\sin^2A-1=\frac{1}{2},\sin^2A=\frac{3}{4},$$

$$\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}(\because\quad A是锐角),\ \therefore\quad A=60^\circ$$

或 $\cos 2A=-\frac{1}{2}$，$2A=120^\circ$，

（A是锐角），$A=60^\circ$，

$$b+c=\frac{a}{\sin A}(\sin B+\sin C)$$

$$=\frac{2a}{\sqrt{3}}2\cdot\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}$$

$$=\frac{4a}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\frac{B-C}{2}=2a\cos\frac{B-C}{2}\leqslant 2a。$$

四、试求与两圆$x^2+(y+5)^2=49$和$x^2+(y-5)^2=1$都外切的圆的圆心的轨迹方程。

解：设与两圆都外切的圆的圆心为(x,y)，

则得$\sqrt{x^2+(y+5)^2}-7=\sqrt{x^2+(y-5)^2}-1$，

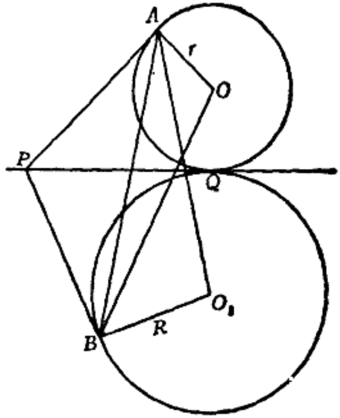
两边平方整理得$5y-9=3\sqrt{x^2+(y-5)^2}$

化简得$9x^2-16y^2+144=0$，

即$\dfrac{-x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$

（根据题意，$y\geqslant3$）

即为所求的轨迹方程。



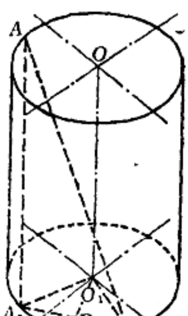
五、半径分别为 r 和 R 的两圆⊙O和⊙O_1互相外切于Q，PQ为公切线，PA、PB为两切线，A、B为切点。求证△ABO与△ABO_1的面积之比，等于两圆半径之比。

证明： ∵PA = PQ，　PB = PQ，　∴PA = PB

∠PAB = ∠PBA，　∠OAB = ∠O_1BA（等角的余角相等）

$$\frac{\triangle ABO\text{面积}}{\triangle ABO_1\text{面积}}=\frac{\frac{1}{2}AB\cdot r\cdot\sin\angle OAB}{\frac{1}{2}AB\cdot R\cdot\sin\angle O_1BA}=\frac{r}{R}。$$

六、半径为4cm，高为8cm的圆柱体，在它的上下两底面的圆上各取点A_1、A，已知$AA_1=10$cm，求OO_1与AA_1之间的距离。



解： 过A作圆柱的母线AA_2，连A_1A_2，则$AA_2\perp A_2A_1$，且$AA_2\parallel OO_1$，连O_1A_1和O_1A_2，在底面圆O_1所在平面内作$O_1D\perp A_1A_2$，则D为A_1A_2中点，由作图得$OO_1\parallel$平面AA_2A_1且O_1D为OO_1到平面AA_2A_1的距离，即O_1D为OO_1与AA_1的距离。

而$O_1D=\sqrt{O_1A_1{}^2-A_1D^2}$

$$=\sqrt{4^2-\left(\frac{\sqrt{10^2-8^2}}{2}\right)^2}=\sqrt{7}(\text{cm})。$$

答：OO_1与AA_1之间的距离为$\sqrt{7}$cm。

七、已知a、b、c三个数既成等差数列又成等比数列，又α、β是方程$ax^2+bx-c=o$的两个根，求$\alpha^5\beta^2+\alpha^2\beta^5$的值。

解：由已知 $b=\dfrac{a+c}{2}$ 且$b^2=ac$ 得 $\left(\dfrac{a+c}{2}\right)^2=ac$，

即$(a+c)^2=4ac$，$(a-c)^2=o$，$a=c$，即得$a=b=c$。

又 $\alpha+\beta=-1$，$\alpha\beta=-1$，$\alpha^5\beta^2+\alpha^2\beta^5=\alpha^2\beta^2(\alpha^3+\beta^3)$

$=(\alpha\beta)^2(\alpha+\beta)[(\alpha+\beta)^2-3\alpha\beta]$

$=(-1)^2(-1)[(-1)^2-3(-1)]=-4$。

八、求函数$y=\sqrt{x+2(1+\sqrt{x+1})}+\sqrt{x+2(1-\sqrt{x+1})}$的极值，并画出这个函数的图象。

解：$y=\sqrt{(x+1)+2\sqrt{x+1}+1}+\sqrt{(x+1)-2\sqrt{x+1}+1}$

$=\left|\sqrt{x+1}+1\right|+\left|\sqrt{x+1}-1\right|$

$$y=\begin{cases}\sqrt{x+1}+1+1-\sqrt{x+1}=2（当-1\leqslant x\leqslant 0时）\\ \sqrt{x+1}+1+\sqrt{x+1}-1=2\sqrt{x+1}（当x>0时）\end{cases}$$

函数的定义域为$[-1,\infty)$

当$-1\leqslant x<0$时，$y=2$，　当$x>0$时，$y>2$，

即当$x\geqslant-1$时，$y\geqslant2$，y的极小值是2。（草图略）

（第 二 试）

一、试证不存在同时满足下列三个条件的四个数a, b, c, d,

①$0<a<b<c<d$，②$a+d=b+c$，③$a^2+d^2=b^2+c^2$。

证明：由② $a^2+2ad+d^2=b^2+2bc+c^2$ ④

④－③ $2ad=2bc$ ⑤

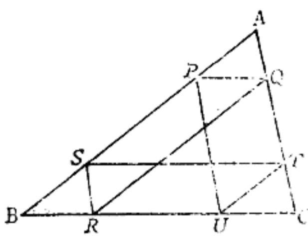
③－⑤ $(d-a)^2=(c-b)^2$

得 $d-a=c-b$ ⑥

但由① $d-a>c-b$ ⑦

$(d-a>c-a>c-b)$

∵ ⑥⑦矛盾， ∴a, b, c, d不能同时满足①②③。



二、在△ABC的边AB上任取一点P，自P引BC的平行线交AC于Q，自Q引AB的平行线交BC于R，自R引AC的平行线交AB于S，连续顺次引BC、AB的平行线ST、TU，由U引AC的平行线，证明由U引AC的平行线必过P点。

证明：根据平行线截割定理，因为PQ∥BC，QR∥AB，RS∥CA，ST∥BC，TU∥AB，

所以$\frac{AP}{PB}=\frac{AQ}{QC}=\frac{BR}{RC}=\frac{BS}{SA}=\frac{CT}{TA}=\frac{CU}{UB}$，

根据平行线截割定理的逆定理，

因为$\frac{AP}{PB}=\frac{CU}{UB}$，所以UP∥CA，

而过U只有一条直线和AC平行，所以由U引AC的平行线必过P点。

三、三角形的一个顶点保持不动而它的对边不改变长度，沿一定直线滑动，求这些三角形的外接圆的圆心轨迹，并说明这个轨迹是什么曲线？

解：把△ABC保持不动的顶点A放在y轴上，它的对边在x轴上滑动。使$BC=a$(定值)，$P(x,y)$为BC和AB的垂直平分线的交点，即外心。

设　A点的坐标为(o,b)，B点的坐标为(m,o)，

则　AB的中点$M\left(\frac{m}{2},\frac{b}{2}\right)$，AB的斜率$K=-\frac{b}{m}$，

AB的垂直平分线的方程为$y-\frac{b}{2}=\frac{m}{b}\left(x-\frac{m}{2}\right)$　①

BC的垂直平分线的方程为$x=m+\frac{a}{2}$　②

AB和BC的垂直平分线的交点$P(x,y)$可由①②求得，由①②消去m，得$y=\frac{x^2}{2b}+\left(\frac{b}{2}-\frac{a^2}{8b}\right)$即为所求的轨迹方程，它的图象是抛物线。

四、平面上任给五个整点(两个坐标都是整数的点)，求证其中必有两点的连线中点仍为整点。

证明：用2依次去除一个整点的两个坐标，所得的余数只有0和1两种可能，因此五个整点可以按各坐标被2除后所得的余数情况分为$2\times2=4$类，即(0，0；0，1；1，0；1，1)。把五个整点分入这4类中，必有两点如(x_1,y_1)，(x_2,y_2)属于同一类，即x_1与x_2、y_1与y_2被2除后有相同的余数。从而可知x_1+x_2、y_1+y_2都可被2整除，即这两点

(x_1,y_1)、(x_2,y_2)的连线的中点坐标$\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$都是整数。即这个中点是整点。

五、三个方程$x^2-P_1x+q_1=0$ ①，$x_2-P_2x+q_2=0$ ②，$x^2-P_3x+q_3=0$ ③，每两个方程有一个公共根，

求证$P_1{}^2+P_2{}^2+P_3{}^2+4(q_1+q_2+q_3)$

$=2(P_1P_2+P_2P_3+P_3P_1)$

证明： 设方程①②有公根α，②③有公根β，①③有公根γ，

则方程①的两根为α，γ；②的两根为α，β；③的两根为β，γ，

且$\alpha+\gamma=P_1$④，$\alpha\gamma=q_1$⑤，$\alpha+\beta=P_2$⑥，$\alpha\beta=q_2$⑦，$\beta+\gamma=P_3$⑧，$\beta\gamma=q_3$⑨，④+⑥+⑧，$\alpha+\beta+\gamma$

$=\frac{1}{2}(P_1+P_2+P_3)$⑩，⑩分别减去④、⑥、⑧得

$\beta=\frac{1}{2}(P_2+P_3-P_1)$，$\gamma=\frac{1}{2}(P_3+P_1-P_2)$，

$\alpha=\frac{1}{2}(P_1+P_2-P_3)$；

④^2+⑥^2+⑧^{2}得$P_1{}^2+P_2{}^2+P_3{}^2=2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)+2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$；

$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=\frac{1}{2}(P_1{}^2+P_2{}^2+P_3{}^2)-(q_1+q_2+q_3)$⑪；

而$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=\frac{1}{4}[(P_2+P_3-P_1)^2+(P_3+P_1-P_2)^2+(P_1+P_2-P_3)^2]$⑫

由⑪=⑫得$\frac{1}{2}(P_1{}^2+P_2{}^2+P_3{}^2)-(q_1+q_2+q_3)$

$=\frac{1}{4}[3(P_1{}^2+P_2{}^2+P_3{}^2)-2(P_1P_2+P_2P_3+P_3P_1)]$；

即得$P_1{}^2+P_2{}^2+P_3{}^2+4(q_1+q_2+q_3)$

$=2(P_1P_2+P_2P_3+P_3P_1)$。

3. 苏 州 市

一、(1)确定下面函数的定义域：

$$y=\sqrt{\sqrt[3]{9}-\left(\frac{1}{3}\right)^{x}}+\sqrt{\log_{0.1}\frac{3x-2}{2x+1}}$$

解：$\begin{cases}\sqrt[3]{9}-\left(\frac{1}{3}\right)^{x}\geqslant 0 & (1)\\ \log_{0.1}\dfrac{3x-2}{2x+1}\geqslant 0 & (2)\end{cases}$

由(1)得：$3^{\frac{2}{3}}\geqslant 3^{-x}$ $\therefore -x\leqslant\frac{2}{3}$ $x\geqslant-\frac{2}{3}$ (A)

由(2)得：$0<\dfrac{3x-2}{2x+1}\leqslant 1$

讨论 $0<\dfrac{3x-2}{2x+1}$

(i) $\begin{cases}2x+1>0\\3x-2>0\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x>-\frac{1}{2}\\x>\frac{2}{3}\end{cases}$ $\therefore x>\frac{2}{3}$

(B)

(ii) $\begin{cases}2x+1<0\\3x-2<0\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x<-\frac{1}{2}\\x<\frac{2}{3}\end{cases}$ $\therefore x<-\frac{1}{2}$

讨论 $\dfrac{3x-2}{2x+1}\leqslant 1$，即 $\dfrac{x-3}{2x+1}\leqslant 0$

(i) $\begin{cases}x-3\geqslant 0\\2x+1<0\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x\geqslant 3\\x<-\frac{1}{2}\end{cases}$ 无解

(ii) $\begin{cases}x-3\leqslant 0\\2x+1>0\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x\leqslant 3\\x>-\frac{1}{2}\end{cases}$ $\therefore -\frac{1}{2}<x\leqslant 3$ (C)

综合(B)、(C) 得 $\frac{2}{3}<x\leqslant 3$ $\qquad(D)$

综合(A)、(D) 得 $\frac{2}{3}<x\leqslant 3$

$\therefore$所求函数的定义域为$\frac{2}{3}<x\leqslant 3$

(2)已知$\cos^3 x+\cos^3\beta+\cos^3\gamma=(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)^3$

α、β、γ均在$0°$与$180°$之间，

求证：α、β、γ中至少有二角互补。

证：移项得：

$[(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)^3-\cos^3\alpha]-[\cos^3\beta+\cos^3\gamma]=0$，

$(\cos\beta+\cos\gamma)[(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)^2+\cos\alpha(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)+\cos^2\alpha]-(\cos\beta+\cos\gamma)(\cos^2\beta-\cos\beta\cos\gamma+\cos^2\gamma)=0$，

$(\cos\beta+\cos\gamma)(3\cos^2\alpha+3\cos\alpha\cos\beta+3\cos\beta\cos\gamma+3\cos\alpha\cos\gamma)=0$，

$3(\cos\beta+\cos\gamma)(\cos\alpha+\cos\beta)(\cos\alpha+\cos\gamma)=0$，

三括号中至少有一括号为0，

若$\cos\beta+\cos\gamma=0$ 则$\cos\beta=-\cos\gamma$，

得 $\cos\beta=\cos(180°-\gamma)$ $\therefore\beta=180°-\gamma$，

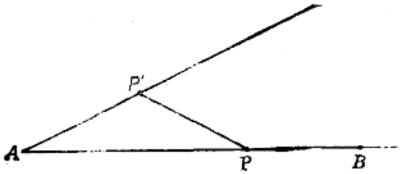
或同样，也可得到 $\alpha=180°-\gamma$，

$\beta=180°-\alpha$。

二、在$\angle A$的一边上有一定点B，对于线段AB上的每一点P，可在角的另一边作一点P'，使得$AP'=BP$，问P在什么位置，使线段PP'的长达到最小值？并求最小值。

解：设$AB=1$，$PB=x$，

则 $AP'=BP=x$，



$\therefore PP'^2 = AP^2 + AP'^2 - 2AP\cdot AP'\cdot\cos A$

$$= x^2 + (1-x)^2 - 2x(1-x)\cos A$$
$$= 2x^2(1+\cos A) - 2x(1+\cos A) + 1$$
$$= 2(1+\cos A)(x^2 - x) + 1$$
$$= 2(1+\cos A)(x-\frac{1}{2})^2 + 1 - \frac{1+\cos A}{2}.$$

当$x=\frac{1}{2}$时，PP'有最小值为$\sqrt{1-\frac{1+\cos A}{2}}$

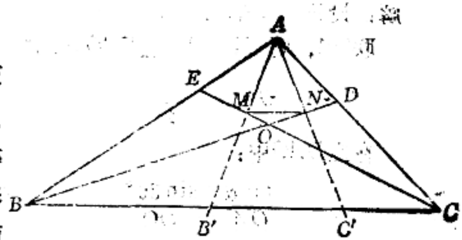
或$\sqrt{1-\cos^2\frac{A}{2}} = \sin\frac{A}{2}$

$\therefore P$在AB的中点时，PP'的长达到最小值$\sin\frac{A}{2}$

三、 已知：在$\triangle ABC$中，$\angle B$、$\angle C$的平分线BD，CE相交于O，自A作$AN\perp BD$，N为垂足，自A作$AM\perp CE$，M为垂足。

求证：$MN /\!/ BC$

证：



延长AM交BC于B'，则CM为等腰三角形CAB'的顶角C的平分线，且垂直于底边，$\therefore M$为AB'的中点。

同理，延长AN交BC于C'，则N为AC'的中点，