中学生家长、教师辅导用书

全国百所重点中学

高中数学

复习测试题精选

江苏教育出版社

全国百所重点中学

高中数学

复习测试题精选

（修订本）

江苏教育出版社

百所重点中学
数学复习测试题精选
（修订本）
责任编辑：龚　俊

出版发行：江苏教育出版社
（南京中央路165号　邮政编码：210009）
经　　销：江苏省新华书店
印　　刷：大丰第二印刷厂
（地址：江苏省大丰县育红西路5号　邮政编码：224100）

开本 787×1092 毫米　1/32　印张 11.25　字数 253,000
1991年8月第2版　　1991年8月第1次印刷
印数 1-65,600 册

ISBN 7—5343—1195—0

G·1055　　　　定价：3.10元

前　言

本书以高中数学教学大纲和高中数学教材为依据，收集了全国百余所重点中学大量复习测试资料，选其精华，提炼加工，汇编而成。

全书基本上按教材体系编选，共分12章。每章内容包括：1．教学大纲要求；2．典型例题；3．各类题选。每章的结尾附有本章题选的答案提示。全书最后附有综合测试题六套和答案提示，以便检验读者综合掌握高中数学知识的能力。

本书由浅入深，覆盖面大，涉及每个知识点；突出重点，抓住难点，指导读者形成正确的解题思路，得到解题规范化的训练，从而培养学习数学的兴趣，增进全面应用所学知识、综合分析问题和解决问题的能力，为升入高一级学校打下坚实的基础。本书可与数学教材配合使用，供老师用于课堂上的复习测试；也可供学生课外复习和自测使用。

本书由无锡市第一中学周祥昌、王平南、陆云泉、史有作、李绳仁、汪鼎麟、段锡明、单立信编写，周祥昌统稿，陆培兴、乔春源绘图。

由于编者水平有限，经验不足，加上时间仓促，错误和疏漏在所难免，恳请读者指正。

编　者

1991．6．

目　录

第一章　集合和函数

一、集　合

大　纲　要　求

理解集合的概念，正确运用集合的两种表示方法；了解元素对于集合的从属关系，熟悉常用数集的记号N、Z、Q、R的意义；理解子集、交集、并集、补集的概念，并能识别和使用有关的术语和符号；了解空集和全集的意义，包含和相等关系的意义，并能求一些简单方程（组）和不等式（组）的解集。

典　型　例　题

例1　下列各题仅有一个正确答案，请将正确答案的序号填入题后括号内：

(1) 已知集合$A=\{x|x^3-2x^2-3x=0,\ x\in R\}$，则集合$A$的所有子集的个数为……………………………………(　　)。

(A) 4个；　(B) 7个；　(C) 8个；　(D) 以上都不对。

(2) 如图1-1所示，图中阴影部分用集合A、B表示，其中错误的是……………………………………………(　　)。

(A) $(A\cap\overline{B})\cup(B\cap\overline{A})$；　(B) $(A\cup B)\cap\overline{(A\cap B)}$；

（C）$(A\cup B)\cap(\overline{A}\cup\overline{B})$；　　（D）$(\overline{A}\cap\overline{B})\cap(A\cup B)$。

（3）设全集$I=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$，且A，$B\subset I$，若$A\cap B=\{2\}$，$\overline{A}\cap B=\{4\}$，$\overline{A}\cap\overline{B}=\{1,\ 5\}$，则下列结论正确的是……………………………………………（　　）。

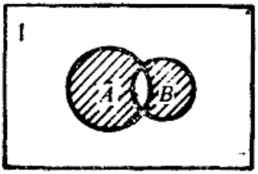


图　1-1

（A）$3\notin A$，$3\notin B$；

（B）$3\in A$，$3\notin B$；

（C）$3\notin A$，$3\in B$；

（D）$3\in A$，$3\in B$。

（4）已知集合$A=\{x,\ xy,\ \lg(xy)\}$，$B=\{0,|x|,y\}$，且$A=B$，则下列结论正确的是…………………………………（　　）。

（A）$x=1$，$y=1$；　　（B）$x=-1$，$y=1$；

（C）$x=1$，$y=-1$；　　（D）$x=-1$，$y=-1$。

解：（1）$\because$ $A=\{x\,|\,x^3-2x^2-3x=0,\ x\in R\}=\{0,\ -1,\ 3\}$，　　$\therefore$集合A的所有子集为：$\varnothing$，$\{0\}$，$\{-1\}$，$\{3\}$，$\{0,\ -1\}$，$\{0,\ 3\}$，$\{-1,\ 3\}$，$\{0,\ -1,\ 3\}$共8个，$\therefore$ 选择（C）。

说明：一般地，若集合A中有n个元素，则A的所有子集的总数为2^n个。

（2）选择（D）。

说明：用 Venn 图表示集合与集合的关系是数形结合的一种新的形式，它能使抽象的概念具体化，对于我们理解和掌握概念具有很大帮助。读者可以在 Venn 图上验证如下规则：

$$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}；\qquad \overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}。$$

（3）$\because$ $\overline{A}\cap\overline{B}=\{1,\ 5\}$，　　$\therefore$ $A\cup B=\{2,3,4\}$，

$\because$ $A\cap B=\{2\}$，$\overline{A}\cap B=\{4\}$，

$\therefore$ $3\in A$ 但$3\notin B$，选择（B）。

（4）$\because$ $x\neq 0$，$y\neq 0$，$A=B$，

$$\therefore \begin{cases} \lg(xy)=0 \\ x=|x| \\ xy=y \end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases} \lg(xy)=0 \\ x=y \\ xy=|x|, \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases} x=-1 \\ y=-1, \end{cases}$$

但当 $x=1$，$y=1$ 时，集合中有重复元素出现，故不合，舍去，选择（D）。

说明：集合里的各个对象叫做集合的元素，对于一个给定的集合，集合中的元素具有确定性，集合中的元素也是互异的，另外用列举法表示集合时，不必考虑元素之间的顺序。

例 2　（1）设 $I=\{$四边形$\}$，$A=\{$至少有一组对边平行的四边形$\}$，则 $\overline{A}=$________。

（2）$I=\{x\,|\,|x|\leqslant 4\}$，$A=\{x\,|\,x^2-x-6<0\}$，

$B=\{x\,|\,\dfrac{3-x}{3+x}\geqslant 0\}$，则 $\overline{A}=$____；$A\cap B=$____；

$\overline{A\cup B}=$____；$\overline{A}\cap B=$____。

（3）$I=\{(x,y)\,|\,x\in R,\ y\in R\}$，$A=\{(x,y)\,|\,x>0$ 或 $y>0\}$，则 $\overline{A}=$____。

（4）$A=\{(x,y)\,|\,y=\sqrt{-x^2},\ x\in R\}$，$B=\{(x,y)\,|\,y=\sqrt{(-x)^2},\ x\in R\}$，则 $A\cap B=$____。

（5）设集合 $A=\{x\,|\,1<x<2\}$，$B=\{x\,|\,x-a<0\}$，若 $A\subset B$，则实数 a 的取值范围是____。

解：（1）$\overline{A}=\{$任意一组对边都不平行的四边形$\}$。

（2）$\because$ $I=\{x\,|\,-4\leqslant x\leqslant 4\}$，$A=\{x\,|\,-2<x<3\}$，

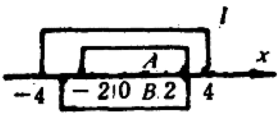


图 1-2

$B=\{x|-3<x\leqslant 3\}$，如图 1-2。

$\therefore\ \bar{A}=\{x|-4\leqslant x\leqslant -2$ 或 $3\leqslant x\leqslant 4\}$，$A\cap B=\{x|-2<x<3\}$，$\overline{A\cup B}=\{x|-4\leqslant x\leqslant -3$ 或 $3<x\leqslant 4\}$，$\bar{A}\cap B=\{x|-3<x\leqslant -2$ 或 $x=3\}$。

(3) $\bar{A}=\{(x,y)|x\leqslant 0$ 且 $y\leqslant 0\}$。

(4) $\because\ A=\{(0,0)\}$，$B=\{(x,y)|y=|x|,\ x\in R\}$，

$\therefore\ A\cap B=\{(0,0)\}$。

(5) 由子集的定义可知：实数 a 的取值范围是 $a\in[2,+\infty)$。

说明：除 Venn 图外，数集、点集还可以用数轴或坐标平面来表示，这种方法在进行数集或点集的运算时会带来很多方便。

例 3 设 $a,x\in R$，集合 $A=\{2,4,2x^3-x^2-5x+1\}$，$B=\{3,x^2+ax+a\}$，$C=\{x^2+(a+1)x-3,\ 1\}$，求：

(1) 使 $A=\{2,3,4\}$ 的一切 x 值；

(2) 使 $2\in B$ 且 $B\subset A$ 的一切 a、x 值；

(3) 使 $B=C$ 的一切 a、x 值。

解：(1) $\because\ A=\{2,3,4\}$，

$$\therefore\ 2x^3-x^2-5x+1=3,$$

即 $$(x+1)(2x^2-3x-2)=0,$$

$$\therefore\ x_1=-1;\ x_2=2;\ x_3=-\frac{1}{2}.$$

(2) $\because\ 2\in B$，$B\subset A$，

$$\therefore\ \begin{cases}x^2+ax+a=2\\2x^3-x^2-5x+1=3,\end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} x=2 \\ a=-\dfrac{2}{3} \end{cases} \text{或} \begin{cases} x=-\dfrac{1}{2} \\ a=\dfrac{7}{2}. \end{cases}$$

(3) $\because$ $B=C$, $\therefore \begin{cases} x^2+ax+a=1 \\ x^2+(a+1)x-3=3, \end{cases}$

$$\therefore \begin{cases} x=3 \\ a=-2 \end{cases} \text{或} \begin{cases} x=-1 \\ a=-6. \end{cases}$$

各 类 题 选

1．选择题：

(1) 设集合 $M=\{x|x^2-7x+12<0\}$，$a=\pi$，则下列关系正确的是……………………………………………………(　　)。

(A)$a\subset M$；(B)$a\notin M$；(C)$\{a\}\in M$；(D)$\{a\}\subset M$。

(2) 集合 $A=\{$正方形$\}$，$B=\{$菱形$\}$，则 $A\cap B$ 为……………………………………………………………(　　)。

(A)$\{$梯形$\}$；　(B)$\{$菱形$\}$；　(C)$\{$正方形$\}$；

(D)$\{$长方形$\}$。

(3) 集合 $A=\{x||x|<1,\ x\in Z\}$，$B=\{x|\sqrt{x}<1,\ x\in Z\}$，则 $A\cap B$ 等于……………………………………(　　)。

(A)$\varnothing$；　(B)$\{1\}$；　(C)$\{0\}$；　(D)$\{0,1\}$。

(4) 方程组 $\begin{cases} x-3y=4 \\ 5x+y=4 \end{cases}$ 的解集为……………(　　)。

(A)$\{1,\ -1\}$；　(B)$\{(1,\ -1)\}$；　(C)$\{x=1,$

$y=-1\}$； （D）以上都不对。

(5) 设 S、T 是两个非空集合，且$S \not\subseteq T$，$T \not\subseteq S$，令$X=S\cap T$，则$S\cup X$等于……………………………（　　）。

（A）X；　（B）T；　（C）S；　（D）$\varnothing$。

(6) 集合 $A=\{a^2, a+1, -3\}$，$B=\{a-3, 2a-1, a^2+1\}$，若 $A\cap B=\{-3\}$，则实数 a 的值是………（　　）。

（A）0；（B）-1；（C）0 或 -1；（D）以上都不对。

(7) 若方程 $x^2-px+15=0$ 的解集为M，方程 $x^2-5x+q=0$ 的解集为N，且$M\cap N=\{3\}$，则 $p+q$ 的值为（　　）。

（A）14；　（B）11；　（C）7；　（D）2。

(8) 已知全集 $I=\{$小于10的正整数$\}$，且 $A\cap B=\{2\}$，$\bar{A}\cap B=\{1, 9\}$，$\bar{A}\cap\bar{B}=\{4, 6, 8\}$，则集合 A、B 中的元素个数分别为…………………………………………（　　）。

（A）3，4；　（B）4，3；　（C）5，6；　（D）6，5。

(9) 设 N 为自然数集，$M=\{x|x=a^2+1, a\in N\}$，$P=\{x|x=b^2-4b+5, b\in N\}$，则 M 与 P 的关系为 …（　　）。

（A）$P\subset M$；　（B）$M\subset P$；　（C）$M=P$；　（D）以上都不对。

2. 填空题：

(1) 用列举法表示下列集合：

①$\{$小于40，且可以表示为 $4n+3$ 的质数，$n\in Z\}=$__。

②x^2-1 的一次因式组成的集合___。

③$\left\{a \,\middle|\, \dfrac{12}{5-a}\in N，且 a\in Z\right\}=$___。

④$\{(x, y)|x^2+y^2=1, x, y\in Z\}=$___。

⑤方程组$\begin{cases}2x-3y=-7\\ x+2y=0\end{cases}$的解集___。

(2) 用描述法$\{x|x$ 具有某种性质$\}$表示下列集合：

①能被 3 整除的整数集____。

②非负偶数集____。

③实系数一元二次方程的集合____。

④二元一次方程 $ax+by=0(ab\neq 0)$的解集____。

⑤不在第一、三象限内的点集____。

(3) ①$\{a, b, __\}\cap\{c, d, __\}=\{b, c\}$；

②$\{a, b, __\}\cup\{b, d, e\}=\{a, b, c, d, __\}$；

③$\{a,d,__,__\}\cap\{d,c,e__,__\}=\{a,b,e,__\}$。

(4) 已知全集$I=R$，$A=\{x|x^2-4x-5<0\}$，$B=\{x|x^2-3x+2>0\}$，则 $A\cup B=$ ___；$A\cap B=$____，$\overline{A\cup B}=$___；$\overline{A}\cup\overline{B}=$____。

(5) 已知集合 $A=\{x|x^2-ax+a^2-19=0\}$，$B=\{x|x^2-5x+6=0\}$，$C=\{x|x^2+2x-8=0\}$，若$A\cap B\neq\varnothing$，$A\cap C=\varnothing$，则实数 $a=$____。

(6) 已知 $I=\{x|x$ 为不大于20的质数$\}$，且$A\cap\overline{B}=\{3,5\}$，$\overline{A}\cap B=\{7,19\}$，$\overline{A}\cap\overline{B}=\{2, 17\}$，则集合$A=$___；$B=$____。

(7) 设二次方程 $x^2-px+15=0$ 的解集为A，方程 $x^2-5x+q=0$ 的解集为B，若 $A\cup B=\{2,3,5\}$，$A\cap B=\{3\}$，则 $p=$__，$q=$__，$A=$__，$B=$__。

(8) 集合$A=\{1,2,(m^2-3m-1)+(m^2-5m-6)\sqrt{3}\}$，集合 $B=\{-1,3\}$，$A\cap B=\{3\}$，则有理数 $m=$__。

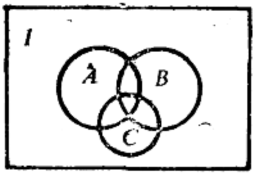
3．已知集合$A=\{2,a^2-3a+5,5\}$，$B=\{1,a^2-6a+10,3\}$，且$A\cap B=\{2, 3\}$，求：(1) a 的值；(2) $A\cup B$ 的所有不含 2、3 的子集。

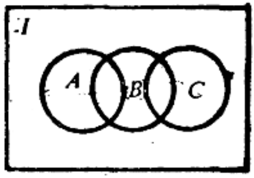
4．设全集 $I=\{$不超过 5 的正整数$\}$，集合 $A=\{x|x^2-5x+$

$q=0\}$，$B=\{x|x^2+px+12=0\}$，且 $\bar{A}\cup B=\{1,3,4,5\}$，求实数 p、q 的值。

5．用阴影部分表示下列集合：

(1) $\bar{A}\cap(B\cap C)$； (2) $B\cap(A\cup C)$。





6．已知 $A=\{x|x^2-ax+a^2-19=0\}$，$B=\{x|\log_2(x^2-5x+8)=1\}$，$C=\{x|x^2+2x-8=0\}$，且 $A\cap B\supset\varnothing$，$A\cap C=\varnothing$，求 a 的值。

7．已知集合 $A=\{x||x-\frac{1}{2}(a+1)^2|\leqslant\frac{1}{2}(a-1)^2,\ a\in R,\ x\in R\}$，集合 $B=\{x|x^2-3(a+1)x+2(3a+1)\leqslant 0,\ a\in R,\ x\in R\}$，且 $A\subseteq B$，求 a 的取值范围。

二、映射与函数

大 纲 要 求

了解映射、一一映射与逆映射的概念及它们的区别和联系，并在集合和映射概念的基础上，加深对函数概念的理解，掌握反函数的意义及互为反函数的图象之间的关系，掌握函数的单调性和函数的奇偶性的概念，并能判断一些简单函数的单调性和奇偶性，掌握函数的定义域和值域的求法。

典 型 例 题

例1 已知集合 X、Y 及对应法则 f，下列对应中，哪些是从 X 到 Y 的映射？哪些是从 X 到 Y 上的函数？哪些是从 X 到 Y 上的一一映射？哪些有逆映射？如有逆映射，试写出 f^{-1}。

（1）$X=\{$平面M内的三角形$\}$，$Y=\{$平面 M 内的圆$\}$，对应法则 f 是“画三角形的外接圆”。

（2）$X=\{x|x\in R\}$，$Y=\{y|y\in R\}$，f 是“$x\to y=\frac{1+x}{1-x}$”。

（3）$X=R^+$，$Y=R$，对应法则 f 是“求常用对数”。

（4）$X=[-1, +\infty)$，$Y=R$，对应法则 f 是“X 中元素加 1 后开平方取负平方根”。

（5）$X=[0,+\infty)$，$Y=[4,+\infty)$，对应法则 f 是“$x\to y=x^2+4$”。

解：（1）、（3）、（4）、（5）都是从集合 X 到集合 Y 的映射。（2）集合 X 中的元素 1，在集合 Y 中没有元素与之对应，所以不是映射。

（3）、（5）都是从集合 X 到集合 Y 上的函数；由于（2）不是映射，所以也不是函数；（1）中的集合 X、Y 都不是数集，所以也不是函数；（4）中尽管 X、Y 都是非空数集，但它是从 X 到 Y 内的映射，即象集 $M\subset Y$，集合 Y 中元素 1 在 X 中没有原象，因此也不是从 X 到 Y 上的函数。

（3）、（5）都是从 X 到 Y 上的一一映射，从而也具有逆

映射；(1) 中 X 的多个元素可以有同一个象，所以不是一一映射，也不具有逆映射；(2) 不是映射，所以不是一一映射；(4) 集合 Y 中有的元素没有原象，也不是一一映射。

(3) 的逆映射 f^{-1}：$Y\to X$，使 X 中的元素 $x=10^y$ 与 Y 中的元素 y 对应。

(5) 的逆映射 f^{-1}：$Y\to X$，使 X 中的元素 $x=\sqrt{y-4}$ 与 Y 中元素 y 对应。

说明：在映射 f：$X\to Y$ 中，对于集合 X 中的任意一个元素 x，在集合 Y 中有唯一的象，但集合 Y 中的元素 y 在 X 中不一定有原象，若有原象也不一定唯一。若 f：$X\to Y$ 是从定义域 X 到值域 Y 上的函数，则集合 X 中每个元素都要有唯一象。且集合 Y 中任一元素均在 X 中有原象，但原象不一定唯一。若 f：$X\to Y$ 是从 X 到 Y 上的一一映射，则集合 X 中每个元素在 Y 中均有唯一象，且集合 Y 中每个元素在 X 中均有唯一的原象。读者可通过上例进一步分清映射、函数、一一映射的本质区别。

例2 已知函数 $f(2x-1)=\lg\dfrac{x+2}{x-3}$，求：

(1) 函数 $y=f(x)$ 的表达式；

(2) 判断 $f(x)$ 的奇偶性；

(3) 若 $f[\varphi(x)]=\lg x$，求 $\varphi(x)$ 及 $\varphi(2)$ 的值。

解：(1) 设 $t=2x-1$，则 $x=\dfrac{1+t}{2}$，

$$\therefore\quad f(t)=\lg\frac{\frac{1+t}{2}+2}{\frac{1+t}{2}-3}=\lg\frac{t+5}{t-5},$$

即 $f(x)=\lg\frac{x+5}{x-5}$。

(2) 任取 $x\in(5,+\infty)\cup(-\infty,-5)$，

$\because\ f(-x)=\lg\frac{-x+5}{-x-5}=\lg\frac{x-5}{x+5}=-\lg\frac{x+5}{x-5}$，

即 $f(-x)=-f(x)$，$\therefore$ 函数 $y=f(x)$ 是奇函数。

(3) $\because\ f[\varphi(x)]=\lg\frac{\varphi(x)+5}{\varphi(x)-5}$，而 $f[\varphi(x)]=\lg x$，

$\therefore\ \frac{\varphi(x)+5}{\varphi(x)-5}=x\Rightarrow\varphi(x)=\frac{5x+5}{x-1}$，

$\varphi(2)=\frac{5\times2+5}{2-1}=15$。

说明：函数符号 $y=f(x)$ 中包含着函数的定义域、值域及定义域到值域上的对应法则 f 三部分内容。对应法则 f 是函数的核心，它可以用解析式表示，也可以用数表、图象或其它方式表示。当 $y=f(x)$ 中的 f 以解析式表示时，可以理解为由 x 算出 y 的一种算法，如 $f(x)=x^2-3x+1$，对应法则 f 表示的"算法"是平方，减去 x 的 3 倍，再加上 1；也可以理解为 $f(\boxed{})=\boxed{}^2-3\boxed{}+1$，所以 $f(-x)=\boxed{-x}^2-3\boxed{-x}+1=x^2+3x+1$，$f[f(x)]=\boxed{f(x)}^2-3\boxed{f(x)}+1=\boxed{x^2-3x+1}^2-3\boxed{x^2-3x+1}+1=x^4-6x^3+8x^2+3x-1$，从而不论原象发生怎样的变化，都能很快地算出相应的函数值。

例3 当 $a\neq0$ 且 $a\neq1$ 时，求证：函数 $y=\frac{x-1}{ax-1}$ $(x\in R$

且 $x\neq\frac{1}{a}$)的图象关于直线 $y=x$ 对称。

证明：$\because$ $x\neq\frac{1}{a}$，$\therefore$ 由 $y=\frac{x-1}{ax-1}$ 得：

$$axy-y=x-1,\quad 即\quad (ay-1)x=y-1,$$

$\because$ $a\neq0$ 且 $a\neq1$，$\therefore$ $\frac{1}{a}\neq1$，

$$\therefore\quad y=\frac{x-1}{ax-1}=\frac{1}{a}+\frac{\frac{1}{a}-1}{ax-1}\neq\frac{1}{a},$$

即 $ay-1\neq0$，

从而函数 $y=\frac{x-1}{ay-1}$ 的反函数为自身，所以 $y=\frac{x-1}{ax-1}$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称。

说明：一般地，对于函数 $y=f(x)$，若同时以 x 代 y、y 代 x 而方程不变，则其图象关于直线 $y=x$ 对称。如本题中，因为 $x\neq\frac{1}{a}$，$ax-1\neq0$，所以 $axy-y-x+1=0$ 的图象与 $y=\frac{x-1}{ax-1}$ 表示同一个图象，又以 x 代 y、y 代 x，$axy-y-x+1=0$ 不变，所以它的图象关于直线 $y=x$ 对称。

例4 已知奇函数 $y=f(x)$ 在其定义域 $[-1, 1]$ 内是减函数，且 $f(1-a)+f(1-a^2)>0$，试求实数 a 的取值范围。

解：$\because$ $f(x)$ 的定义域为 $[-1, 1]$，