石油化工设备设计参考资料

废热锅炉元件强度计算科研报告（三）

U形膨胀节的计算

广东化工学院

上海化学工业设计院石油化工设备设计建设组

石油化工设备设计参考资料

U 形膨胀节的计算

75-42-Ⅱ-8

（内部资料　注意保存）

上海化学工业设计院石油化工设备设计建设组

（上海南京西路 1856 号）

国营海峰印刷厂印刷

一九七五年十一月

赠　阅

(一)　圆环壳对称问题的解

1. 前言

U形膨胀节由圆平板和圆环壳组成，圆平板的解早已建立〔1〕，圆环壳的近似解法则有数种，Dohl〔2〕，Laupa〔3〕采用能量法来求解，Clark〔4〕将其解表成圆柱函数，这些解法计算较繁，且难于掌握，太田〔5〕，浜田〔6〕，竹園〔7〕采用级数法来求解是比较容易理解和应用，本节将根据〔5〕详细推出圆环壳对称问题的解，以作膨胀节计算的根据。

2. 基本公式

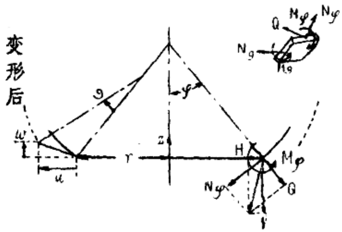

图　1

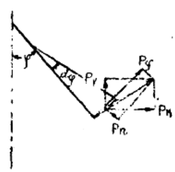

图　2

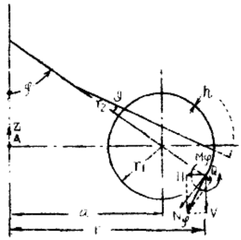

图　3

如图3所示，圆环壳中间面的几何尺寸为

$$r = a(1+\lambda\sin\varphi),\quad z = -r_1\cos\varphi \tag{1}$$

式中$\lambda = r_1/a$，用$'$表示对角度φ的导数，则

$$r' = r_1\cos\varphi,\quad z' = r_1\sin\varphi \tag{2}$$

内力的水平分量和竖直分量有如下的关系

$$N_\varphi = H\cos\varphi + V\sin\varphi,\quad Q = -H\sin\varphi + V\cos\varphi \tag{3}$$

根据内力的平衡可得〔8〕

$$\left.\begin{aligned}&(rv)' + r r_1 p_V = 0\\&(rH)' - r_1 N_\theta + r r_1 p_H = 0\\&(rM_\varphi)' - M_\theta r_1\cos\varphi - r r_1 Q = 0\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

式中N_φ为经向拉力，Q为经向剪力，M_φ为经向弯矩，N_θ为圆周向拉力，M_θ为圆周向弯矩，p_V和p_H为分布载荷的竖直分量和水平分量，正方向均如图所示，设ε_φ，ε_θ为经向和圆周向应变，K_φ，K_θ为经向和圆周向曲率变化，则变形和内力的关系为

$$\left.\begin{array}{l} C\varepsilon_{\varphi}=N_{\varphi}-\nu N_{\theta},\ C\varepsilon_{\theta}=N_{\theta}-\nu N_{\varphi} \\ M_{\varphi}=D(K_{\varphi}+\nu K_{\theta}),\ M_{\theta}=D(K_{\theta}+\nu K_{\varphi}) \end{array}\right\} \tag{5}$$

式中 $C=Eh$，$D=Eh^3/12(1-\nu^2)$，E，ν 分别为材料的弹性系数和横向变形系数，变形和位移的关系为

$$\left.\begin{array}{l} \varepsilon_{\varphi}=(u'+\theta r_1\sin\varphi)/r_1\cos\varphi,\ \varepsilon_{\theta}=u/r \\ K_{\varphi}=-\theta'/r_1,\ K_{\theta}=-\theta\cos\varphi/r \end{array}\right\} \tag{6}$$

$$\theta=(W'\cos\varphi-u'\sin\varphi)/r_1 \tag{7}$$

式中 u，W 分别为位移的水平分量和竖直分量，θ 为经向转角。

3. 基本微分方程

由等式（6）的第一、二式得

$$(r\varepsilon_{\theta})'-r_1\varepsilon_{\varphi}\sin\varphi=-r_1\theta\sin\varphi \tag{8}$$

将 $p_V=-p\cos\varphi$ 代入等式（4）的第一式得

$$(rV)'-apr_1(1+\lambda\sin\varphi)\cos\varphi=0$$

积分得

$$rV-a\frac{pr_1}{2}(2+\lambda\sin\varphi)\sin\varphi=aA$$

式中 A 为积分常数，可根据膨胀节的平衡来决定，由此得

$$V=\frac{pr_1}{2}\cdot\frac{2+\lambda\sin\varphi}{1+\lambda\sin\varphi}\sin\varphi+\frac{A}{1+\lambda\sin\varphi} \tag{9}$$

令 $aX=rH-a\frac{pr_1}{2}(2+\lambda\sin\varphi)\cos\varphi$，则

$$H=\frac{X}{1+\lambda\sin\varphi}+\frac{pr_1}{2}\cdot\frac{2+\lambda\sin\varphi}{1+\lambda\sin\varphi}\cos\varphi \tag{10}$$

$$(rH)' = aX' + a\frac{pr_1}{2}\lambda\cos^2\varphi - a\frac{pr_1}{2}(2+\lambda\sin\varphi)\sin\varphi \qquad (11)$$

将等式(8)和(9)代入(3)得

$$N_\varphi = \frac{X\cos\varphi}{1+\lambda\sin\varphi} + \frac{pr_1}{2}\frac{2+\lambda\sin\varphi}{1+\lambda\sin\varphi} + \frac{A\sin\varphi}{1+\lambda\sin\varphi} \qquad (12)$$

将 $p_H = p\sin\varphi$ 以及等式(11)代入(4)的第二式得

$$N_\theta = \frac{X'}{\lambda} + \frac{pr_1}{2} \qquad (13)$$

将等式(12)和(13)代入(5)的第一、二式得

$$\varepsilon_\varphi = \frac{1}{Eh}\left\{\frac{X\cos\varphi}{1+\lambda\sin\varphi} + \frac{pr_1}{2}\frac{2+\lambda\sin\varphi}{1+\lambda\sin\varphi} + \frac{A\sin\varphi}{1+\lambda\sin\varphi} - \right.$$
$$\left. -\nu\left(\frac{X'}{\lambda} + \frac{pr_1}{2}\right)\right\} \qquad (14)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{Eh}\left\{\frac{X'}{\lambda} + \frac{pr_1}{2} - \nu\left(\frac{X\cos\varphi}{1+\lambda\sin\varphi} + \frac{pr_1}{2}\frac{2+\lambda\sin\varphi}{1+\lambda\sin\varphi} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{A\sin\varphi}{1+\lambda\sin\varphi}\right)\right\} \qquad (15)$$

将以上二式以及等式(1)代入(8)得

$$\frac{a}{Eh}\left[(1+\lambda\sin\varphi)\left(\frac{X'}{\lambda} + \frac{pr_1}{2}\right) - \nu\left\{X\cos\varphi + \frac{pr_1}{2}(2+\right.\right.$$
$$\left.\left. +\lambda\sin\varphi) + A\sin\varphi\right\}\right]' - \frac{r_1}{Eh}\left\{\frac{X\cos\varphi}{1+\lambda\sin\varphi} + \frac{pr_1}{2}\frac{2+\lambda\sin\varphi}{1+\lambda\sin\varphi} + \right.$$
$$\left. + \frac{A\sin\varphi}{1+\lambda\sin\varphi} - \nu\left(\frac{X'}{\lambda} + \frac{pr_1}{2}\right)\right\}\sin\varphi = -r_1\theta\sin\varphi$$

将上式整理后得

$$\frac{ma}{Eh^2}\{\{(1+\lambda\sin\varphi)X'\}'+\nu\lambda X'(\sin\varphi-\cos\varphi)+\lambda X\sin\varphi\frac{\nu(1+\lambda\sin\varphi)-\cos\varphi}{1+\lambda\sin\varphi}$$

$$+\lambda^2\frac{pr_1}{2}\{\cos\varphi+\nu(\sin\varphi-\cos\varphi)-\frac{2+\lambda\sin\varphi}{1+\lambda\sin\varphi}\sin\varphi\}-\lambda A\{\frac{\lambda\sin^2\varphi}{1+\lambda\sin\varphi}+$$

$$+\nu\cos\varphi\}\}=-\frac{mr_1^2}{ah}\theta\sin\varphi$$

由于λ是小量，X的各阶导数和X同级（相差不太大），故上式左边方括弧内的各项和第一项相比是小量，可以略去不计，令 $X_\varphi=\frac{ma}{Eh^2}X$，$\overline{P}=\frac{ma}{Eh^2}\frac{pr_1}{2}$，$\overline{A}=\frac{ma}{Eh^2}A$，$\mu=\frac{mr_1^2}{ah}$，$m=\sqrt{12(1-\nu^2)}$，则上式简化为

$$\frac{d}{d\varphi}\{(1+\lambda\sin\varphi)\frac{dX_\varphi}{d\varphi}\}=-\mu\sin\varphi\cdot\theta \qquad (16)$$

此外

$$N_\varphi=\frac{Eh^2}{ma}\{\frac{X_\varphi\cos\varphi+\overline{A}\sin\varphi+\overline{P}(2+\lambda\sin\varphi)}{1+\lambda\sin\varphi}\} \qquad (17)$$

$$N_\theta=\frac{Eh^2}{mr_1}(\frac{dX_\varphi}{d\varphi}+\lambda\overline{P}) \qquad (18)$$

将等式(9)和(10)代入(3)的第二式得

$$Q=\frac{-X\sin\varphi+A\cos\varphi}{1+\lambda\sin\varphi}=\frac{Eh^2}{ma}(\frac{-X_\varphi\sin\varphi+\overline{A}\cos\varphi}{1+\lambda\sin\varphi}) \qquad (19)$$

将等式(6)的第三、四式代入(5)的第三、四式，并应用到(1)得

$$M_\varphi=-\frac{D}{r_1}(\frac{d\theta}{d\varphi}+\nu\frac{\lambda\cos\varphi}{1+\lambda\sin\varphi}\theta) \qquad (20)$$

$$M_\theta=-\frac{D}{r_1}\left(\nu\frac{d\theta}{d\varphi}+\frac{\lambda\cos\varphi}{1+\lambda\sin\varphi}\theta\right) \qquad (21)$$

将等式(1)，(19)，(20)，(21)，代入(4)的第三式得

$$-\frac{aD}{r_1}\left\{(1+\lambda\sin\varphi)\frac{d\theta}{d\varphi}+\nu\lambda\cos\varphi\cdot\theta\right\}'+D\left(\nu\cos\varphi\frac{d\theta}{d\varphi}+\right.$$

$$\left.+\frac{\lambda\cos\varphi}{1+\lambda\sin\varphi}\theta\right)+\frac{Eh^2r_1}{m}(X_\varphi\sin\varphi-\bar{A}\cos\varphi)=0$$

整理后得

$$\frac{d}{d\varphi}\left\{(1+\lambda\sin\varphi)\frac{d\theta}{d\varphi}\right\}-\lambda\left(\nu\sin\varphi+\frac{\lambda\cos\varphi}{1+\lambda\sin\varphi}\theta\right)=$$

$$=\mu\sin\varphi\times X_\varphi-\mu\bar{A}\cos\varphi$$

略去上式左边第二项得

$$\frac{d}{d\varphi}\left\{(1+\lambda\sin\varphi)\frac{d\theta}{d\varphi}\right\}=\mu\sin\varphi\times X_\varphi-\mu\cos\varphi\cdot\bar{A} \qquad (22)$$

将等式(15)代入(6)的第二式得

$$u=\frac{a}{Eh}\left[(1+\lambda\sin\varphi)\left(\frac{X'}{\lambda}-\frac{pr_1}{2}\right)-\nu\left\{X\cos\varphi+\frac{pr_1}{2}(2+\lambda\sin\varphi+\right.\right.$$

$$\left.\left.+A\sin\varphi\right\}\right]=\frac{h}{m}\left\{\left(\frac{1}{\lambda}+\sin\varphi\right)\frac{dX_\varphi}{d\varphi}-\nu X_\varphi\cos\varphi-\nu\bar{A}\sin\varphi-\bar{P}\{1-\right.$$

$$\left.-2\nu+(1-\nu)\lambda\sin\varphi\}\right\} \qquad (23)$$

将等式(7)代入(6)的第一式得

$$W'=r_1\varepsilon_\varphi\sin\varphi+r_1\theta\cos\varphi$$

由于应变引起的位移比起转角引起的位移是小量，故可略去上式右边第一项得

$$\frac{dW}{d\varphi}=r_1\theta\cos\varphi \qquad (24)$$

4. 微分方程的解

将等式(22)乘以 $i=\sqrt{-1}$，然后与(16)相加，并令 $\eta=-X\varphi+i\theta$ 得

$$\frac{d}{d\varphi}\left\{(1+\lambda\sin\varphi)\frac{d\eta}{d\varphi}\right\}+i\mu\sin\varphi\cdot\eta=-i\mu\cos\varphi\cdot\bar{A} \qquad (25)$$

上式为二阶线性非齐次微分方程，其通解等于任一复数特解 $\bar{A}\eta\varphi$ 和下列齐次方程通解的和

$$\frac{d}{d\varphi}\left\{(1+\lambda\sin\varphi)\frac{d\eta}{d\varphi}\right\}+i\sin\varphi\cdot\eta=0$$

上式二阶方程具有二个线性无关的复数特解 $\eta_1=\eta_{1R}+i\eta_{1I}$ 和 $\eta_2=\eta_{2R}+i\eta_{2I}$，其通解为 $B_1\eta_1+B_2\eta_2$，$B_1=C_2+iC_1$，$B_2=C_4+iC_3$，C_1，C_2，C_3，C_4为任意常数，故方程(25)的通解为

$$\begin{aligned}\eta=&(C_2+iC_1)(\eta_{1R}+i\eta_{1I})+(C_4+iC_3)(\eta_{2R}+\\&+i\eta_{2I})+\bar{A}(\eta\varphi_R+i\eta\varphi_I)=-(C_1\eta_{1I}-C_2\eta_{1R}+\\&C_3\eta_{2I}-C_4\eta_{2R}-\bar{A}\eta\varphi_R)+i(C_1\eta_{1R}+C_2\eta_{1I}+\\&+C_3\eta_{2R}+C_4\eta_{2I}+\bar{A}\eta\varphi_I)\end{aligned}$$

由此可得

$$\left.\begin{aligned}\theta&=C_1\eta_{1R}+C_2\eta_{1I}+C_3\eta_{2R}+C_4\eta_{2I}+\bar{A}\eta\varphi_I\\X_\varphi&=C_1\eta_{1I}-C_2\eta_{1R}+C_3\eta_{2I}-C_4\eta_{2R}-A\eta\varphi_R\end{aligned}\right\}\quad(26)$$

现在我们来求方程(25)的解，令 $\eta=\eta_R+i\eta_I$，代入(25)得

$$\frac{d}{d\varphi}\left\{(1+\lambda\sin\varphi)\frac{d\eta_R}{d\varphi}\right\}=\mu\sin\varphi\cdot\eta_I$$

$$\frac{d}{d\varphi}\left\{(1+\lambda\sin\varphi)\frac{d\eta_I}{d\varphi}\right\}=-\mu\sin\varphi\cdot\eta_R-\mu\cos\varphi\cdot\bar{A}$$

令$\psi = \pi/2-\varphi$，则$\sin\varphi = \cos\psi$，$\cos\varphi = \sin\psi$，

$\frac{d}{d\varphi} = -\frac{d}{d\psi}$，代入上式得

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{d\psi}\left\{(1+\lambda\cos\psi)\frac{d\eta_R}{d\psi}\right\} = \mu\cos\psi\cdot\eta_I \\ &\frac{d}{d\psi}\left\{(1+\lambda\cos\psi)\frac{d\eta_I}{d\psi}\right\} = -\mu\cos\psi\cdot\eta_R - \mu\sin\psi\cdot\bar{A} \end{aligned}\right\} \quad (27)$$

将$\cos\psi = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^i}{(2i)!}\psi^{2i}$，$\sin\psi = -\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^i}{(2i-1)!}\psi^{2i-1}$代入上式，然后展开得

$$\left.\begin{aligned} &\left\{1+\lambda\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^i}{(2i)!}\psi^{2i}\right\}\frac{d^2\eta_R}{d\psi^2} + \lambda\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^i}{(2i-1)!}\psi^{2i-1}\frac{d\eta_R}{d\psi} \\ &= \mu\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^i}{(2i)!}\psi^{2i}\eta_I \\ &\left\{1+\lambda\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^i}{(2i)!}\psi^{2i}\right\}\frac{d^2\eta_I}{d\psi^2} + \lambda\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^i}{(2i-1)!}\psi^{2i-1}\frac{d\eta_I}{d\psi} \\ &= -\mu\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^i}{(2i)!}\eta_R + \mu\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^i}{(2i-1)!}\psi^{2i-1}\bar{A} \end{aligned}\right\} \quad (28)$$

采用级数解法令

$$\left.\begin{aligned} &\eta_R = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} a_{lmn}\,\psi^n\lambda^m\mu^{2l} \\ &\eta_I = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} b_{lmn}\,\psi^n\lambda^m\mu^{2l+1} \end{aligned}\right\} \quad (29)$$

将上式对ψ微分得

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d\eta_R}{d\psi} &= \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} n a_{lmn}\psi^{n-1}\lambda^{m}\mu^{2l} \\
\frac{d\eta_I}{d\psi} &= \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} n b_{lmn}\psi^{n-1}\lambda^{m}\mu^{2l+1} \\
\frac{d^2\eta_R}{d\psi} &= \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_{lmn}\psi^{n-2}\lambda^{m}\mu^{2l} \\
\frac{d^2\eta_I}{d\psi} &= \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) b_{lmn}\psi^{n-2}\lambda^{m}\mu^{2l+1}
\end{aligned}\right\}(30)$$

将等式(29)，(30)代入(28)得

$$\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_{lmn}\psi^{n-2}\lambda^{m}\mu^{2l} +$$

$$+\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^{i}}{(2i)!} n(n-1) a_{lmn}\psi^{n-2+2i}\lambda^{m+1}\mu^{2l} +$$

$$+\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^{i}}{(2i-1)!} n a_{lmn}\psi^{n-2+2i}\lambda^{m+1}\mu^{2l} =$$

$$=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^{i}}{(2i)!} b_{lmn}\psi^{n+2i}\lambda^{m}\mu^{2l+2},$$

$$\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) b_{lmn}\psi^{n-2}\lambda^{m}\mu^{2l+1} +$$

$$+\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^{i}}{(2i)!} n(n-1) b_{lmn}\psi^{n-2+2i}\lambda^{m+1}\mu^{2l+1} +$$

$$+\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^{i}}{(2i-1)!} n b_{lmn}\psi^{n-2+2i}\lambda^{m+1}\mu^{2l+1} =$$

$$= -\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^i}{(2i)!}a_{lmn}\psi^{n+2i}\lambda^m\mu^{2l+1} +$$

$$+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^i}{(2i-1)!}\psi^{2i-1}\mu\bar{A}$$

为便于计算，上式可改变为

$$\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_{lmn}\psi^{n-2}\lambda^m\mu^{2l} +$$

$$+\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{i=0}^{\alpha}\frac{(-1)^i}{(2i)!}(n-2i)(n-1-2i)a_{l,m-1,n-2i}\psi^{n-2}\lambda^m\mu^{2l} +$$

$$+\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=3}^{\infty}\sum_{i=1}^{\beta}\frac{(-1)^i}{(2i-1)!}(n-2i)a_{l,m-1,n-2i}\psi^{n-2}\lambda^m\mu^{2l} =$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{i=0}^{\alpha}\frac{(-1)^i}{(2i)!}b_{l-1,m,n-2-2i}\psi^{n-2}\lambda^m\mu^{2l} \qquad (31)$$

$$\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)b_{lmn}\psi^{n-2}\lambda^m\mu^{2l+1} +$$

$$+\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{i=0}^{\alpha}\frac{(-1)^i}{(2i)!}(n-2i)(n-1-2i)b_{l,m-1,n-2i}\psi^{n-2}\lambda^m\mu^{2l+1} +$$

$$+\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=3}^{\infty}\sum_{i=1}^{\beta}\frac{(-1)^i}{(2i-1)!}(n-2i)b_{l,m-1,n-2i}\psi^{n-2}\lambda^m\mu^{2l+1} =$$

$$= -\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{i=0}^{\alpha}\frac{(-1)^i}{(2i)!}a_{l,m,n-2-2i}\psi^{n-2}\lambda^m\mu^{2l+1} -$$

$$-\sum_{n=3,5,\cdots}^{\infty}\frac{(-1)^{\alpha}}{(n-2)!}\psi^{n-2}\mu\bar{A} \qquad (32)$$

$$式中\ \alpha=\begin{cases}\frac{n}{2}-1，当n为偶数时\\ \frac{n-3}{2}，当n为奇数时\end{cases}，\ \beta=\begin{cases}\frac{n}{2}-1，当n为偶数时\\ \frac{n-1}{2}，当n为奇数时\end{cases}$$

先求齐次方程（即$\overline{A}=0$）的解，在等式（31）中，令$\psi^{n-2}\lambda^{m}\mu^{2l}$ 的系数相同的项相等，我们可求得a_{lmn}和b_{lmn}，但其中a_{lmo}，a_{lm1}，b_{lmo}，b_{lm1}是任意的，为使计算容易起见，我们设$a_{ooo}=1$，$a_{om1}=(-1)^{m}$，其他$a_{lmo}=a_{lm1}=b_{lmo}=b_{lm1}=0$，则n为偶数的项只含有$a_{ooo}$，n为奇数的项只含有$a_{om1}$，下面按各情况来计算$a_{lmn}$和$b_{lmn}$。

当$l=0$，$m=0$，$n=2$，$3\cdots\cdots\infty$，由等式（31）得

$$n(n-1)a_{oon}=0，$$

即 $a_{oon}=0$

由等式（33）得

$$n(n-1)b_{oon}=-\sum_{i=0}^{\alpha}\frac{(-1)^{i}}{(2i)!}a_{o,o,n-2-2i}$$

即

$$b_{oon}=-\sum_{i=0}^{\alpha}(-1)^{i}\frac{a_{o,o,n-2-2i}}{(2i)!\,n(n-1)}$$

当$l=0$，$m\neq0$，$n=2$，$3\cdots\cdots\infty$，由等式（31）得n为偶数时

$$n(n-1)a_{lmn}+\sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1}\frac{(-1)^{i}}{(2i)!}(n-2i)(n-1-2i)a_{l,m-1,n-2i}+$$

$$+\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1}\frac{(-1)^i}{(2i-1)!}(n-2i)a_{l,m-1,n-2i}=0$$

即 $$a_{omn}=-a_{o,m-1,n}-\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1}(-1)^i\frac{n-2i}{(2i)!n}a_{o,m-1,n-2i}$$

取 $m=1$，由于 $a_{oon}=0$，故 $a_{o1n}=0$，由此递推得 $a_{omn}=0$。

n 为奇数时

$$n(n-1)a_{lmn}+n(n-1)a_{l,m-1,n}+$$

$$+\sum_{i=1}^{\frac{n-3}{2}}\frac{(-1)^i}{(2i)!}(n-2i)(n-1)a_{l,m-1,n-2i}+$$

$$+(-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{n-n+1}{(n-1-1)!}a_{l,m-1,n-n+1}=0$$

即 $$a_{omn}=-a_{o,m-1,n}-\sum_{i=1}^{\frac{n-3}{2}}(-1)^i\frac{n-2i}{(2i)!n}a_{o,m-1,n-2i}-$$

$$-(-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{a_{o,m-1,1}}{n!}$$

取 $m=1$，由于 $a_{o,m-1,1}=(-1)^m$，得 $a_{o1n}=-(-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{a_{oo1}}{n!}$，

余递推

当 $l\neq0$，$m=0$，$n=2$，$3\cdots\cdots\infty$，n 为偶数时，由等式 (31) 得

$$n(n-1)a_{lmn}=\sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1}\frac{(-1)^i}{(2i)!}b_{l-1,m,n-2-2i}$$

即 $$a_{lon}=\sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1}(-1)^i\frac{b_{l-1,o,n-2-2i}}{(2i)!n(n-1)}$$

同样由等式(32)得

$$b_{lon}=-\sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1}(-1)^i\frac{a_{l,o,n-2-2i}}{(2i)!n(n-1)}$$

n为奇数时，同样得

$$a_{lon}=\sum_{i=0}^{\frac{n-3}{2}}(-1)^i\frac{b_{l-1,o,n-2-2i}}{(2i)!n(n-1)}$$

$$b_{lon}=\sum_{i=0}^{\frac{n-3}{2}}(-1)^i\frac{a_{l,o,n-2-2i}}{(2i)!n(n-1)}$$

当 $l\neq 0$，$m\neq 0$，$n=2,\ 3\cdots\cdots\infty$

n为偶数时，由等式(31)得

$$n(n-1)a_{lmn}+\sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1}\frac{(-1)^i}{(2i)!}(n-2i)(n-1-2i)a_{l,m-1,n-2i}+$$

$$+\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1}\frac{(-1)^i}{(2i-1)!}(n-2i)a_{l,m-1,n-2i}=$$

$$= \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} \frac{(-1)^i}{(2i)!} b_{l-1,m,n-2-2i}$$

即 $$a_{lmn} = -a_{l,m-1,n} - \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1} (-1)^i \frac{n-2i}{(2i)!n} a_{l,m-1,n-2i} +$$

$$+ \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} (-1)^i \frac{b_{l-1,m,n-2-2i}}{(2i)!n(n-1)}$$

同样由等式(32)得(包括 $l=0$)

$$b_{lmn} = -b_{l,m-1,n} - \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1} (-1)^i \frac{n-2i}{(2i)!n} b_{l,m-1,n-2i} -$$

$$- \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} (-1)^i \frac{b_{l-1,m,n-2-2i}}{(2i)!n(n-1)}$$

n为奇数时，由等式(31)得

$$n(n-1)a_{lmn} + \sum_{i=0}^{\frac{n-3}{2}} \frac{(-1)^i}{(2i)!} (n-2i)(n-1-2i) a_{l,m-1,n-2i} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{(-1)^i}{(2i-1)!} (n-2i) a_{l,m-1,n-2i} =$$

$$=\sum_{i=0}^{\frac{n-3}{2}}\frac{(-1)^i}{(2i)!}b_{l-1,m,n-2-2i}$$

即 $$a_{lmn}=-a_{l,m-1,n}-\sum_{i=1}^{\frac{n-3}{2}}(-1)^i\frac{n-2i}{(2i)!n}a_{l,m-1,n-2i}+$$

$$+\sum_{i=0}^{\frac{n-3}{2}}(-1)^i\frac{b_{l-1,m,n-2-2i}}{(2i)!n(n-1)}$$

同样由等式(32)得(包括 $l=0$)

$$b_{lmn}=-b_{l,m-1,n}-\sum_{i=1}^{\frac{n-3}{2}}(-1)^i\frac{n-2i}{(2i)!n}b_{l,m-1,n-2i}-$$

$$-\sum_{i=0}^{\frac{n-3}{2}}(-1)^i\frac{a_{l,m,n-2-2i}}{(2i)!n(n-1)}$$

求特解时，只须将 $l=0$ ，$m=0$ ，n 为奇数（不包括 $n=1$ ）的情形改为

$$n(n-1)b_{oon}=-\sum_{i=0}^{\frac{n-3}{2}}\frac{(-1)^i}{(2i)!}a_{o,o,n-2-2i}-\frac{(-1)^{\frac{n-3}{2}}}{(n-2)!}\vec{A}$$

同时令 $a_{lmo}=a_{lm1}=b_{lmo}=b_{lm1}=0$（包括 $a_{ooo}=a_{om1}=0$），$\vec{A}=1$，故

$b_{oon}=(-1)^{\frac{n-1}{2}}/n!$，余类推，