新數學

中學適用

半羣學社編著

第五冊

聯合書院出版社

附答案

新數學

中學適用

半羣學社編著

第五冊

聯合書院出版社

總編輯

周紹棠 理學士（數學），哲學博士（數學）

編輯

潘海紅 理學士（數學）

鄭肇楨 文學士（數學）

潘煒棠 文學士（數學）教育文憑

T. McC. Chamberlain 文學碩士(數學)，教育學士

何兆倫 理學士（數學），英國 IMA 會士

潘鎮邦 文學士（數學）

徐思明 文學士（數學） 教育文憑

經理編輯

彭錫恩 文學士

良友印刷有限公司印製

香港西灣河街九至十一號

序　言

本套教科書共有五册，第N册適合中學N年級之用，其中N = 1, 2, 3, 4, 5.本書計劃供給中學生全部數學內容以應考香港中學教育文憑試之新數學課程。

此等課程內容，一般稱爲新數學，這是不大正確的•最新發明的數學理論是用論文形式登載於數學雜誌上，這些資料當然不能列於教科書內•本書內容雖不包括最新的理論，但仍與傳統的教材有別，故傳用新數之名，實際上這些理論最新的也有數十年歷史。

新數學課程是中學數學教學現代化的成果，近年來世界很多地區都各自實施"數學改進方案"　，並分別依照此等方案以印行新教科書•這些教科書主要是適應參加某一個改進方案的學校的學生們，對本港學生不大合適；他們的教科書主要祇適用於說他們語言的學生，本港中學生絕大多數來自中文小學，由經驗知他們學習數學時所遭遇的困難，不是數學上的而是語文（英文）上的•本書特點是用盡量淺易的英語，同時有中文本對照；且例題之取材多就本港常見之事物，以學生觀點來說，是比較容易明白和比較實用的。

本書的主要目的在激發學生們思考，顯示近代數學結構的特徵，鼓勵學習數學的興趣，發展清楚思考和澈底明瞭的習慣，這也是學習數學的目的。

本書自1965年出版以來曾加修改，其原因一方面是接納教師們的寶貴建議，另一方面是隨着教育文憑試之課程而更改，以求合用，實非得已，伏祈諒察。

周紹棠

一九七七年於香港

Gauss (1777 – 1855)

高斯 (1777 – 1855)

卡爾·菲特力治·高斯是窮家的兒子·他在1777年四月三十日生於德國布根斯域克鎮的一個茅舍中·他的祖父是一個窮佃農，他的父親曾當過園丁，渠務工人和砌磚工人，他的母親有很强的個性，聰敏而有幽默感，就全憑着她，才能拗過了她頑固的丈夫令兒子獲得了適合他能力的教育。

高斯在三歲時就表現了他的天才；他竟能指出他父親所計算每週發放的工人薪金有錯誤。其後，在十歲時他被錄取而就讀一算術班，他能夠立即算出一個很長的算術級數之和而令他的教師印象深刻·

在1796年高斯在平面幾何裏有一個很完美的發現，他証明了祇用直尺和圓規可以作出有奇數邊數的正多邊形，祇須邊數是一個菲瑪質數（菲瑪質數是$2^{2^n}+1$型的質數）或是幾個菲瑪質數的乘積·一般人相信，就是爲了這一發明，高斯才決定了選擇數學而非哲學作爲終生工作。

在1799年，高斯獲得了希姆士達德大學所授予的博士學位，當時他所提出的論文是“含一個變數的正整函數可分解爲一或二次的實係數因子的新証法”·（這定理通稱爲代數基礎定理；一個等價的命題便是：凡含有一個未知數的方程必有一根·）

高斯的第一件傑作，這也許是他最偉大的作品，便是“數學研究”，印行於1801年，當時高斯年紀祇廿四歲，這是關於數論的工作，這書印行後使高斯晋升爲當時第一流數學家·

高斯在各門數學上都獲得很多基礎上的成就，他興趣的範圍包括了天文，大地測量學，數理物理，位置幾何學以及與複變函數有關的幾何學·

高斯卒於 1855 年二月廿三日，時年七十八歲·

第五册
目錄
上卷

下卷
復習

第一章

數串，級數和數學歸納法

1.1 數串

試想想一映射，以自然數集 $N=\{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ 作爲區域，各自然數的像寫爲：

$$T(1),\ T(2),\ T(3),\ T(4),\ \ldots$$

當這些像依照着自然數的次序排列，如上所示，則這些像做成一**數串**。$T(1)$ 稱爲第一項，$T(2)$ 稱爲第二項，其餘照此類推。設 r 表一個自然數，則 $T(r)$ 稱爲**公項**；因數串的各項可令 r 由 1 起依次取各自然數代入 $T(r)$ 內而得。

例如一串平方數

$$1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25,\ \ldots$$

做成一數串，它的公項 $T(r)$ 是 r^2。又立方數

$$1^3,\ 2^3,\ 3^3,\ 4^3,\ 5^3,\ \ldots$$

也成一數串，它的公項 $T(r)$ 是 r^3。

當一數串的公項 $T(r)$ 是已知的含自然數 r 的數式時，則整個數串便可寫出。

例

設 $T(r)=3r+5$，試寫出這數串的首 4 項。

解：依次設 $r=1, 2, 3, 4$，便得：

$$\begin{aligned}
T(1) &= 3.1+5 = 8\\
T(2) &= 3.2+5 = 11\\
T(3) &= 3.3+5 = 14\\
T(4) &= 3.4+5 = 17.
\end{aligned}$$

由是知這數串的首 4 項爲 8, 11, 14, 17。

習題 1A

1) 試寫出下列各數串的公項：

a) 1, 3, 5, 7, . . .　　　　b) 2, 4, 6, 8, . . .

c) 1, 4, 7, 10, . . . d) 4, 8, 16, 32, . . .
e) 1.2, 2.3, 3.4, 4.5, . . . f) 1.2.4, 2.3.6, 3.4.8, 4.5.10, . . .
g) $\frac{1}{3.6}, \frac{1}{4.8}, \frac{1}{5.10}, \frac{1}{6.12}, \ldots$ h) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$
i) $\frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \frac{9}{4}, \frac{16}{5}, \ldots$ j) +1, −1, +1, −1, . . .

2) 已知數串的公項，試寫出每數串的首 4 項：
a) $3r + 4$ b) $r^2 - 1$
c) $(3r - 1)^r$ d) $\frac{r+1}{r-1}$
e) $(\frac{1}{2})^r - 1$ f) $4r - \frac{1}{r}$
g) $\frac{2r-1}{r^2}$ h) $(r + 1)(r + 3)$
i) $(r)^{-r}$ j) $\frac{2r+1}{r(r+1)(r+2)}$
k) 3.2^{r-1} l) $2^{(r^2)}$

1.11 算術級數

數串中最簡單的就是公項爲 r 的一次式的一種。即 $T(r) = k_1 r + k_2$ ，其中 k_1 , k_2 是常數與 r 無關。這種數串稱爲**算術級數**，或**等差級數**，簡稱爲 A. P. 。自然數本身就是算術級數的一種。

算術級數的最重要的性質就是：兩連續項的差等於一常數，故又稱爲等差級數。這性質可由兩連續項相減而知：

若 $T(r) = k_1 r + k_2$

則 $T(r + 1) = k_1(r + 1) + k_2$

∴ $T(r + 1) - T(r) = k_1$.

這裏 k_1 稱爲算術級數的**公差**，常用 d 來表示。

由是 $T(r + 1) = T(r) + d$，若用 a 表 $T(1)$ ，則有：

$$\begin{aligned}
T(1) &= a \\
T(2) &= a + d \\
T(3) &= T(2) + d = (a + d) + d = a + 2d \\
T(4) &= T(3) + d = (a + 2d) + d = a + 3d \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
T(r) &= a + (r - 1)d.
\end{aligned}$$

若一等差級數的**首項** a 和公差 d 已知則公項 $T(r)$ 即可寫出，由此全級數也可寫出。

例 1

一算術級數的公項是 $8r-5$，試求公差和首 4 項。

$$T(r) = 8r - 5$$
$$T(r+1) = 8(r+1) - 5$$
$$T(r+1) - T(r) = 8$$

故公差是 8。

$$T(1) = 8.1 - 5 = 3$$

首四項是： 3, 11, 19, 27 。

例 2

一 A. P. 的首項是 8，公差是 -2，試求第 5 項第 10 項及第 r 項。

$$\begin{aligned} T(5) &= 8 + (5-1)(-2) \\ &= 8 - 8 = 0 \\ T(10) &= 8 + (10-1)(-2) \\ &= 8 - 18 = -10 \\ T(r) &= 8 + (r-1)(-2) \\ &= 8 - 2(r-1) \\ &= 10 - 2r. \end{aligned}$$

例 3

在某一 A. P. 中 $T(3) = 7$，$T(8) = 22$，求公項。

設首項是 a，公差是 d，則

$$T(3) = a + 2d = 7$$
$$T(8) = a + 7d = 22.$$
$$5d = 15$$

兩式相減得： $\Rightarrow \quad d = 3.$

$$\begin{aligned} a &= 7 - 2d \\ &= 7 - 6 \\ &= 1. \\ T(r) &= 1 + 3(r-1) \\ &= 3r - 2. \end{aligned}$$

習題 1B

1) i) 由下列各數串的公項中指出那個是算術級數。
ii) 在每 A. P. 中求出首項和公差。
iii) 在非 A. P. 的數串中，寫出每數串的首 4 項。

a) $3r + 1$ b) $4r^2 - r + 1$
c) $6r - 5$ d) $-2r - 3$
e) $(-3r)(r + 1)$ f) $4(2r - 1)$

g) $(r-1)+(r-2)+(r-3)$

h) $2(r+1)+3(r-1)$ i) $3(2r-1)+4(2r+1)$

j) $\dfrac{1}{r+1}$ k) $\dfrac{1}{r(r+1)}$

2) 求下列各算術級數的公項，已知：

a) $T(4) = 18,\ T(9) = 23$ b) $T(7) = 15,\ T(10) = 9$

c) $T(5) = -3,\ T(2) = -43$ d) $T(24) = 50,\ T(30) = 2$

e) $T(4) = 1\frac{1}{4},\ T(8) = 2\frac{1}{4}$

f) $T(5)+T(10) = 100,\ 7T(5) = 3T(10)$

g) $T(1)+T(2)+T(3) = 21,\ T(4)+T(5)+T(6) = -6$

h) $7T(7)-9T(9) = 160,\ T(6) = 10T(3)$

3) 當三數 x，m，y 成算術級數，則 m 稱爲 x，y 的**算術中項**。求證：

$$m = \frac{1}{2}(x+y).$$

由此求 $1\frac{1}{4}$，$2\frac{1}{4}$ 的算術中項。

4) 設 x，m_1，m_2，m_3，y 成算術級數則 m_1，m_2，m_3 亦稱爲 x，y 的算術中項。試用 x，y 表示 m_1，m_2 和 m_3。
並求在下列二數中插入三個算術中項：

i) 5 及 16, ii) 48 及 70.

5)

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
3 & & 7 & & 13 & & 21 & & 31 & & T(6) & & T(7) & & T(8) \\
& 4 & & 6 & & 8 & & 10 & & x & & y & & z & \\
& & 2 & & 2 & & 2 & & 2 & & 2 & & 2 & &
\end{array}$$

在上面數字的排列中，第一列是一個數串的首八項。第二列是第一列兩連續項的差。第三列是第二列兩連續項的差。

試求 x，y，z 和 T(6)，T(7)，T(8)。

6) 試用題 5 的方法將下列各數串加長 3 項：

a) 6, 9, 16, 27, . . . b) 1, 6, 9, 22, . . .

c) 6, 13, 24, 39, . . . d) 4, 16, 42, 88, . . .

e) 2, 8, 24, 56, . . .

1.12 幾何級數

試考慮一集數串，它的公項是 pq^r，其中 p，q 是常數，與 r 無關，則這種數

串稱爲**幾何級數**，又稱爲**等比級數**，簡寫爲 G. P. •

幾何級數的最重要性質是：兩連續項的比等於一常數，可證明如下：

$$T(r) = pq^r$$
$$T(r+1) = pq^{r+1}$$
$$\frac{T(r+1)}{T(r)} = \frac{pq^{r+1}}{pq^r} = q$$

q 稱爲幾何級數的**公比**，常用 R 來表示，由是 $T(r+1) = R \cdot T(r)$• 若以 a 表幾何級數的首項則：

$$T(1) = a$$
$$T(2) = R \cdot T(1) = aR$$
$$T(3) = R \cdot T(2) = aR^2$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$T(r) = aR^{r-1}$$

例 1

一幾何級數的公項爲 $5(\frac{1}{2})^{r-1}$，試求公比及首 4 項。

$$T(r) = 5(\tfrac{1}{2})^{r-1}$$
$$T(r+1) = 5(\tfrac{1}{2})^{r}$$
$$\frac{T(r+1)}{T(r)} = \frac{5(\frac{1}{2})^{r}}{5(\frac{1}{2})^{r-1}} = \frac{1}{2}.$$

由是公比爲 $\frac{1}{2}$ •

$T(1) = 5(\frac{1}{2})^{1-1}$，首 4 項爲：

$$5,\ 2\tfrac{1}{2},\ 1\tfrac{1}{4},\ \tfrac{5}{8}.$$

例 2

幾何級數中 $T(2) = -10$, $T(5) = -80$，求公項 •

設 a 表首項，R 表公比，則

$$T(2) = aR = -10$$
$$T(5) = aR^4 = -80$$

二式相除得：

$$R^3 = 8$$
$$\Rightarrow R = 2$$

由 T(2)
$$a = \frac{-10}{R} = -\frac{10}{2} = -5.$$
$$\therefore \quad T(r) = -5.2^{r-1}$$

習題 1C

1) 已知 a 和 R，試求下列各幾何級數的公項：

a) $a = \frac{1}{2},\ R = \frac{1}{2}$ b) $a = 3,\ R = -2$

c) $a = 0.1,\ R = -0.1$ d) $a = -\frac{1}{2},\ R = 2$

e) $a = \frac{1}{5},\ R = \frac{1}{4}$

2) 寫出下列幾何級數的首 4 項，已知：

a) $T(4) = \frac{1}{2},\ T(8) = \frac{1}{32}$ b) $T(2) = -20,\ T(5) = 160$

c) $T(3) = 75,\ T(5) = 1875$

d) $T(3) = 5T(2),\ T(3) + T(5) = 1950$

e) $T(5) + T(7) = \frac{5}{16},\ T(3) + T(5) = 1\frac{1}{4}$

f) $T(1) + T(3) + T(5) = 210$
$T(2) + T(4) + T(6) = -420$

3) 若 x，g，y 成幾何級數則 g 稱爲 x，y 的**幾何中項**或**等比中項**•試證明：

$$g = \pm\sqrt{xy}.$$

由是求 8，32的幾何中項•

4) 設 x，g_1，g_2，g_3，y 成幾何級數則 g_1，g_2，g_3 仍稱爲 x，y 間的幾何中項，試以 x，y 表示 g_1，g_2 及 g_3•
並在下列兩已知數間插入三個幾何中項：

i) $\frac{1}{2}$ 及 $\frac{1}{32}$ ii) -2 及 $-1250.$

5) 一塊地以 \$5,000 的價售出，若每三年地價漲一倍，則第12年底時這塊地值多少元？

6) 一真空唧筒每次抽動能將容器中的空氣抽出 $\frac{1}{5}$，問五次抽動後仍剩下空氣多少？

7) 在某次檢驗中，一瓶牛奶有細菌15,000•若每兩小時內細菌數目增加一倍，則第12小時後細菌有多少？

8) 一筆欵項投資於某一實業，每年利息是 5%，問第三年底該筆欵項比原來數目增加多少？（計算至一分）

1.13 複利

當我們將一筆欵項存入銀行一個時期，則銀行必另給我們一些錢，因為他們已經將我們的錢運用而得利潤•存入銀行的一筆欵項稱爲**本金**，而另給我們的一筆欵項則稱爲**利息**•利息通常依照事前雙方協定的固定利率計算（這利率常以百分率表示）•在一定時期之後，若利息不提出而仍存於銀行則第二期內作爲本金的一部分而計算利息•在一個時期後本金和利息合計的欵項稱爲**本利和**，若我們向銀行貸欵亦照同法計算利息，但利率可能不同•

設將一筆欵項 \$P 存入銀行，年利率是 r（每年利率常用 p.a. 表示）•一年後利息便是 \$Pr 而本利和是 $\$(P+Pr)=\$P(1+r)$ •若這筆欵項仍存入銀行則第二年便作爲本金，第二年底所得的利息是 $\$P(1+r)r$ •故第二年底所得的本利和是 $\$P(1+r)+\$P(1+r)r=\$P(1+r)^2$•照此類推，每年底所得的本利和便成一幾何級數如下：

$$P(1+r),\ P(1+r)^2,\ P(1+r)^3,\ \ldots,\ P(1+r)^n,\ \ldots.$$

其中 $P(1+r)^n$ 便是第 n 年底所得的本利和，賺得的利息總數等於 $P(1+r)^n-P$，這便是本金爲 P，年利率爲 r，在第 n 年後所得的複利息•

例 1

本金是 \$60,000，年利率是 5%，求三年後的複利息•

$$\begin{aligned} \text{本利和} &= \$60{,}000\,(1+5\%)^3 \\ &= \$60{,}000 \times 1.05^3 \\ &= \$60{,}000 \times 1.157625 \\ &= \$69{,}457.50 \\ \therefore \quad \text{複利息} &= \$69{,}457.50 - \$60{,}000 \\ &= \$9{,}457.50 \end{aligned}$$

由上公式可見存欵的本利和，每年以因子 $(1+r)$ 倍乘而得•爲計算方便起見，取若干個 r 和 n 的數值而算出 $(1+r)^n$ 的數值，列入表內以方便速算•這表稱爲"複利表"•現在複利表已不常用，計算機和電腦更能準確地算出結果，故已取代複利表了•

複利計算亦可以半年一次，每半年所得的本利和仍成一幾何級數•

例 2

本金 \$60,000，年利率 5%，半年結算一次，求三年後的本利和。
時期次數（即計算次數）= 6

每次結算時的利率 $= 5\% \div 2 = 2\frac{1}{2}\%$

$$\therefore \quad 本利和 = \$60{,}000\,(1 + 2\tfrac{1}{2}\%)^6$$
$$= \$60{,}000 \times 1.025^6$$
$$= \$60{,}000 \times 1.15969$$
$$= \$69{,}581 \text{（準確至一元）}$$

注意：解決這等問題時，四位對數表無大用處，若無計算機則仍須應用複利表。

例 3

本金 \$10,000，年利率 4%，每年結算一次，問幾年後本利和才超過 \$14,000？
設 n 年後本利和剛超過 \$14,000。
即

$$10{,}000\,(1 + 4\%)^n > 14{,}000$$
$$1.04^n > 1.4$$
$$\Rightarrow \quad n \log_{10} 1.04 > \log_{10} 1.4$$
$$n > \frac{\log_{10} 1.4}{\log_{10} 1.04}$$
$$\fallingdotseq 8.6$$

故至少九年本利和才能超過14,000元。

注意：這結果亦可由複利表查出。由 \$10,000 而增至 \$14,000 即由 \$1 增至 \$1.4。
在 4% 一直行內查出兩連續數 1.36857 及 1.42331，使 1.4 沿在這兩數之間。
這兩數對着的年份是 8 及 9，故所求年份在 8 與 9 年之間。
即 \$10,000 的本利和在第 9 年已到達 \$14,000 而超過此數，故答案是 9 年。

例 4

本金 \$50,000 在 5 年後本利和增爲 \$60,000，問每年年利率須多少？
設年利率是 r%，令 $R = 1 + r\%$。

$$50{,}000R^5 = 60{,}000$$
$$R = \sqrt[5]{1.2} = 1.037 \quad \text{（用四位數表）}$$
$$\text{即} \quad r = 3.7$$

習題 1D

在本習題內，答案準確至一元，計算時可應用本習題之後的複利表。

1) 本金 $70,000，存放 $2\frac{1}{2}$ 年，年利率 8%，每半年計算一次，求本利和。

2) 本金 $85,000，年利率 5%，每年結算一次，求 3 年後複利與單利之差（若每年底將利息提出，則本金維持不變，這利息稱爲**單利息**）。

3) 在 1970 年初某一城的人口是 80,000，人口增加率每年是 4%，問到 1975 年初的人口是多少？

4) 某人存款 $40,000 入銀行，年利率是 5%，每年結算複利一次，若每年須繳所得稅 12%，求第三年底的總入息。

5) 某人向銀行貸款 $10,000，並同意在每年底給年初貸款額的 8% 作爲利息。第一年底還銀行 $4,000，第二年底還 $4,000，第三年末若將債項清結問須還銀行幾元？

6) 年利率 4%，每年結算複利一次，問由 $7,000 增至 $8,000 需時多少年？

7) 本金 $65,000，年利率 $3\frac{1}{2}$%，每年結算一次，求 10 年後的複利息。

8) 一副機器在啟用後的第一年底貶值 18%，以後每年貶值 15%，若在第 5 年底該機器仍值 $6,000，問此機器在啟用前應值多少？（準確至一千元）

9) 一部汽車的價值在 5 年內由 $15,000 跌至 $8,000 問每年平均貶值的百分率是多少？

10) 問須投資多少使在 5 年後得本利和 $10,000，設年利率 4%，每半年計算一次？（答案須準確至 10 元）