新數學

中學適用

半羣學社編著

第三冊

上卷

聯合書院出版社

新數學

中學適用

半羣學社 編著

第三册

上卷

聯合書院出版社

總 編 輯

周紹棠 理學士(數學),哲學博士(數學)

編 輯

潘海紅 理學士(數學)

鄭肇楨 文學士(數學)

潘煒棠 文學士(數學)教育文憑

T. McC. Chamberlain 文學碩士(數學),教育學士

何兆倫 理學士(數學),英國 IMA 會士

潘鎮邦 文學士(數學)

徐思明 文學士(數學) 教育文憑

經 理 編 輯

彭 錫 恩 文學士

良 友 印 刷 有 限 公 司 印 製
香 港 西 灣 河 街 九 至 十 一 號

序　　言

本套教科書共有五册；第N册適合中學N年級之用，其中N=1, 2, 3, 4, 5.•本書計劃供給中學生全部數學課程以應考香港中學教育文憑試之新數學試題。

此等試題內容，一般稱爲新數學，這是不大確實的。最新發明的數學理論是用論文形式登載於數學雜誌上，這些資料當然不能列於教科書內。本書內容雖不包括最新的理論，但仍與傳統的數學教材有別，故傳用新數學之名。實際上這些理論最新的已有數十年的歷史。

新數學課程是中學數學現代化的成果。近年來全世界很多地區都各自實施“數學改進方案”，並分別依照此等方案以印行新教科書。這些教科書主要是適應參加某一個改進方案的學校的學生們，對本港學生不甚合適。他們的教科書主要祇適用於說他們語言的學生，本港中學生大多數由中文小學升上。由經驗知他們學數學所遭遇的困難不是數學上的而是語文（英文）上的。因此本書之特點是用儘量淺易的英語，同時有中文本對照；且例題之取材多就本港常見的事物，以學生觀點來說是比較容易明白和比較實用的。

本書的主要目的在激發學生們思考，顯示近代數學結構的特徵，鼓勵學習數學的興趣，發展清楚思巧和澈底明瞭的習慣，這也是學習數學的目的。

本書自１９６５年出版以來曾加修改，其原因一方面是接納教師們的寶貴建議，另一方面是隨着教育文憑試的課程而更改，以求合用，實非得已，伏祈諒察。

周 紹 棠

於香港中文大學聯合書院

一九六六年五月

皮爾·德·斐馬　(Pierre de Fermat
1608–1665

皮爾•德•斐馬
(1608—1665)

斐馬出生於法國•在三十歲前他對數學並無特別傾向•他是謙虛的，永不誇耀他的成就•他對數論有重要發現，但沒有將結果發表•他的工作在他故世後才印行，

在他的重要發現中，有一定理，一般稱爲斐馬最後定理•這定理如下：若n是大於2的整數時則無法找出三個整數x, y，z使適合等式：$x^n + y^n = z^n$ 若n=2則有 $3^2 + 4^4 = 5^2$. 斐馬在書頁的旁邊寫着"我已發現了實在出色的證法，但書邊太窄，不够寫下•"但以後他從未發表過他的證法•這定理至今仍未有人能够證明它是眞確或不眞確，這是一個開問題•

斐馬的最重要工作便是數論的基礎•此外他對於微積分，解析幾何，或然率亦有貢獻•

第三冊

上卷　目錄

第一章

對數函數

1.1 指數定律複習

試應用指數定律儘可能簡化下列各式：

i) $12x^6 \div 3x^3$

ii) $\dfrac{a^3 \times a^5}{a^6}$

iii) $yyy - 3y$

iv) $z + z^2 + z^3$

v) $16x^2y^3z^4 \div 4x^4y^3z^2$

vi) $(2^2)^4 = ?$

vii) $(a^3)^6 = ?$

設m和n是正整數，試完成下列等式（參看本書第二冊上卷）：

i) $a^m \times a^n = ?$

ii) $a^m \div a^n = ?$ $(m > n)$

iii) $a^m \div a^n = 1/?$ $(m < n)$

iv) $(a^m)^n = ?$

v) $a^m \times b^m = (\ ?\ )^m$

習題 1A

1) 化簡下列各式：

a) $x^3y^4z^6 \div (-x^2y)$

b) $-x^7y^5z^6 \div (-x^4y^2z^5)$

c) $(3a^3 \times 4ab^2) \div 2a^2b$

d) $2\ell^3 \div (-2\ell)^3$

e) $\dfrac{hg \times (-hg)}{hg}$

f) $4f^4 \div (4f)^4$

2) 儘可能簡化下列各式：

a) $2x^3 \times 3x^2$　　b) $2x^3 + 3x^2$

c) $(a^2)^6 + (a^6)^2$　　d) $11^5 \div 5^{11}$

e) $\frac{5a^2}{b} \div 2a$　　f) $-12(-b)^7$

3) 解下列方程以求 x 值：

a) $2a^3b^4x = 15a^6b^5$　　b) $-3a^5b^2x = 15a^6b^5$

c) $-6abcx = 36a^4b^3c^2$　　d) $(c^2)^x = c^{14}$

e) $(-3\ell)^x = -27\ell^3$　　f) $(x)^3 = 64b^9c^{18}$

1.11 $a^{\frac{p}{q}}$ 的意義 （ p，q 是正整數 ）

設 n 是一個自然數，則a^n是 $a \times a \times \ldots \times a$ （共 n 個 a ）的簡寫。例如 $a^5 = a \times a \times a \times a \times a$ 。由這定義則$a^{\frac{1}{2}}$便沒有意義。在本節裏我們將指定$a^{\frac{1}{2}}$和同類型的符號的意義。一般情形，我們要尋求$a^{\frac{p}{q}}$的意義，其中 p，q 是正整數。現在先假定$a^{\frac{p}{q}}$是一個數且適合指數定律之一： $(a^m)^n = a^{mn}$，那麼$a^{\frac{p}{q}}$便可以有意義。現先看下列幾個例題。

例 1

求$a^{\frac{1}{2}}$的數值。

設 $a^{\frac{1}{2}}$ 適合指數定律 $(a^m)^n = a^{mn}$，則

$$(a^{\frac{1}{2}})^2 = a^{\frac{1}{2} \times 2} = a$$

兩邊開方，便得：

$$a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$$

例 2

求$a^{\frac{3}{2}}$的數值。

$$(a^{\frac{3}{2}})^2 = a^{\frac{3}{2} \times 2} = a^3$$

兩邊開方，得：

$$a^{\frac{3}{2}} = \sqrt{a}^3$$

例 3

求$10^{\frac{1}{3}}$ 的數值。

$$(10^{\frac{1}{3}})^3 = 10^{\frac{1}{3} \times 3} = 10$$

那麼 $10^{\frac{1}{3}}$ 等於甚麼？

例 4

考慮$a^{\frac{6}{7}}$。

$$(a^{\frac{6}{7}})^7 = a^{7 \times \frac{6}{7}} = a^6$$

那麼$a^{\frac{6}{7}}$等於甚麼？

若 p，q 是正整數則$a^{\frac{p}{q}}$可定義爲 a 的 p 次乘方的 q 次方根。一個數 b 的 q 次方根也是一個數，它自乘 q 次的結果便是 b；這方根可寫成 $\sqrt[q]{b}$。例如 16 的四次方根是 2，因 $2^4 = 16$，由此可寫爲：$\sqrt[4]{16} = 16^{\frac{1}{4}} = 2$。特殊情形，b 的平方根可以寫爲 $\sqrt{b}$，可將二次方根 $\sqrt[2]{\ }$ 的 2 字省去。

例 5

試將下列方根寫成指數形式：

$$\sqrt[4]{a},\ \sqrt[4]{\ell^3},\ \sqrt[3]{-8},\ \sqrt[9]{6^7},\ \sqrt[3]{16},\ (\sqrt[6]{p})^5,\ \sqrt[5]{\left(\frac{2}{7}\right)^3}$$

例 6

求下列各值：

$$25^{\frac{1}{2}},\ 25^{\frac{3}{2}},\ 16^{\frac{3}{4}},\ 4^{2.5},\ 0.04^{\frac{3}{2}},\ (-8)^{\frac{5}{3}},\ 81^{0.75}$$

設m或n等於零時指數定建$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$仍成立，則有：

$$a^m \cdot a^\circ = a^{m+0} = a^m$$

設 $a \neq 0$，兩方除以a^m卽得：

$$a^\circ = \frac{a^m}{a^m} = 1 \text{ .}$$

由是a°的數値可定爲 1（其中 a 不等於零），若 $a = 0$，則a°將不給予定義。換言之，0°是一個無意義的符號。

若 $a \neq 0$，r 是正有理數或零則a^r已有定義。如 r 爲負有理數時，則要另想辦法看看a^r是否可能有意義。爲此我們假定指數定律

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

中，m 或 n 等於負數時仍成立，因此便有

$$a^r \cdot a^{-r} = a^{r-r} = a^\circ = 1$$

由是得定義如下：

$$a^{-r} = \frac{1}{a^r}$$

求 8^{-3} 之值

$$8^{-3} = \frac{1}{8^3} = \frac{1}{512}$$

求$8^{-\frac{5}{3}}$之值

$$8^{-\frac{5}{3}} = \frac{1}{8^{\frac{5}{3}}} = \frac{1}{(\sqrt[3]{8})^5} = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$$

例 3

求 $27^{-1.\dot{3}}$ 之值

$$1.\dot{3} = \frac{4}{3}.$$

$$27^{-1.\dot{3}} = \frac{1}{27^{\frac{4}{3}}} = \frac{1}{(\sqrt[3]{27})^4} = \frac{1}{81}.$$

例 4

求 $81^{-\frac{3}{4}}$ 之值

例 5

化簡下列各式：

i) $(2a^{-3})^{-2}$　　ii) $\dfrac{\sqrt{a^5} \times \sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[4]{a^{-3}} \times \sqrt[5]{a^9}}$

iii) $\sqrt[4]{b^5} \div \sqrt{b^{-2}}$

習題 1B

1) 讀出下列各式的數值：

i) $8^{\frac{1}{3}} \times 27^{\frac{2}{3}}$　　ii) $a^{0.25} \times a^{0.45}$

iii) $1011^{-\frac{3}{7}} \times 1011^{\frac{3}{7}}$　　iv) $b^5 \div b^{15}$

v) $a^{-\frac{6}{7}} \div a^{-\frac{5}{4}}$　　vi) $b^{-5} \times b^{11}$

2) 化簡下列各式，用單一個正指數表示結果：

i) $(a^{\frac{1}{3}})^{12}$　　ii) $(b^{\frac{1}{7}})^{\frac{5}{7}}$

iii) $a^5 b^5$　　iv) $(a^{-\frac{1}{3}})^{\frac{3}{2}}$

v) $[(bc)^{\frac{3}{4}}]^{-8}$　　vi) $(\ell^{-\frac{1}{m}})^{m^2}$

3) 以指數代替下列根號：

i) $\sqrt[4]{a}$ ii) $\sqrt[7]{b^{-5}}$

iii) $\sqrt[3]{c^{-11}}$ iv) $(\sqrt{a})^{13}$

4) 求下列各式的數值：

i) $16^{\frac{5}{4}}$ ii) $25^{\frac{3}{2}}$

iii) $(0.04)^{\frac{5}{2}}$ iv) 0.0001°

v) $10{,}000{,}000{,}000^{\circ}$ vi) $1024^{-0.5}$

vi) $(343)^{-\frac{2}{3}}$ vii) $(16^{\frac{3}{4}})^{-\frac{4}{3}}$

5) 化簡：

i) $9a^{\frac{1}{2}} \div (27a^2)^{-\frac{1}{3}}$ ii) $(3xy)^{-2} \times x^5y^5$

iii) $\sqrt[3]{x^2} \div \sqrt{x^{-4}}$ iv) $1 \div (9a^2)^{-\frac{1}{2}}$

v) $\sqrt[3]{8g^2} \div \sqrt[6]{g^{-5}}$ vi) $\sqrt[4]{32a^{-9}}$

6) 將下列各式寫爲 9 的乘方：

$\frac{1}{3}$, 27, 81, $\sqrt{3}$, 1

7) 解下列方程以求 x：

i) $a^x \div a^{-x} = a^4$ ii) $(k^x)^2 = \sqrt{k^5}$

iii) $\sqrt[5]{a^{-x}} = \sqrt[a]{a}$ iv) $1.6^x = 1$

8) 求下列各值：

i) $(0.01)^{-1.5}$ ii) $(0.25)^{0.5}$

iii) $216^{0.\dot{6}}$ iv) $1024^{-0.3}$

v) $81^{0.25}$ vi) $10000^{0.25}$

1.2 對數函數

試看函數

$$f_2 = \{(x, y) : x = 2^y\}.$$

若函數的區域是 $\{1, 2, 4, 8, 16, 32\}$，那麼它的變程是甚麼？

又 $(4, 2)$ 是否 f_2 的一元？試用上列的區域列出 f_2 的各元。又 -4 可否列入區域內作爲它的一元？如可能的話，-4 的像是甚麼？下面還有許多函數和 f_2 相類似：

$$f_3 = \{(x, y) : x = 3^y\},$$
$$f_{10} = \{(x, y) : x = 10^y\},$$
$$f_{50} = \{(x, y) : x = 50^y\},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

這些函數 f_2，f_3，f_{10}，f_{50}，………… 統稱爲對數函數。

一般情形，設 $a > 0$，我們用 $\log_a$ 來表示下列函數：

$$\{(x, y) : x = a^y\},$$

而寫成：

$$\log_a = \{(x, y) : x = a^y\}.$$

這函數稱爲“以 a 作底的對數函數”，這函數的區域是全部正數所成的集，習慣上這函數又寫爲：$y = \log_a x$。

例 1

在下面函數中再繼續多列出四個元：

$$\log_3 = \{(1, 0), (3, 1), (9, 2), \ldots\}.$$

例 2

$\log_8 512$ 的意義是甚麼？又數值是多少？

計算對數函數時，常將 $\log_a b$ 代替 $\log_a(b)$。

習題 1C

1) 描述下列各函數：

a) $\log_5 = \{(x, y) : \quad\quad \}$ b) $\log_{10} = \{(x, y) : \quad\quad \}$

c) $\log_{200} = \{(x, y) : \quad\quad \}$ d) $\log_{\frac{1}{2}} = \{(x, y) : \quad\quad \}$

e) $\log_{15} = \{(x, y) : \quad\quad \}$

2) 求下列各值：

i) $\log_2 8$　　ii) $\log_{10} 100$

iii) $\log_3 27$　　iv) $\log_3 \frac{1}{9}$

v) $\log_{1.5} 2.25$　　vi) $\log_{\frac{8}{3}} \frac{3}{8}$

vii) $\log_{13} 1$　　viii) $\log_{10} 0.0001$

3) 若對數 $\log_{10}$ 的區域是 $\{x : 0 < x \leqslant 1\}$，那麼變程是甚麼？

4) 若對數 $\log_{10}$ 的區域是 $\{x : x > 1\}$，變程又是甚麼？

5) 求下列各值：

i) $\log_{10} 1000$　　ii) $\log_{10} 0.01$

iii) $\log_{10} 1{,}000{,}000$　　iv) $\log_{10} 0.001$

v) $\log_{10} 0.1$　　vi) $\log_{10} 1$

vii) $\log_{25} 625$　　viii) $\log_{25} 5$

ix) $\log_{25} \frac{1}{25}$　　x) $\log_{25} 125$

xi) $\log_{25} 15{,}625$　　xii) $\log_{25} 3125$

xiii) $\log_a 1$　　xiv) $\log_a a$

6) 由定義 $\log_{10} 1000 = 3$ 卽 $1000 = 10^3$。
一般情形若

$$\log_a b = c \quad 則 \quad b = a^c ,$$

由是將題 5 各式寫爲指數的形式。

設 $f(x) = x^2 + 3x$，試求

$f(2)$，$f(3)$ 及 $f(5)$。

$f(2) = 4 + 6 = 10$
$f(3) = 9 + 9 = 18$
$f(5) = 25 + 15 = 40$

$f(2 + 3) = f(2) + f(3)$ 對不對？

例 2

設　$f(x) = \frac{5}{x}$

$$f(5 + 4) = ?\ \ f(5) = ?\ \ f(4) = ?$$

$f(5 + 4) = f(5) + f(4)$ 對不對？

由這兩例題，就一般函數來說 $f(a + b) = f(a) + f(b)$ 是否常常眞確？

例 3

$f(x) = \frac{2}{3}x + 1$

$$f(3) = ?\ \ f(9) = ?\ \ f(3 \times 9) = ?$$

$f(3 \times 9) = f(3)f(9)$ 對不對？

例 4

設　$g(x) = \log_2 x$

$$g(4) = ?\ \ g(16) = ?\ \ g(4 \times 16) = ?$$

$g(4 \times 16) = g(4) \times g(16)$ 對不對？

$g(ab) = g(a)\,g(b)$ 對不對？

對一般函數來說 $g(ab) = g(a)\,g(b)$ 對不對？

例 5

試尋求一個反證例，證明 $f(a/b) = f(a)/f(b)$ 不常眞。

1.32　$\log_a(x + y) \neq \log_a x + \log_a y$

由上節例 1 和例 2 我們已知道任取一函數 $f(x)$ 來說，

$$f(a + b) \neq f(a) + f(b)$$

我們更從下面各例題知道對數函數也是這樣。

例 1

考慮　$\log_2$

$\log_2(4+4)=3,\ \log_2 4=2$
$\log_2(4+4)\neq\log_2 4+\log_2 4$ •

例 2
考慮 $\log_8$

$\log_8 1=0$ ， $\log_8\frac{1}{2}=-\frac{1}{3}$

$\log_8(\frac{1}{2}+\frac{1}{2})\neq\log_8\frac{1}{2}+\log_8\frac{1}{2}$ •

1.33 $\log_a xy=\log_a x+\log_a y$

我們由上節反證例可知

$$\log_a xy\neq(\log_a x)(\log_a y)$$

可是 $\log_a(xy)$和 $\log_a x$, $\log_a y$ 仍有一種很簡單的關係存在，現在試看下面各例題。

例 1
求 $\log_5 25$, $\log_5 5$ 和 $\log_5(5\times 25)$ 的數值，並比較 $\log_5(5\times 25)$ 和 $\log_5 5+\log_5 25$ 的數值。

例 2
求 $\log_{10}100$, $\log_{10}10$ 和 $\log_{10}(10\times 100)$ 的數值，並比較 $\log_{10}(10\times 100)$ 和 $\log_{10}10+\log_{10}100$ 的數值。

現在我們證明在一般情形下 $\log_a xy=\log_a x+\log_a y$ 恒適合。

證：設 $\log_a xy=p$ 則 $xy=a^p$
設 $\log_a x=m$ 則 $x=a^m$
設 $\log_a y=n$ 則 $y=a^n$

$$a^p=xy=a^m\cdot a^n=a^{m+n}$$

即
(1) $p=m+n$
以 p, m, n 的數值代入上式即得：

(2) $\log_a xy=\log_a x+\log_a y$